Theoretisch-Physikalisches Institut
Friedrich-Schiller Universität Jena

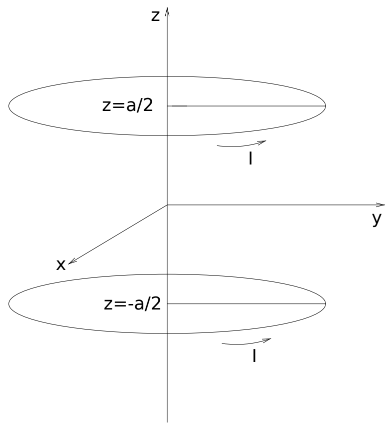
**Elektrodynamik**

Sommersemester 2018

Hausübung 9

## Aufgabe 37: Helmholtz–Spulenpaar

Berechne das Magnetfeld auf der Symmetrieachse eines Helmholtz–Spulenpaares, welches aus zwei im gleichen Sinne vom Strom $I$ durchflossenen Leiterkreisen besteht. Diese Kreise haben Radius $R$ und liegen in den Ebenen $z = \pm\frac{a}{2}$.




(a) Bestimme die $z$–Komponente des Magnetfelds $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ auf der Symmetrieachse.

Hinweis: Sie dürfen die stromdurchfloßenen Leiter als Stromfäden approximieren.

(b) Für welche Wahl des Verhältnisses $\frac{R}{a}$ ist das Magnetfeld in der Umgebung des Nullpunktes maximal homogen?

(4+4 Punkte)

*Bedeutung der Aufgabe:* Für Experimente oder technische Anwendungen möchte man oft ein möglichst homogenes Magnetfeld erzeugen. Eine sehr einfache geeignete Anordnung ist ein Helmholtzspulenpaar, d.h. zwei Spulen mit Radius $R$, die koaxial im Abstand $a$ angeordnet sind und gleichsinnig von einem Strom $I$ durchflossen werden.

## Aufgabe 38: Magnetfeld im Koaxialkabel

Im Folgenden betrachten wir ein unendlich langes Koaxialkabel entlang der z-Achse. Das Koaxialkabel besteht aus einem unendlich langen Draht mit kreisförmigen Querschnitt (Radius $R$), dem sogenannten Innenleiter, durch den ein konstanter Gleichstrom mit Stromdichte $\boldsymbol{j} = j_0 \boldsymbol{e}_z$ fließt. Des Weiteren gibt es einen koaxialen zylindrischen Rückleiter mit dem Querschnitt eines Kreisrings (Innenradius $R_i$ mit $R_i > R$ und Außenradius $R_a > R_i$). Im Hohlraum zwischen $R$ und $R_i$ sowie im Außenraum $r > R_a$ fließe kein Strom.

(i) Berechnen Sie die Stromstärke $I$ im Innenleiter, und daraus die Stromdichte im Rückleiter. (Hinweis: Im Rückleiter fließt die Stromstärke $-I$.)

(ii) Berechnen Sie das Vektorpotential $\boldsymbol{A}$ im Innenleiter, Hohlraum, Rückleiter und im Außenraum indem Sie die zugehörige Poissongleichung lösen.

Hinweise: Benutzen Sie Zylinderkoordinaten. Es liegen keine Oberflächenströme vor. Welche Anschlussbedingungen gelten daher an den Grenzflächen?

(iii) Berechnen Sie das zugehörige Magnetfeld in den jeweiligen Bereichen und skizzieren Sie die $\varphi$-Komponente des Magnetfelds.

(2+6+4 Punkte)

## Lösung Aufgabe 37

Es gilt

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}.$$

Für Berechnungen abstrahiert man den Leiter oft als Stromfaden. In diesem Fall gilt $d^3\boldsymbol{r}'\,\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') = d\boldsymbol{r}'\,I(\boldsymbol{r}')$ und man erhält folglich

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}' \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}. \tag{1}$$

In unserem Fall ist das $\boldsymbol{B}$–Feld eines Spulenpaares zu untersuchen, das von einem konstanten Strom durchflossen wird. Berücksichtigt man beide Spulen, indem man $\boldsymbol{B}$–Felder der Form (1) superponiert, so erhalten wir

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[ \int \frac{d\boldsymbol{r}_1 \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|^3} + \int \frac{d\boldsymbol{r}_2 \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2|^3} \right]. \tag{2}$$

Wir wählen einen Aufpunkt auf der Symmetrieachse, also $\boldsymbol{r} = z\boldsymbol{e}_z$. Aus der Skizze ist ersichtlich, dass

$$\boldsymbol{r}_1 = R\boldsymbol{e}_\varrho + \frac{a}{2}\boldsymbol{e}_z, \qquad \boldsymbol{r}_2 = R\boldsymbol{e}_\varrho - \frac{a}{2}\boldsymbol{e}_z,$$

so dass

$$|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1| = \sqrt{R^2 + \left(z - \frac{a}{2}\right)^2}, \qquad |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2| = \sqrt{R^2 + \left(z + \frac{a}{2}\right)^2}.$$

Für die weitere Rechnung ist es am günstigsten, Zylinderkoordinaten zu verwenden. Dann ist offensichtlich

$$d\boldsymbol{r}_1 = R\boldsymbol{e}_\varphi d\varphi_1, \qquad d\boldsymbol{r}_2 = R\boldsymbol{e}_\varphi d\varphi_2$$

und außerdem gilt

$$\boldsymbol{e}_\varrho \times \boldsymbol{e}_\varphi = \boldsymbol{e}_z, \qquad \boldsymbol{e}_\varphi \times \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_\varrho.$$

Somit gilt

$$d\boldsymbol{r}_1 \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1) = R\,d\varphi_1 \boldsymbol{e}_\varphi \times \left(-R\boldsymbol{e}_\varrho + \left(z - \frac{a}{2}\right)\boldsymbol{e}_z\right) = R\,d\varphi_1 \left(R\boldsymbol{e}_z + \left(z - \frac{a}{2}\right)\boldsymbol{e}_\varrho\right)$$

und analog

$$d\boldsymbol{r}_2 \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2) = R\,d\varphi_2 \left(R\boldsymbol{e}_z + \left(z + \frac{a}{2}\right)\boldsymbol{e}_\varrho\right).$$

Setzen wir das alles in (2) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}(z) &= \frac{\mu_0 I R^2}{4\pi} \left[ \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_1}{[R^2 + (z - a/2)^2]^{3/2}} + \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_2}{[R^2 + (z + a/2)^2]^{3/2}} \right] \boldsymbol{e}_z \\
&+ \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \left[ \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \frac{z - a/2}{[R^2 + (z - a/2)^2]^{3/2}} \boldsymbol{e}_\varrho + \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \frac{z + a/2}{[R^2 + (z + a/2)^2]^{3/2}} \boldsymbol{e}_\varrho \right]
\end{aligned}$$

Für die $z$-Komponente des elektrischen Felds gilt

$$B_z = \frac{\mu_0 I R^2}{2}\left[\frac{1}{[R^2+(z-a/2)^2]^{3/2}} + \frac{1}{[R^2+(z+a/2)^2]^{3/2}}\right]. \tag{3}$$

Um das Verhältnis $R/a$ zu bestimmen, so dass $B_z$ in der Umgebung des Ursprungs maximal homogen wird, entwickeln wir $B(z)$ in eine Taylorreihe um $z = 0$. Aus (3) ergibt sich dann

$$B_z \sim \frac{\mu_0 I R^2}{\left(R^2+\frac{a^2}{4}\right)^{3/2}}\left[1 + \frac{1}{2\left(R^2+\frac{a^2}{4}\right)}\left\{-3+\frac{15a^2}{4(R^2+a^2/4)}\right\}z^2 + \mathcal{O}(z^4)\right].$$

$B_z$ ist maximal homogen, wenn der Term proportional zu $z^2$ verschwindet, wenn also

$$-12\left(R^2+\frac{a^2}{4}\right)+15a^2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad R = a.$$

Ist der Abstand der Spulen genausogroß wie der Spulenradius, so ist das $\boldsymbol{B}$–Feld in der Umgebung des Ursprungs maximal homogen.

## Lösung Aufgabe 38

(i) Der Gesamtstrom im Innenleiter $I$ berechnet sich zu

$$I = \pi R^2 j_0. \tag{4}$$

Im Rückleiter muss der Gesamtstrom $-I$ fließen. Es gilt daher für die Stromdichte $\mathbf{j}_1 = j_1\mathbf{e}_z$ im Rückleiter

$$j_1\pi\left(R_a^2 - R_i^2\right) = -I \tag{5}$$

und somit

$$j_1 = -\frac{I}{\pi\left(R_a^2-R_i^2\right)}.$$

(ii) Es gilt

$$\Delta\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r})\ .$$

Da $\mathbf{j}\,||\,\mathbf{e}_z$ folgt, dass $A_x = A_y = 0$. Somit muss nur noch für $A_z$ gelöst werden. Des Weiteren ist $A_z$ nur von $\varrho^2 = x^2+y^2$ abhängig aufgrund der Zylindersymmetrie. Wir müssen nur noch das folgende Problem lösen:

- im Innenleiter ($\varrho \leq R$):
$$\Delta A_z^{(i)}(\varrho) = -\mu_0\, j_0$$
- im Hohlraum ($R < \varrho < R_i$):
$$\Delta A_z^{(h)}(\varrho) = 0$$
- im Rückleiter ($R_i \leq \varrho \leq R_a$):
$$\Delta A_z^{(r)}(\varrho) = -\mu_0\, j_1$$
- im Außenraum ($\varrho > R_a$):
$$\Delta A_z^{(a)}(\varrho) = 0$$

wobei der (relevante Teil des) Laplace Operators durch

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}$$

auf $A_z^{(i)}, A_z^{(h)}, A_z^{(r)}$ und $A_z^{(a)}$ wirkt. Die Lösung für $A_z^{(i)}$ ergibt sich zu

$$A_z^{(i)} = a_i \ln \varrho + b_i - \frac{\mu_0 j_0}{4}\varrho^2.$$

Da für $\varrho \to 0$ $A_z^{(i)}$ regulär sein soll, folgt $a_i = 0$. Analog gilt für $A_z^{(h)}, A_z^{(r)}$ und $A_z^{(a)}$

$$\begin{aligned} A_z^{(h)} &= a_h \ln \varrho + b_h, \\ A_z^{(r)} &= a_r \ln \varrho + b_r - \frac{\mu_0 j_1}{4}\varrho^2, \\ A_z^{(a)} &= a_a \ln \varrho + b_a. \end{aligned}$$

Die Integrationskonstanten bestimmt man, indem man die Stetigkeit von $A_z$ und der ersten Ableitung nach $\varrho$ fordert. Letzteres stimmt, da es keine Oberflächenströme gibt.

Wir nutzen zuerst die Stetigkeit der ersten Ableitung von $A_z$ nach $\varrho$. Dadurch erhalten wir

$$a_h = -\frac{\mu_0 j_0}{2}R^2\,, \qquad a_r = -\frac{\mu_0 j_0}{2}R^2 + \frac{\mu_0 j_1}{2}R_i^2 \tag{6}$$

sowie

$$a_a = -\frac{\mu_0 j_0}{2}R^2 + \frac{\mu_0 j_1}{2}\left(R_i^2 - R_a^2\right) = 0 \tag{7}$$

wobei im letzten Schritt die Identitäten (4) und (5) verwendet wurden.

Mittels der Stetigkeit von $A_z$ kann man auch die Konstanten $b_i, b_r, b_a$ und $b_h$ bestimmen. Insgesamt erhält man drei Gleichungen für vier Unbekannte. Somit besitzt das Gleichungssystem keine eindeutige Lösung, was jedoch aufgrund der Eichfreiheit erklärt werden kann. Wir können durch hinzufügen einer (überall definierten) Funktion beispielsweise eine der Konstanten auf Null setzen. Im Folgenden zeigen wir nicht die konkreten Ausdrücke für die Konstanten $b_i, b_r, b_a$ und $b_h$, zumal diese auch nicht relevant bei der Berechnung des Magnetfelds sind.

(iii) Das Magnetfeld ist tangential zum Zylinder, d. h. es hat nur eine $\varphi$-Komponente. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= -\frac{\partial A_z(\varrho)}{\partial \varrho}\mathbf{e}_\varphi, \text{ d. h.} \\ \mathbf{B}^{(i)} &= \frac{\mu_0 j_0}{2}\varrho \mathbf{e}_\varphi, \\ \mathbf{B}^{(h)} &= -\frac{a_h}{\varrho}\mathbf{e}_\varphi, \\ \mathbf{B}^{(r)} &= -\frac{a_r}{\varrho}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\mu_0 j_1}{2}\varrho \mathbf{e}_\varphi, \\ \mathbf{B}^{(a)} &= -\frac{a_a}{\varrho}\mathbf{e}_\varphi. \end{aligned}$$

Man beachte, dass $a_a = 0$ ist und somit das Magnetfeld im Außenraum verschwindet.