Theoretisch-Physikalisches Institut
Friedrich-Schiller Universität Jena

Elektrodynamik

Sommersemester 2018

Hausübung 6

Aufgabe 25: Methode der Greenschen Funktionen

Wir betrachten wiederum eine Metallkugel mit Radius R. Die Metallkugel wird diesmal jedoch auf dem konstanten Potential ϕ_L gehalten. Der Mittelpunkt der Metallkugel sei im Koordinatenursprung. Außerdem befindet sich im Punkt $\boldsymbol{r}$ eine Punktladung Q.

(a) Bestimmen Sie die Greenfunktion $G_D(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ zu diesem Problem!

(b) Bestimmen Sie das elektrostatische Potential außerhalb der Kugel!

(3+5 Punkte)

Aufgabe 26: Multipolmomente

(a) Man bestimme das Monopol-, Dipol- und Quadrupolmoment einer unendlich dünnen Kugelschale (Ladung $-Q$, Radius R), in deren Inneren sich eine positiv geladene Punktladung Q befindet.

(b) Bestimmen Sie das Dipol- sowie das Quadrupolmoment für ein Rotationsellipsoid mit den Halbachsen a in x-Richtung, a in y-Richtung und b in z-Richtung. Die Ladungsdichte des Ellipsoids sei konstant. Testen Sie Ihre Ergebnisse insbesondere für den Spezialfall $a = b$.

(6+6 Punkte)

Bonus – Aufgabe 27: Dirichlet-Greensfunktion

Zeigen Sie, dass die Greensfunktion des Laplace-Operators für das Dirichlet-Problems, $G_D(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ symmetrisch in den Argumenten ist, d.h.

$$G_D(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = G_D(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r})$$

Hinweis: Verwenden Sie die in der Vorlesung angegebene zweite Greensche Identität.

Lösung Aufgabe 25

Mittel der Spiegelladungsmethode motiviert lautet die Greenfunktion G_D für den Außenraum einer Kugel mit Radius R

$$G_D(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'}) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|} + \frac{1}{4\pi}\frac{R/r'}{|\boldsymbol{r}-\frac{R^2}{r'^2}\boldsymbol{r'}|}$$

wobei $r = |\boldsymbol{r}|$ und $r' = |\boldsymbol{r'}|$. Der erste Term entspricht der gewöhnlichen Greensfunktion für eine Punktladung, während der zweite Term im Außenraum der Kugel die homogene Poissongleichung, also die Laplace-Gleichung, erfüllt und addiert wurde, um die Randbedingungen zu implementieren.
Es gilt

$$G_D(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'}) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|} + \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|} = 0$$

für $|\boldsymbol{r'}| = r' = R$.

Um das Potential zu bestimmen, benötigen wir die Normalableitung von G_D auf der Kugeloberfläche, d.h.

$$\left.\frac{\partial G_D}{\partial n'}\right|_{r'=R} = -\left.\frac{\partial G_D}{\partial r'}\right|_{r'=R} = -\frac{1}{4\pi}\frac{s}{R^2}\frac{s^2-1}{(1+s^2-2s\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

wobei $s = \frac{R}{r}$ und θ den Winkel zwischen $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{r'}$ bezeichnet, d.h.

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r'}}{rr'}.$$

Mit Hilfe von

$$\phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\int_V d\boldsymbol{r'}\, G_D(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'})\,\rho(\boldsymbol{r'}) + \oint_{\partial V} d^2a'\, \frac{\partial G_D(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'})}{\partial n'}\,\phi(\boldsymbol{r'})$$

und $\phi(\boldsymbol{r'}) = \phi_L$ für $\boldsymbol{r'} \in \partial V$ gilt

$$\oint_{\partial V} d^2a'\, \frac{\partial G_D(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'})}{\partial n'}\,\phi(\boldsymbol{r'}) = \phi_L \cdot 2\pi R^2 \oint d\theta \sin\theta \left.\frac{\partial G_D}{\partial r'}\right|_{r'=R} = \phi_L\frac{R}{r}$$

und somit

$$\phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\int_V d^3\boldsymbol{r'}\, G_D(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'})\,\rho(\boldsymbol{r'}) + \phi_L\frac{R}{r}.$$

Das Potential wird erzeugt von der Ladungsdichte $\rho(\boldsymbol{r})$, der dazugehörigen Spiegelladungsdichte innerhalb der Kugel (diese Beiträge sind in $G_D(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'})$ codiert) sowie einer Punktladung $\phi_L R$ im Ursprung. Letztere erzeugt das konstante Potential auf der Kugeloberfläche.

Den ersten Term kann man durch die in Aufgabe 23(a) erarbeitete Lösung ersetzen. Somit erhalten wir

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \phi_L\frac{R}{r} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2-2a\,r\,\cos\theta}} - \frac{R}{a}\frac{1}{\sqrt{r^2+a'^2-2a'r\,\cos\theta}}\right] \tag{1}$$

wobei θ der Winkel zwischen $\boldsymbol{a}$ (dem Ort an dem sich die Ladung Q befindet) und $\boldsymbol{r}$ ist.

Lösung Aufgabe 26

(a) Wir betrachten eine unendlich dünne homogen geladene Kugelschale mit Ladung $-Q$ und Radius R, in deren Innern sich eine Punktladung Q am Ort $\boldsymbol{r}_0$ befindet. Die Ladungsdichte dieser Konfiguration ist

$$\rho(\boldsymbol{r}) = -\frac{Q}{4\pi R^2}\,\delta(r-R) + Q\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0), \tag{2}$$

wobei $r = |\boldsymbol{r}|$. Bestimmen wir zunächst das Monopolmoment. Dieses entspricht der Gesamtladung,

$$\int d^3\boldsymbol{r}\,\rho(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{3}$$

und somit verschwindet das Monopolmoment. Das Dipolmoment ist durch

$$\boldsymbol{p} = \int d^3\boldsymbol{r}\,\rho(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r} \tag{4}$$

gegeben. Das Dipolmoment ist additiv. Daher können wir zunächst das Dipolmoment der unendlich dünnen Kugelschale berechnen, welches verschwindet da

$$\int d^3\boldsymbol{r}\,\delta(r-R)\boldsymbol{r} = \int dr r^3\delta(r-R)\int_0^\pi d\theta\,\sin\theta\int_0^{2\pi} d\varphi \begin{pmatrix}\cos\varphi\,\sin\theta\\ \sin\varphi\,\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix} = 0\,.$$

Somit ist das Dipolmoment der Ladungskonfiguration einzig durch die im Innern der Kugelschale befindliche Punktladung gegeben. Es gilt also

$$\boldsymbol{p} = Q\int d^3\boldsymbol{r}\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = Q\boldsymbol{r}_0\,. \tag{5}$$

Insbesondere verschwindet das Dipolmoment, wenn sich die Punktladung genau im Mittelpunkt der Kugelschale, der im Koordinatenursprung liegt, befindet.

Für das Quadrupolmoment gilt

$$Q_{ij} = \int d^3\boldsymbol{r}\,(x_i x_j - \frac{1}{3}\,r^2\delta_{ij})\rho(\boldsymbol{r})\,. \tag{6}$$

Der Quadrupoltensor ist ebenso additiv. Wir betrachten zuerst das Quadrupolmoment für die unendlich dünne Kugelschale, welches wir mit $Q^{(1)}$ bezeichnen. Für die Komponente $Q^{(1)}_{33}$ finden wir

$$\begin{aligned}
Q^{(1)}_{33} &= -\frac{Q}{12\,\pi R^2}\int d^3\boldsymbol{r}\delta(r-R)(2z^2-x^2-y^2)\\
&= -\frac{Q}{12\,\pi R^2}\int dr\,r^4\delta(r-R)\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^\pi d\theta\sin\theta(2\cos^2\theta-\sin^2\theta)\\
&= -\frac{Q}{12\,\pi R^2}\int dr\,r^4\delta(r-R)\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^\pi d\theta(3\cos^2\theta\,\sin\theta-\sin\theta)\\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Für die Komponente $Q_{22}^{(1)}$ erhält man analog

$$
\begin{aligned}
Q_{22}^{(1)} &= -\frac{Q\,R^2}{12\,\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta\,\sin\theta\,\left((2\sin^2\varphi-\cos^2\varphi)\sin^2\theta-\cos^2\theta\right)\\
&= -\frac{Q\,R^2}{12\,\pi}\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\,((3\sin^2\varphi-1)\sin^3\theta-\sin\theta\,\cos^2\theta)\\
&= 0,
\end{aligned}
$$

wobei wir bereits die triviale r-Integration ausgeführt haben. Ebenso kann man $Q_{11}^{(1)}$ berechnen. Aus den bereits gewonnenen Resultaten kann man jedoch $Q_{11}^{(1)}$ direkt ablesen, indem man die Spurfreiheit dies Quadrupolmoments verwendet, d.h.

$$
Q_{11}^{(1)}+Q_{22}^{(1)}+Q_{33}^{(1)}=0\,. \tag{7}
$$

Somit erhält man

$$
Q_{11}^{(1)}=0\,.
$$

Man sieht weiterhin leicht, dass alle Nichtdiagonalelemente von $Q_{ij}^{(1)}$ ebenfalls verschwinden, so dass insgesamt

$$
Q_{ij}^{(1)}\equiv 0, \qquad \forall\, i,j. \tag{8}
$$

Das war auch aufgrund der Symmetrie nicht anders zu erwarten. Das Quadrupolmoment der Konfiguration wird also wieder nur durch das Quadrupolmoment der Punktladung bestimmt, d.h.

$$
Q_{ij}=Q\int d^3\boldsymbol{r}'\left(r_i'r_j'-\frac{1}{3}r'^2\delta_{ij}\right)\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=Q\left(r_{0\,i}'r_{0\,j}'-\frac{1}{3}r_0'^2\,\delta_{ij}\right)\,. \tag{9}
$$

Insbesondere verschwindet das Quadrupolmoment wieder, wenn die Ladung genau im Koordinatenursprung liegt.

(b) Für Punkte $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ des Rotationsellipsoid mit Halbachsen a,a und b gilt

$$
\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}\le 1.
$$

In Zylinderkoordinaten

$$
\begin{aligned}
x &= \varrho\cos\varphi\\
y &= \varrho\sin\varphi\\
z &= z.
\end{aligned}
$$

mit $\varrho^2=x^2+y^2$ kann man den Rotationsellipsoiden durch

$$
\varrho\le a\sqrt{1-\frac{z^2}{b^2}}
$$

beschreiben, wobei $-b\le z\le b$. Das Monopolmoment lautet

$$
Q=\int_{-b}^{+b} dz \int_0^{a\sqrt{1-\frac{z^2}{b^2}}} d\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi\;\varrho\,\rho_0=\frac{4}{3}\pi\,a^2\,b\,\rho_0\,,
$$

wobei ρ_0 die konstante Ladungsdichte bezeichnet. Die x-Komponente des Dipolmoments ist durch

$$p_x = \rho_0 \int\limits_{-b}^{+b} dz \int\limits_0^{a\sqrt{1-\frac{z^2}{b^2}}} d\varrho \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \; x \cdot \varrho$$

Mit $x = \varrho \cos\varphi$ und durch Ausführen der φ-Integration über $\varphi \in [0, 2\pi[$, sieht man sofort, dass p_x verschwindet. Für das Dipolmoment p_y erhält man analog

$$p_y = \rho_0 \int\limits_{-b}^{+b} dz \int\limits_0^{a\sqrt{1-\frac{z^2}{b^2}}} d\varrho \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \, y \cdot \varrho = 0\,.$$

Das Dipolmoment p_z verschwindet ebenfalls, da man die ungerade Funktion z über das symmetrische Intervall $[-b, b]$ integrieren muss:

$$p_z = \rho_0 \int\limits_{-b}^{+b} dz \int\limits_0^{a\sqrt{1-\frac{z^2}{b^2}}} d\varrho \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \, z \cdot \varrho = 0$$

Für die Quadrupolmomente gilt

$$Q_{ij} = \int d^3\boldsymbol{r}' \, \rho(\boldsymbol{r}') \left(r_i' r_j' - \frac{1}{3} r'^2 \, \delta_{ij} \right)$$

Die fünf unabhängigen Quadrupolmomente (Q_{ij} ist symmetrisch und spurlos) ergeben sich zu

$$Q_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{Q}{15}(a^2 - b^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Q}{15}(a^2 - b^2) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2Q}{15}(a^2 - b^2) \end{pmatrix}$$

Dies weist man durch explizite Integration nach. Insbesondere verschwindet das Quadrupolmoment für den Spezialfall $a = b$, also für eine homogen geladene Vollkugel. Das Potential einer homogen geladenen Vollkugel fällt für große r wie Q/r ab, wobei Q die Gesamtladung ist. Dies wurde explizit in einer der früheren Hausübungen explizit berechnet. Somit verschwinden für eine homogen geladene Vollkugel das Dipol- und Quadrupolmoment, in Übereinstimmung mit dem obigen Ergebnis.

Alternativ kann man auch die Multipolmomente berechnen, indem man das Rotationsellipsoid durch Koordinatentransforamtion $x' = x/a, y' = y/a$ und $z' = z/b$ auf die Einheitskugel zurückführt.

Lösung Aufgabe 27

Der zweite Greensche Satz lautet (siehe Vorlesung)

$$\int\limits_V d^3\mathbf{r} \, (\Phi(\mathbf{r}) \, \Delta\Psi(\mathbf{r}) - \Psi(\mathbf{r}) \, \Delta\Phi(\mathbf{r})) = \int\limits_{\partial V} d^2\mathbf{a} \, (\Phi(\mathbf{r}) \, \nabla\Psi(\mathbf{r}) - \Psi(\mathbf{r}) \, \nabla\Phi(\mathbf{r}))\,.$$

Setzt man $\Phi(\mathbf{r}) = G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)$ und $\Psi(\mathbf{r}) = G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$, wobei $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$ bzw. $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)$ die folgenden Eigenschaften haben

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) = 0 \qquad \text{falls } \mathbf{r} \in \partial V$$

$$\Delta G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \qquad \text{und} \qquad \Delta G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2),$$

so gilt

$$\int_V d^3\mathbf{r} \left(G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) \Delta G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) - G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \Delta G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) \right) = 0$$

bzw.

$$G_D(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - G_D(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) = 0 \tag{10}$$

d.h. G_D ist symmetrisch in den Argumenten $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$.