Theoretisch-Physikalisches Institut
Friedrich-Schiller Universität Jena

Elektrodynamik

Sommersemester 2018

Präsenzübung 2

Aufgabe 6: Satz von Stokes

Gegeben sei in einem kartesischen Koordinatensystem das Vektorfeld $\boldsymbol{v} = (0, x, 2y)$.

(a) Wie lautet der Satz von Stokes?

(b) Verifizieren Sie diesen für das Vektorfeld $\boldsymbol{v}$ am Beispiel

(i) der Kreisscheibe gegeben durch $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0, x^2 + y^2 \leq R^2\}$

(ii) einer Halbkugel gegeben durch $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \leq 0\}$.

Haben beide Flächen die selbe Randkurve $\mathcal{C}$?

Aufgabe 7: Laplace in Kugelkoordinaten

Im Folgenden betrachten wir Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) im $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass der Laplace Operator in Kugelkoordinaten durch

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \tag{1}$$

gegeben ist, indem Sie die Kettenregel

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial x}$$

für die ersten, und eine entsprechende für die zweiten Ableitungen, benutzen.

Hinweis: Diese Herleitung ist sehr länglich, und wir werden daher in Aufgabe 8 eine Methode für allgemeine krummlinige orthogonale Koordinaten vorstellen.

Aufgabe 8: Differentialoperatoren in krummlinigen orthogonalen Koordinaten

Im Folgenden betrachten wir neben kartesischen Koordinaten auch allgemeine krummlinige orthogonale Koordinaten im $\mathbb{R}^3$.

(i) Zeigen Sie, dass der Gradient für krummlinige orthogonale Koordinaten durch

$$\nabla f = \frac{1}{n_1}\boldsymbol{e}_{q_1}\frac{\partial f}{\partial q_1} + \frac{1}{n_2}\boldsymbol{e}_{q_2}\frac{\partial f}{\partial q_2} + \frac{1}{n_3}\boldsymbol{e}_{q_3}\frac{\partial f}{\partial q_3}$$

gegeben ist, wobei n_i durch $n_i = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\right|$ gegeben sind.

(ii)* Zeigen Sie, dass die Divergenz wie folgt gegeben ist

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = \frac{1}{n_1 n_2 n_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1}(v_1 n_2 n_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(v_2 n_1 n_3) + \frac{\partial}{\partial q_3}(v_3 n_1 n_2) \right] .$$

(iii)* Zeigen Sie, dass die Rotation sich zu

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{v} = \frac{1}{n_1 n_2 n_3} \begin{pmatrix} n_1 \boldsymbol{e}_{q_1} & n_2 \boldsymbol{e}_{q_2} & n_3 \boldsymbol{e}_{q_3} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ v_1 n_1 & v_2 n_2 & v_3 n_3 \end{pmatrix}$$

ergibt.

(iv) Schließen Sie aus (i) und (ii), dass der Laplace Operator durch

$$\Delta f = \nabla\cdot(\nabla f) = \frac{1}{n_1 n_2 n_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{n_2 n_3}{n_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{n_1 n_3}{n_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{n_1 n_2}{n_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \right) \right]$$

gegeben ist, und berechnen Sie diesen für Kugelkoordinaten. Stimmt dieser mit Aufgabe 7 überein?