Theoretisch-Physikalisches Institut
Friedrich-Schiller Universität Jena

Elektrodynamik

Sommersemester 2018

Hausübung 5

Aufgabe 22: Bildladungsmethode

Eine Punktladung q befindet sich zwischen zwei geerdeten leitenden Metallplatten, die sich unter dem Winkel $\alpha = 90°$ schneiden. Bestimmen Sie das elektrostatische Potential sowie das elektrische Feld.

(5 Punkte)

Bonus: Skizzieren Sie wie Sie Ihre Resultate auf Winkel der Form $\alpha = 180°/n$ mit $n \in \mathbb{N}$ verallgemeinern können.

Aufgabe 23: Bildladung / Flächenladungsdichte

Wir betrachten im Folgenden eine geerdete Metallkugel mit Radius R. Der Mittelpunkt der Metallkugel sei im Koordinatenursprung. Außerdem befindet sich im Abstand $a > R$ vom Mittelpunkt der Kugel entfernt eine Punktladung Q.

(a) Berechnen Sie das elektrostatische Potential mit Hilfe der Methode der Bildladung.

(b) Bestimmen Sie die Flächenladungsdichte auf der Oberfläche der Metallkugel!

(5+3 Punkte)

Aufgabe 24: Leitende Kugel in homogenen elektrischen Feld

Wir betrachten ein homogenes elektrisches Feld in x-Richtung mit konstanter Feldstärke $\boldsymbol{E}_0 = E_0 \boldsymbol{e}_x$. In diesem Feld platzieren wir nun eine leitende, geerdete Kugel vom Radius R, deren Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt.

(a) Zeigen Sie, dass Sie das homogene elektrische Feld durch zwei Punktladungen (Ladung $-q$ am Ort $\boldsymbol{r} = r_0\, \boldsymbol{e}_x$ sowie Ladung q am Ort $\boldsymbol{r} = -r_0\, \boldsymbol{e}_x$) erhalten, sofern Sie den Limes $r_0 \to \infty$ betrachten und q geeignet skalieren. Wie hängen E_0, r_0 und q zusammen?

(b) Konstruieren Sie nun das elektrostatische Potential, wenn Sie nun auch die leitende, geerdete Kugel berücksichtigen. Hinweis: Betrachten Sie zuerst die Konfiguration von Aufgabe (a) mit endlichem r_0, und implementieren Sie die Randbedingungen für die Kugel beispielsweise mittels Spiegelladungen. Nehmen Sie dann erst den Limes $r_0 \to \infty$ vor. Zeigen Sie, dass das elektrostatische Potential in diesem Limes einen Dipolterm enthält. Berechnen Sie das elektrische Feld.

(3+4 Punkte)

Lösung Aufgabe 22

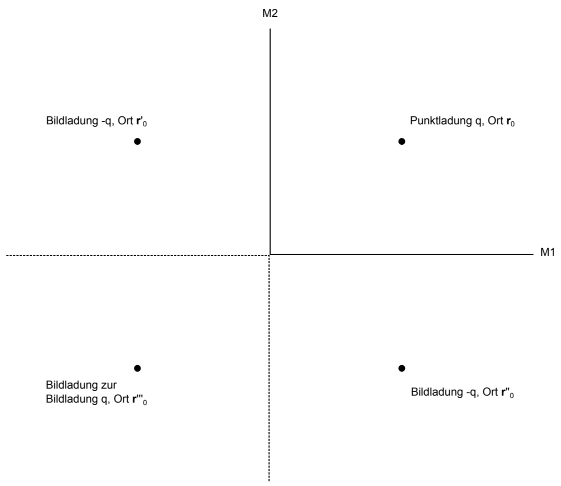
Wir betrachten zwei geerdete leitende Metallplatten im Winkel von 90 Grad. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien die Metallplatten durch

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x \geqslant 0, y = 0, z \in \mathbb{R}\right\}, \\
M_2 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = 0, y \geqslant 0, z \in \mathbb{R}\right\}
\end{aligned}
$$

beschrieben, d.h. in der $xy-$Ebene.

Für die Aufgabe ist es hilfreich, die Beschränkung $x \geqslant 0$ für M_1 bzw. $y \geqslant 0$ für M_2 aufzuheben und M_1 auch für $x \leqslant 0$ bzw. M_2 für $y \leqslant 0$ zu definieren.

Nun werden drei Bildladungen in die Ebene gelegt:



Es gilt ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$
\boldsymbol{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix},
$$

sowie

$$
\boldsymbol{r}_0' = \begin{pmatrix} -x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{r}_0'' = \begin{pmatrix} x_0 \\ -y_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{r}_0''' = \begin{pmatrix} -x_0 \\ -y_0 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

Daher gilt für das Potential mit $\boldsymbol{r} = (x,y,z)$

$$
\begin{aligned}
\phi(x,y,z) =& \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2}} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2 + z^2}} \\
&+ \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x+x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2}} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x+x_0)^2 + (y+y_0)^2 + z^2}}.
\end{aligned}
$$

Dieses Potential erfüllt

$$
\phi(x=0,y,z) = 0 \;\text{ und }\; \phi(x,y=0,z) = 0,
$$

d. h. die richtigen Randbedingungen. Dazu war es nötig Bildladungen zu Bildladungen zu betrachten.

Für das elektrische Feld erhalten wir

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\,\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q\,(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3} - \frac{q\,(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0'|^3} - \frac{q\,(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0'')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0''|^3} + \frac{q\,(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0''')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0'''|^3}\right).$$

Bonus: Zur Verallgemeinerung auf Winkel von $180°/n$ mit $n \in \mathbb{N}$ d.h. auf $\varphi = \pi/n$ beachte, dass man die Prozedur Bildladungen von Bildladungen zu betrachten solange fortsetzen muss, bis man wieder die Original-Ladung erhält. Die Metallplatten sind wieder in der $(x, y)-$Ebene angeordnet. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit beschreiben wir eine der Metalplatten durch $M_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 0, y,\, z \in \mathbb{R}\}$. Wir betrachten die Drehmatrix

$$D(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aus $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, 0)$ und $\boldsymbol{s}_0 = (-x_0, y_0, 0)$ kann man alle anderen Bildladungen mit $\boldsymbol{r}_0^{(i)}$ und $\boldsymbol{s}_0^{(i)}$ erzeugen aus $\boldsymbol{r}_0^{(i)} = D^{2i}\,\boldsymbol{r}_0$ und $\boldsymbol{s}_0^{(i)} = D^{2i}\,\boldsymbol{s}_0$. Insbesondere gilt $D^{2n} = \mathbb{1}$, d.h. $\boldsymbol{r}_0^{(0)} = \boldsymbol{r}_0^{(n)} = \boldsymbol{r}_0$.

Somit ergibt sich

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0^{(i)}|} - \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}_0^{(i)}|}\right) \tag{1}$$

und somit

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0^{(i)}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0^{(i)}|^3} - \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}_0^{(i)}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}_0^{(i)}|^3}\right). \tag{2}$$

Lösung Aufgabe 23

Gesucht ist die Flächenladungsdichte einer geerdeten Metallkugel, die sich im Feld einer Punktladung Q befindet. Auf der Kugeloberfläche verschwindet das Potential, da die Metallkugel geerdet ist. Wir suchen also die Lösung des Potentialproblems

$$\Delta\phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{Q}{\epsilon_0}\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}), \qquad \text{für } |\boldsymbol{r}| > R \tag{3}$$

$$\phi(\boldsymbol{r}) = 0 \qquad \text{für } |\boldsymbol{r}| = R\,. \tag{4}$$

Es bietet sich hier an, zur Berechnung des Potentials die Spiegelladungsmethode zu verwenden. Das Prinzip hierbei ist folgendes: Das Potential einer Punktladung

$$\phi_1(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}|}$$

ist sicher eine Lösung von (3), erfüllt aber die Randbedingungen nicht. Addieren wir nun eine im Außenraum harmonische Funktion ϕ_2 hinzu, so ist $\phi = \phi_1 + \phi_2$ auch eine Lösung der Laplacegleichung. Durch geeignete Wahl von ϕ_2 werden die Randbedingungen erfüllt.

In unserem Fall ist es besonders einfach: wir setzen einfach eine Spiegelladung Q' ins Innere der Kugel, so dass

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}|} + \frac{Q'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}'|}\right]. \tag{5}$$

Dabei ist aufgrund von Symmetrieüberlegungen $\boldsymbol{a'} = c\,\boldsymbol{a}$. Um die Randbedingung zu lösen ist es sinnvoll $\boldsymbol{a}$ entlang der z-Achse zu legen, d.h. $\boldsymbol{a} = a\,\boldsymbol{e}_z$ mit $a > R > 0$. Damit liegt auch $\boldsymbol{a'}$ auf der z-Achse wobei $a' < R$ gilt.

Auf dem Rand der Kugel soll das Potential verschwinden. Insbesondere muss das für die Punkte $\boldsymbol{r} = (0, 0, R)$ und $\boldsymbol{r} = (0, 0, -R)$ gelten. Somit erhält man für den Punkt $\boldsymbol{r} = (0, 0, R)$

$$\frac{Q}{a - R} + \frac{Q'}{R - a'} = 0\,, \tag{6}$$

d.h.

$$\frac{Q'}{Q} = -\frac{R - a'}{a - R}\,. \tag{7}$$

Für den Punkt $\boldsymbol{r} = (0, 0, -R)$ gilt

$$\frac{Q}{R + a} + \frac{Q'}{R + a'} = 0\,, \tag{8}$$

und somit unter Verwendung von (7)

$$(R + a)(R - a') = (R + a')(a - R) \tag{9}$$

und somit

$$a' = \frac{R^2}{a}. \tag{10}$$

Damit folgt für die Spiegelladung (7)

$$Q' = -\frac{R}{a}\,Q. \tag{11}$$

Das Potential der geerdeten Metallkugel ist im Außenraum durch

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}|} - \frac{R}{a}\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a'}|}\right] && (12) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2a\,r\,\cos\theta}} - \frac{R}{a}\frac{1}{\sqrt{r^2 + a'^2 - 2a'r\,\cos\theta}}\right] && (13) \end{aligned}$$

gegeben, wobei θ der Winkel zwischen $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{r}$ ist.

Die Flächenladungsdichte σ ist (bis auf eine multiplikative Konstante) gerade die Normalenableitung des Potentials auf dem Rand der Kugel, also

$$\sigma = -\epsilon_0\,\frac{\partial\phi}{\partial r}\Big|_{r=R}. \tag{14}$$

Die Normalenableitung von ϕ ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial r}\Big|_{r=R} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{R}{a}\frac{r - a'\cos\theta}{[r^2 + a'^2 - 2a'r\,\cos\theta]^{3/2}} - \frac{r - a\,\cos\theta}{[r^2 + a^2 - 2a\,r\,\cos\theta]^{3/2}}\right]_{r=R} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{R}{a}\frac{R - (R^2/a)\cos\theta}{[R^2 + (R^4/a^2) - 2(R^3/a)\cos\theta]^{3/2}} - \frac{R - a\,\cos\theta}{[R^2 + a^2 - 2aR\,\cos\theta]^{3/2}}\right] \end{aligned} \tag{15}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} \frac{R}{a}\frac{R - (R^2/a)\cos\theta}{[R^2 + (R^4/a^2) - 2(R^3/a)\cos\theta]^{3/2}} &= \frac{R^2}{a^2}\frac{a - R\,\cos\theta}{R^3[1 + (R^2/a^2) - (2R/a)\cos\theta]^{3/2}} \\ &= \frac{a}{R}\frac{a - R\,\cos\theta}{[R^2 + a^2 - 2aR\,\cos\theta]^{3/2}}. \end{aligned}$$

Setzen wir das oben ein, so erhalten wir schließlich für die Normalenableitung

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial r}\right|_{r=R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{[R^2 + a^2 - 2aR\,\cos\theta]^{3/2}} \frac{a^2 - R^2}{R}, \tag{16}$$

und damit die Oberflächenladung

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi[R^2 + a^2 - 2aR\,\cos\theta]^{3/2}} \frac{R^2 - a^2}{R}. \tag{17}$$

Wie nicht anders zu erwarten hängt die Flächenladungsdichte σ vom Abstand a der Punktladung Q ab. Insbesondere ist $\sigma = 0$ falls $a = R$, d.h., falls sich die Punktladung direkt auf der Kugel befindet.

Lösung Aufgabe 24

(a) Das Potential zweier Punktladungen q am Ort $\boldsymbol{r} = -r_0 \boldsymbol{e}_x$ und $-q$ am Ort $\boldsymbol{r} = r_0 \boldsymbol{e}_x$ lautet

$$\begin{aligned}
\phi(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\boldsymbol{r} + r_0 \boldsymbol{e}_x|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q}{|\boldsymbol{r} - r_0 \boldsymbol{e}_x|} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{(x + r_0)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{(x - r_0)^2 + y^2 + z^2}} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_0} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + 2x/r_0 + (x^2 + y^2 + z^2)/r_0^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - 2x/r_0 + (x^2 + y^2 + z^2)/r_0^2}} \right) \\
&\approx -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{x}{r_0^2} + \mathcal{O}\left(r_0^{-4}\right) \qquad \text{für} \quad r_0 \to \infty
\end{aligned}$$

und somit für das elektrische Feld

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\, r_0^2} \boldsymbol{e}_x$$

Ein konstantes elektrisches Feld $\boldsymbol{E} = E_0\, \boldsymbol{e}_x$ kann damit durch zwei Punktladungen beschrieben werden im Limes $r_0 \to \infty$ und $E_0 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r_0^2}$. Insbesondere müssen im Limes $r_0 \to \infty$ auch die Ladungen q und $-q$ entsprechend skaliert werden, so dass q/r_0^2 konstant ist.

(b) Nun berücksichtigen wir die Kugel. Für endliches r_0 können die Randbedingungen durch Bildladungen erfüllt werden. Die Bildladung zur Ladung $-q$ am Ort $\boldsymbol{r} = r_0\, \boldsymbol{e}_x$ ist durch $q' = \frac{R}{r_0} q$ am Ort $\boldsymbol{r}_1 = \frac{R^2}{r_0} \boldsymbol{e}_x$ gegeben. Für die Ladung q am Ort $\boldsymbol{r} = -r_0\, \boldsymbol{e}_x$ erhält man als Bildladung $-q'$ am Ort $-\boldsymbol{r}_1$. Somit ist das Potential der Bildladungen gegeben durch

$$\begin{aligned}
\phi_{\mathrm{BL}}(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{|\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}_1|} \qquad (18) \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{r_0} q \left(\frac{1}{\sqrt{(x - R^2/r_0)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x + R^2/r_0)^2 + y^2 + z^2}} \right) \\
&\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{r_0} \frac{q}{r} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 2xR^2/(r^2 r_0)}} - \frac{1}{\sqrt{1 + 2xR^2/(r^2 r_0)}} \right) \\
&\approx \frac{q\, R^3}{2\pi\epsilon_0\, r_0^2} \frac{x}{r^3} = \frac{x}{r^3} R^3\, E_0\,,
\end{aligned}$$

wobei wir den Limes $r_0 \to \infty$ durchgeführt haben. Definiert man das Dipolmoment $\boldsymbol{p} = R^3\, E_0\, \boldsymbol{e}_x$ so erhält man

$$\phi_{\mathrm{BL}}(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r}}{r^3}$$

Die Bildladung entspricht also einem elektrischen Dipol mit Dipolmoment $\boldsymbol{p}$.

Addiert man nun das homogene elektrostatische Potential aus Aufgabe (a) zum Spiegeldipol so erhält man

$$\phi_{\mathrm{tot}}(\boldsymbol{r}) = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0}\frac{x}{r_0^2} + \frac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r}}{r^3} = E_0 \left(\frac{R^3}{r^3} - 1\right) x\,. \tag{19}$$

Das elektrische Feld erhält man durch Bildung des Gradienten

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\phi_{\mathrm{tot}}(\boldsymbol{r}) = E_0\, \boldsymbol{e}_x + \frac{3(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r})\, \boldsymbol{r} - r^2\, \boldsymbol{p}}{r^5}\,. \tag{20}$$