Theoretisch-Physikalisches Institut
Friedrich-Schiller Universität Jena

Elektrodynamik

Sommersemester 2018

Hausübung 8

Aufgabe 33: Magnetostatik

Betrachten Sie einen unendlich langen Draht mit Radius R entlang der z-Achse. Die Stromdichte innerhalb des Drahtes sei durch

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = j_0 \left(1 - \left(\frac{\varrho}{R}\right)^2\right) \boldsymbol{e}_z$$

gegeben, wobei $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ und $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ der Abstand zur z-Achse ist. Berechnen Sie das Magnetfeld $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ innerhalb und außerhalb des Drahtes mit Hilfe der integralen Maxwell-Gleichungen. (6 Punkte)

Aufgabe 34: Penning-Falle

Ein Elektron mit Ladung $q = -e$ (mit $e > 0$) bewege sich nicht-relativistisch in einem statischen homogenen Magnetfeld $\boldsymbol{B} = B\,\boldsymbol{e}_z$ und einem ebenfalls statischen, aber inhomogenen elektrischen Feld $\boldsymbol{E}$, welches durch ein elektrostatisches Potential $\phi(x, y, z)$ der Form

$$\phi(x, y, z) = \frac{U_0}{2\rho_0^2}\left(x^2 + y^2 - 2z^2\right) \qquad \text{mit} \quad U_0 > 0$$

gegeben ist. U_0 und ρ_0 sind Konstanten.

(i) Lösen Sie die nicht-relativistische Bewegungsgleichung für die Geschwindigkeit des Elektrons zunächst für $U_0 = 0$ und einer Bewegung in der (x, y)-Ebene. Bestimmen Sie die zugehörige Frequenz ω_c.

(ii) Berechnen Sie das zu ϕ gehörende elektrische Feld und verifizieren Sie, dass das elektrische Feld quellenfrei ist.

(iii) Betrachten Sie zuerst eine Bewegung entlang der z-Achse. Zeigen Sie, dass es sich im Fall $U_0 > 0$ um eine harmonische Schwingung handelt. Bestimmen Sie deren Frequenz ω_z.

(iv) Lösen Sie im Fall $U_0 > 0$ die vollständigen Bewegungsgleichungen in der (x, y)-Ebene durch den Ansatz $x(t) = A\cos(\omega_m t)$ bzw. $y(t) = A\sin(\omega_m t)$. Wie lauten die zwei möglichen Frequenzen ω_m? Interpretieren Sie diese!

(8 Punkte)

Bitte wenden!

Aufgabe 35: Teilchen im homogenen $\boldsymbol{B}$ - Feld

Wir betrachten ein nicht-relativistisches Punktteilchen in einem homogenen, konstanten Magnetfeld, welches entlang der z-Achse ausgerichtet sei. Lösen Sie die Bewegungsgleichungen.

(6 Punkte)

Aufgabe 36 (Bonus): Teilchen in homogenen $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ Feldern

Nun ist neben dem in Aufgabe 35 betrachteten homogenen, konstanten Magnetfeld entlang der z-Achse auch noch ein konstantes, homogenes elektrisches Feld vorhanden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit liege das $\boldsymbol{E}$-Feld in der (y, z)-Ebene. Lösen Sie wiederum die Bewegungsgleichung und zeichnen Sie die Trajektorie des Punktteilchens für Spezialfälle.

Hinweis: Sie dürfen die Lösung der Aufgabe 35 verwenden.

Lösung Aufgabe 33

Wir benutzen die integrale Maxwellgleichung

Lösung Aufgabe 34

Hierbei handelt es sich um eine ehemalige Klausuraufgabe für Bachelorstudierende.

(i) Diese Teilaufgabe wird ebenfalls in Aufgabe 35 gelöst. Wir sollten nun lediglich eine Bewegung in der (x, y)-Ebene betrachten, d.h. $v_z(0) = 0$. Wir finden des weiteren die Zyklotronfrequenz

$$\omega_c = \frac{eB}{m} \,. \tag{1}$$

(ii) Es gilt

$$\boldsymbol{E}(x, y, z) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(x, y, z) = -\frac{U_0}{\rho_0^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2z \end{pmatrix} \tag{2}$$

und somit $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}(x, y, z) = 0$.

(iii) Entlang der z-Achse lautet die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{z}(t) + \frac{2\,U_0\,e}{\rho_0^2} z(t) = 0 \,.$$

Im Fall $U_0 > 0$ (und $e > 0$) handelt es sich um die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszilators mit Frequenz

$$\omega_z = \sqrt{\frac{2\,U_0\,e}{m\rho_0^2}} \tag{3}$$

(iv) Die Bewegungsgleichung in der (x, y)-Ebene lauten

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix} = -\omega_c \begin{pmatrix} \dot{y}(t) \\ -\dot{x}(t) \end{pmatrix} + \frac{e\,U_0}{m\rho_0^2} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \tag{4}$$

Nun verwenden wir den Ansatz

$$x(t) = A\,\cos(\omega_m\,t)\,, \qquad y(t) = A\,\sin(\omega_m\,t)\,, \tag{5}$$

also eine Kreisbewegung in der (x, y)-Ebene mit Frequenz ω_m. Somit erhalten wir für ω_m die folgende Relation

$$(\omega_m)^2 - \omega_c\,\omega_m + \frac{e\,U_0}{m\rho_0^2} = 0 \tag{6}$$

Diese quadratische Gleichung hat zwei Lösungen, nämlich

$$\omega_m^{\pm} = \frac{\omega_c \pm \sqrt{(\omega_c)^2 - \frac{4\,e\,U_0}{m\rho_0^2}}}{2} \tag{7}$$

Die Lösung ω_m^+ ist für kleines U_0 eine Störung der Zyklotronfrequenz. Bei der Lösung ω_m^- handelt es sich um eine Gleichgewichtsschwingung, die durch das elektrische Feld induziert wird. Für zu große U_0 werden jedoch $\omega_m^{\pm}$ komplexwertig, und die Funktionen $x(t)$ sowie $y(t)$ steigen exponentiell an.

Lösung Aufgabe 35

Wir betrachten zuerst ein nicht-relativistisches Teilchen im äußeren homogenen Magnetfeld entlang der z-Achse

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p} = \mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

mit $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m\dot{\mathbf{r}}$ und $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$. Somit gilt

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_c\, v_y \\ -\omega_c\, v_x \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

mit der Zyklotronfrequenz $\omega_c = \frac{qB}{m}$. Das Differentialgleichungssystem können wir durch Bilden einer weiteren Zeitableitung entkoppeln:

$$\ddot{v}_y + \omega_c^2\, v_y = 0 \tag{9}$$
$$\ddot{v}_x + \omega_c^2\, v_x = 0 \tag{10}$$
$$\dot{v}_z = 0 \tag{11}$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichungen ist durch

$$v_y = C_1 \sin(\omega_c t) + C_2 \cos(\omega_c t) \qquad v_x = \tilde{C}_1 \sin(\omega_c t) + \tilde{C}_2 \cos(\omega_c t) \qquad v_z = C_3 \tag{12}$$

gegeben, wobei C_1, C_2, C_3 und $\tilde{C}_1$ sowie $\tilde{C}_2$ Konstanten sind. Da wir jedoch die entkoppelten Differentialgleichungen an Stelle von (8) gelöst haben, müssen wir noch sicherstellen, dass die Lösung ebenfalls (8) löst. Dies ist nur der Fall, falls $\tilde{C}_1 = C_2$ und $\tilde{C}_2 = -C_1$. Somit ergibt sich die Lösung zu

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} C_2 \sin(\omega_c t) - C_1 \cos(\omega_c t) \\ C_2 \cos(\omega_c t) + C_1 \sin(\omega_c t) \\ C_3 \end{pmatrix}$$

Die Konstanten C_1, C_2 und C_3 werden durch die Anfangsbedingungen bestimmt. Insbesondere gilt $C_2 = v_y(0)$, $C_1 = -v_x(0)$ sowie $C_3 = v_z(0)$. Daher folgt

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} v_y(0) \sin(\omega_c t) + v_x(0) \cos(\omega_c t) \\ v_y(0) \cos(\omega_c t) - v_x(0) \sin(\omega_c t) \\ v_z(0) \end{pmatrix}.$$

Um nun die Lösung für $\boldsymbol{r}(t)$ zu erhalten integrieren wir nochmals nach der Zeit, wobei wir die Anfangsposition $\mathbf{r}(0)$ als Integrationskonstanten erhalten,

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \begin{pmatrix} \frac{v_x(0)}{\omega_c} \sin(\omega_c t) - \frac{v_y(0)}{\omega_c}(\cos(\omega_c t) - 1) \\ \frac{v_x(0)}{\omega_c}(\cos(\omega_c t) - 1) + \frac{v_y(0)}{\omega_c} \sin(\omega_c t) \\ v_z(0)t \end{pmatrix}.$$

Lösung Aufgabe 36

Nun betrachten wir zusätzlich ein $\mathbf{E}$-Feld in der (y, z)-Ebene. Die Differentialgleichung lautet nun

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}v_x \\ \frac{d}{dt}v_y \\ \frac{d}{dt}v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_c v_y \\ -\omega_c v_x \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{q}{m}\begin{pmatrix} 0 \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}.$$

Die Bewegung in z-Richtung kann sofort integriert werden

$$z(t) = \frac{qE_z}{2m}t^2 + v_z(0)t + z(0)$$

Um die allgemeine Lösung für die Bewegung in der (x, y)-Ebene zu erhalten, benötigen wir neben der allgemeinen Lösung im homogenen Fall (d.h. ohne **E**-Feld) noch eine spezielle Lösung für den inhomogenen Fall. Als spezielle Lösung kann man beispielsweise

$$v_x(t) = \frac{q}{m\omega_c}E_y = \frac{cE_y}{B} \qquad \text{sowie} \quad v_y(t) = 0$$

wählen. Somit lautet die allgemeine Lösung für den inhomogenen Fall

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} -C_1\cos(\omega_c t) + C_2\sin(\omega_c t) + \frac{cE_y}{B} \\ C_1\sin(\omega_c t) + C_2\cos(\omega_c t) \\ v_z(0) + \frac{qE_z}{m}t \end{pmatrix}$$

Mit $C_1 = -v_x(0) + \frac{cE_y}{B}$ sowie $C_2 = v_y(0)$ und nach anschließender Integration erhalten wir

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \begin{pmatrix} \frac{v_x(0)-\frac{cE_y}{B}}{\omega_c}\sin(\omega_c t) - \frac{v_y(0)}{\omega_c}(\cos(\omega_c t) - 1) + \frac{cE_y}{B}t \\ \frac{v_x(0)-\frac{cE_y}{B}}{\omega_c}(\cos(\omega_c t) - 1) + \frac{v_y(0)}{\omega_c}\sin(\omega_c t) \\ v_z(0)t + \frac{qE_z}{2m}t^2 \end{pmatrix}$$