Theoretisch-Physikalisches Institut
Friedrich-Schiller Universität Jena

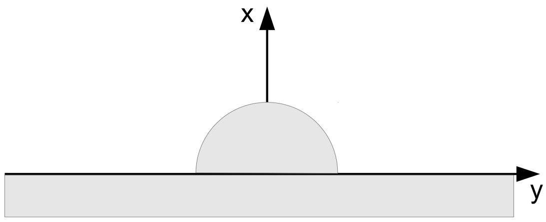
Elektrodynamik

Sommersemester 2018

Hausübung 7

Aufgabe 28: Bildladung(en) – Staatsexamensaufgabe

Eine leitende Halbkugel mit Radius R liege mit ihrer ebenen Seite auf einer in der (y,z)-Ebene liegende unendlich ausgedehnten Metallplatte. Der Mittelpunkt der Halbkugel befinde sich im Koordinatenursprung. Sowohl die Halbkugel als auch die Metallplatte seien geerdet (siehe Skizze, die den Querschnitt in der xy-Ebene zeigt). Des Weiteren befindet sich eine Punktladung (Ladung Q) am Ort $\boldsymbol{r} = (d\,\cos\theta, d\sin\theta, 0)$ mit $d > R$.



Geben Sie die Randbedingungen für das elektrostatische Potential an! Bestimmen Sie mit Hilfe von Bildladung(en) das elektrostatische Potential im Außenraum, d.h. für $x > 0$ und $x^2+y^2+z^2 > R^2$. Verifizieren Sie explizit, dass das elektrostatische Potential die Randbedingungen erfüllt (beim Verifizieren dürfen Sie der Einfachheit halber $z = 0$ setzen).

Hinweis: Im Fall einer leitenden, geerdeten Kugel (Mittelpunkt im Koordinatenursprung, Radius R) sowie einer Ladung q am Ort $\boldsymbol{r}$ (mit $|\boldsymbol{r}| \neq 0$) sitzt die Spiegelladung $q' = -q\,\frac{R}{|\boldsymbol{r}|}$ am Ort $\boldsymbol{r}' = \frac{R^2}{|\boldsymbol{r}|^2}\boldsymbol{r}$.

(6 Punkte)

Aufgabe 29: Sphärische Multipolmomente I

Berechnen Sie die sphärischen Monopol-, Dipol-, und Quadrupolmomente eines unendlich dünnen, homogen geladenen Kreisrings der Ladung q in der xy-Ebene, dessen Mittelpunkt mit dem Koordinatenursprung übereinstimmt. Bestimmen Sie auch das Potential bis zur Ordnung $\mathcal{O}(r^{-4})$ für große r. Wie lautet das zugehörige elektrische Feld?

(8 Punkte)

Bitte wenden!

Aufgabe 30: Sphärische Multipolmomente II

Ermitteln Sie den Zusammenhang zwischen sphärischen und kartesischen Multipolmomente explizit bis einschliesslich des Quadrupolmoments.

(6 Punkte)

Hinweis: Die Kugelflächenfunktionen sind wie folgt gegeben:

$$
\begin{aligned}
Y_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\,, \\
Y_{1-1} &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\sin\vartheta\, e^{-i\varphi}\,, \qquad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\cos\vartheta\,, \qquad Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\sin\vartheta\, e^{i\varphi}\,, \\
Y_{2-2} &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\,\sin^2\vartheta\, e^{-2i\varphi}\,, \qquad Y_{2-1} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}}\,\sin\vartheta\,\cos\vartheta\, e^{-i\varphi}\,, \\
Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\,(3\cos^2\vartheta - 1)\,, \\
Y_{21} &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\,\sin\vartheta\,\cos\vartheta\, e^{i\varphi}\,, \qquad Y_{22} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\,\sin^2\vartheta\, e^{2i\varphi}\,.
\end{aligned}
$$

Bonusaufgabe 31: Achsensymmetrie & Legendre Polynome

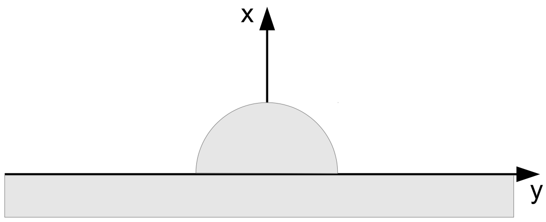
Berechnen Sie das elektrostatische Feld eines homogen geladenen unendlich dünnen Kreisrings mit Radius R. Wählen Sie das Koordinatensystem so, dass der Kreisring in der xy-Ebene liegt mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung.

Mögliche Strategie:

- Berechnen Sie zuerst das elektrostatische Potential entlang der z-Achse
- Argumentieren Sie, dass man für $r < R$ bzw für $r > R$ (wobei $r = |\boldsymbol{r}|$) das Potential in Legendre-Polynome entwicklen kann. Welche Koeffizienten verschwinden jeweils?
- Bestimmen Sie die nicht-verschwindenden Koeffizienten für $r > R$ bzw $r < R$ indem Sie das Resultat für das elektrostatische Potential entlang der z-Achse verwenden.

Lösung Aufgabe 28

Die Geometrie sei wie folgt gegeben.



Um die Randbedingungen der geerdeten Metallplatte bzw. der geerdeten Halbkugel

$$\phi(x=0,y,z)=0 \qquad \text{sowie} \quad \phi(x,y,z)=0 \text{ für } x^2+y^2+z^2=R^2 \tag{1}$$

für das elektrostatische Potential $\phi(x,y,z)$ zu erfüllen, wenden wir die Methode der Bildladungen an. Neben der Punktladung q am Ort $\boldsymbol{r}_0=(d\,\cos\theta, d\sin\theta, 0)$ (mit $d>R$) benötigen wir hierzu

(a) Bildladung $q_1=-q$ bei $\boldsymbol{r}_1=(-d\,\cos\theta, +d\sin\theta, 0)$,

(b) Bildladung $q_2=-qR/d$ bei $\boldsymbol{r}_2=R^2/d^2\,\boldsymbol{r}_0=(R^2/d\,\cos\theta, R^2/d\,\sin\theta, 0)$,

(c) Bildladung $q_3=qR/d$ bei $\boldsymbol{r}_3=R^2/d^2\,\boldsymbol{r}_1=(-R^2/d\,\cos\theta, R^2/d\,\sin\theta, 0)$.

Bei letzterer Bildladung handelt es sich um eine Bildladung einer Bildladung.

Das elektrostatische Potential ergibt sich somit zu

$$\phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}-\frac{q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}-\frac{qR}{d\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2|}+\frac{qR}{d\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_3|}\right) \tag{2}$$

bzw. ausgeschrieben

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\quad\Bigg(& \frac{q}{\sqrt{(x-d\cos\theta)^2+(y-d\sin\theta)^2+z^2}}\\ & -\frac{q}{\sqrt{(x+d\cos\theta)^2+(y-d\sin\theta)^2+z^2}}\\ & -\frac{q}{d/R\,\sqrt{(x-R^2/d\cos\theta)^2+(y-R^2/d\sin\theta)^2+z^2}}\\ & +\frac{q}{d/R\,\sqrt{(x+R^2/d\cos\theta)^2+(y-R^2/d\sin\theta)^2+z^2}}\Bigg)\end{aligned} \tag{3}$$

Nun überprüfen wir die Randbedingungen. Setzt man $x=0$, so heben sich der erste und der zweite Term im elektrostatischen Potential $\phi(\boldsymbol{r})$ gegenseitig weg. Ebenso kürzen sich der dritte und der vierte Term. Somit gilt $\phi(x=0,y,z)=0$.

Ebenso kann man die Randbedingung $\phi(x,y,z)=0$ nachweisen für $x^2+y^2+z^2=R^2$. Hierbei kürzen sich der erste und der dritte Term des elektrostatischen Potentials, sowie der zweite und der vierte Term. Betrachten wir hierzu den Nenner des ersten Terms (der Einfachkeit halber ohne Wurzel) für $x^2+y^2+z^2=R^2$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}(x-d\cos\theta)^2+(y-d\sin\theta)^2+z^2 &= x^2+y^2+z^2-2xd\cos\theta-2yd\sin\theta+d^2\\ &= R^2+d^2-2xd\cos\theta-2yd\sin\theta\,.\end{aligned} \tag{4}$$

Für den dritten Term (wieder ohne Wurzel) ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{R^2}\left(\left(x-\frac{R^2}{d}\cos\theta\right)^2+\left(y-\frac{R^2}{d}\sin\theta\right)^2+z^2\right)\\
&=\frac{d^2}{R^2}\left(x^2+y^2+z^2-\frac{2xR^2}{d}\cos\theta-\frac{2yR^2}{d}\sin\theta+\frac{R^4}{d^2}\right)\\
&=d^2-2xd\cos\theta-2yd\sin\theta+R^2\,. \qquad (5)
\end{aligned}$$

wobei wir im letzen Schritt benutzt haben dass $x^2+y^2+z^2=R^2$. Damit stimmen für $x^2+y^2+z^2=R^2$ die Nenner des ersten und des dritten Terms im elektrostatischen Potential überein, und somit heben sich diese Terme weg. Ebenso zeigt man, dass sich der zweite und der vierte Term wegkürzen. Somit gilt

$$\phi(x,y,z)=0 \quad \text{für} \quad x^2+y^2+z^2=R^2\,. \qquad (6)$$

Lösung Aufgabe 29

Die Ladungsverteilung ist durch

$$\rho(\mathbf{r})=\frac{q}{2\pi}\,\delta(r-R)\,\delta\left(\vartheta-\frac{\pi}{2}\right)\,\frac{1}{r^2\sin\vartheta} \qquad (7)$$

gegeben. Für die sphärischen Multipolmomente gilt

$$q_{lm}=\frac{4\pi}{2l+1}\int d^3\mathbf{r}'\,r'^l\rho(\mathbf{r}')\;Y^*_{lm}(\vartheta',\varphi') \qquad (8)$$

Das Ausführen der Integration ergibt

$$\begin{aligned}
q_{00} &= \sqrt{4\pi}q && (9)\\
q_{10} &= q_{11}=q_{1-1}=0 && (10)\\
q_{20} &= -\sqrt{\frac{\pi}{5}}\,q\,R^2 && (11)\\
q_{21} &= q_{22}=q_{2-1}=q_{2-2}=0 && (12)
\end{aligned}$$

Für das Potential gilt bis zur Quadrupolordnung

$$\phi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{l=0}^{2}\sum_{m=-l}^{l}\frac{q_{lm}}{r^{l+1}}\,Y_{lm}(\vartheta,\varphi)+\cdots=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r}-\frac{qR^2}{4r^3}(3\cos^2\vartheta-1)\right)+\ldots\,. \qquad (13)$$

Für die Feldstärke gilt

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=-\nabla\Phi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r^2}-\frac{3}{4}\frac{qR^2}{r^4}(3\cos^2\vartheta-1)\right)\boldsymbol{e}_r-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{3}{2}\frac{qR^2}{r^4}\cos\vartheta\,\sin\vartheta\right)\boldsymbol{e}_\vartheta+\ldots \qquad (14)$$

Lösung Aufgabe 30

Es gilt

$$q_{00}=4\pi\int d^3\mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')r'^0Y^*_{00}(\vartheta',\varphi')=\frac{4\pi}{\sqrt{4\pi}}\int d^3\mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')=\sqrt{4\pi}Q \qquad (15)$$

sowie

$$
\begin{aligned}
q_{10} &= \frac{4\pi}{3}\int d^3\mathbf{r}'\,\rho(\mathbf{r}')\,r'\,Y_{10}^*(\vartheta',\varphi') && (16)\\
&= \frac{4\pi}{3}\int d^3\mathbf{r}'\,\rho(\mathbf{r}')\,r'\,\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta' && (17)\\
&= \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\int d^3\mathbf{r}'\,\rho(\mathbf{r}')\,z' && (18)\\
&= \sqrt{\frac{4\pi}{3}}p_3\,, && (19)
\end{aligned}
$$

wobei mit Q das Monopolmoment und mit p_3 die z-Komponente des kartesischen Dipolmoments bezeichnet wird. Analog gilt

$$
\begin{aligned}
q_{11} &= -\frac{4\pi}{3}\int d^3\mathbf{r}'\,\rho(\mathbf{r}')\,r'\,\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta' e^{-i\varphi'} && (20)\\
&= -\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\int d^3\mathbf{r}'\,\rho(\mathbf{r}')\,r'\,\sin\vartheta'(\cos\varphi' - i\sin\varphi') && (21)\\
&= -\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\int d^3\mathbf{r}'\,\rho(\mathbf{r}')\,(x' - iy') && (22)\\
&= -\sqrt{\frac{2\pi}{3}}(p_1 - ip_2) && (23)\\
q_{1-1} &= \sqrt{\frac{2\pi}{3}}(p_1 + ip_2). && (24)
\end{aligned}
$$

Ebenso

$$
\begin{aligned}
q_{20} &= \sqrt{\frac{\pi}{5}}Q_{33} && (25)\\
q_{21} &= -\sqrt{\frac{2\pi}{15}}(Q_{13} - iQ_{23}) && (26)\\
q_{2,-1} &= \sqrt{\frac{2\pi}{15}}(Q_{13} + iQ_{23}) && (27)\\
q_{22} &= \sqrt{\frac{\pi}{30}}(Q_{11} - Q_{22} - 2iQ_{12}) && (28)\\
q_{2,-2} &= \sqrt{\frac{\pi}{30}}(Q_{11} - Q_{22} + 2iQ_{12}) && (29)
\end{aligned}
$$

Lösung Aufgabe 31

Die Ladungsdichte des Problems ist durch

$$
\rho(\mathbf{r}) = \frac{q}{2\pi R}\delta(\varrho - R)\delta(z) \qquad \text{mit} \qquad \varrho^2 = x^2 + y^2
$$

gegeben. Zunächst berechnen wir das Potential auf der z-Achse für den Punkt $(0, 0, z)$. Dieser hat von jedem Punkt des Kreisrings den Abstand $\sqrt{z^2 + R^2}$ und somit gilt:

$$\begin{aligned}\phi(0,0,z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{r}\, \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int\limits_0^\infty d\rho'\, \rho' \int\limits_{-\infty}^\infty dz' \int\limits_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\sqrt{z^2+R^2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{z^2+R^2}}.\end{aligned}$$

Für $r \neq R$ reduziert sich das Problem auf Lösen der Laplace-Gleichung $\Delta\phi(\mathbf{r}) = 0$ und hat damit eine Lösung der Form

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \sum_{l=0}^\infty \left(a_l\, r^l\, P_l(\cos\vartheta) + \frac{b_l}{r^{l+1}}\, P_l(\cos\vartheta) \right),$$

wobei die Koeffizienten a_l und b_l für den Innenraum (d.h. $r < R$) und Außenraum (d.h. $r > R$) verschieden sein können.

Für den Innenraum soll ϕ regulär sein, d.h. $b_l = 0$. Für den Außenraum folgt aus der Regularität ebenfalls $a_l = 0$, so dass insgesamt gilt:

$$\phi(r < R) = \sum_{l=0}^\infty a_l\, r^l\, P_l(\cos\vartheta) \quad \text{und} \quad \phi(r > R) = \sum_{l=0}^\infty \frac{b_l}{r^{l+1}}\, P_l(\cos\vartheta). \tag{30}$$

Die Koeffizienten a_l und b_l kann man durch Koeffizientenvergleich mit der bekannten Lösung entlang der z-Achse gewinnen. Es gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{1+w^2}} = \sum_{k=0}^\infty \binom{-\frac{1}{2}}{k} \omega^{2k},$$

und somit für einen Punkt $(0, 0, z)$ auf der z-Achse mit $|z| < R$

$$\begin{aligned}\phi(0,0,z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{z^2+R^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{r^2+R^2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{r}{R}\right)^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \sum_{k=0}^\infty \binom{-\frac{1}{2}}{k} \left(\frac{r}{R}\right)^{2k}.\end{aligned}$$

Da auf der z-Achse $\vartheta = 0$ gilt und somit $P_l(cos\vartheta) = 1$, folgt durch Koeffizientenvergleich mit (30)

$$a_{2l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R^{2l+1}} \binom{-\frac{1}{2}}{l}, \qquad a_{2l+1} = 0,$$

d. h.

$$\phi(r < R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \sum_{l=0}^\infty \binom{-\frac{1}{2}}{l} \left(\frac{r}{R}\right)^{2l} P_{2l}(\cos\vartheta).$$

Für einen Punkt $(0, 0, z)$ auf der z-Achse mit $|z| > R$ und damit $r = |z| > R$ gilt analog

$$\phi(r > R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \sum_{l=0}^\infty \binom{-\frac{1}{2}}{l} \left(\frac{R}{r}\right)^{2l} P_{2l}(\cos\vartheta).$$