Theoretisch-Physikalisches Institut
Friedrich-Schiller Universität Jena

Elektrodynamik

Sommersemester 2018

Präsenzübung 1

Aufgabe 1: Rechnen mit $\boldsymbol{\nabla}$

(a) Gegeben sei das Skalarfeld

$$f(x,y,z) = x\,y^2\,z\,.$$

Berechnen Sie den Gradienten in kartesischen Koordinaten.

(b) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\boldsymbol{v}(x,y,z) = y^2\,\boldsymbol{e}_x + (2x\,y + z^2)\,\boldsymbol{e}_y + 2y\,z\,\boldsymbol{e}_z$$

in kartesischen Koordinaten. Berechnen Sie die Rotation und die Divergenz des Vektorfelds in diesen Koordinaten. Rechnen Sie dieses Vektorfeld in Kugelkoordinaten um!

Aufgabe 2: Zylinderkoordinaten

Die Zylinderkoordinaten (ϱ, φ, z) sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} x &= \varrho \sin\varphi\,, \\ y &= \varrho \cos\varphi\,, \\ z &= z\,. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie fr diese Zylinderkoordinaten die orthonormalen Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_\varrho$, $\boldsymbol{e}_\varphi$ und $\boldsymbol{e}_z$, das Linienelement $\mathrm{d}s^2 = |\mathrm{d}\boldsymbol{r}|^2$ sowie das Volumenelement $\mathrm{d}V$.

Aufgabe 3: Rechenregeln für Differentialoperatoren

Es seien $f(\boldsymbol{r})$ und $g(\boldsymbol{r})$ Skalarfelder und $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ ein Vektorfeld. Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\left(f(\boldsymbol{r})g(\boldsymbol{r})\right) &= f(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{\nabla}g(\boldsymbol{r}) + g(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{\nabla}f(\boldsymbol{r})\,, \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(f(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\right) &= f(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) + \left(\boldsymbol{\nabla}f(\boldsymbol{r})\right)\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\,. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

Aufgabe 4: ϵ-Tensor

Im Folgenden sei ϵ_{ijk} der total antisymmetrische Tensor, wobei $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ und $\epsilon_{123} = 1$. Zeigen Sie die folgenden Identitäten

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$$

sowie

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\,\delta_{km} - \delta_{jm}\,\delta_{kl}\,, \qquad \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijm} = 2\,\delta_{km}\,.$$

Über doppelt auftretende Indizes wird summiert (Einsteinsche Summenkonvention).

Aufgabe 5: Identitäten von Differentialoperatoren

Es sei $f(\boldsymbol{r})$ ein Skalarfeld sowie $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ und $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r})$ Vektorfelder. Zeigen Sie die folgenden Identitäten von Differentialoperatoren

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) &= (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{w} + (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{w})\,\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v})\,\boldsymbol{w}\,,\\
\boldsymbol{\nabla} \times (f\,\boldsymbol{v}) &= f\,(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{\nabla} f) \times \boldsymbol{v}\,,\\
\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} f) &= 0\,,\\
\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}) &= 0
\end{aligned}$$

mit Hilfe der Identitäten des ϵ Symbols aus Aufgabe 4. Zeigen Sie außerdem

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}) - \Delta \boldsymbol{v}\,,\\
\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) &= \boldsymbol{w} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{w})\,.
\end{aligned}$$