Theoretisch-Physikalisches Institut
Friedrich-Schiller Universität Jena

Elektrodynamik

Sommersemester 2018

Hausübung 4

Aufgabe 19: Nicht lokalisierte Ladungsverteilungen

Bisher haben wir immer nur lokalisierte Ladungsverteilungen betrachtet. In dieser Aufgabe berechnen wir nun das Potential und das elektrische Feld für nicht lokalisierte Ladungsverteilungen.

(a) Gegeben sei ein unendlich langer Stab mit Radius R und homogener Ladungsdichte ρ_0, der in z-Richtung ausgerichtet sei. Bestimmen und skizzieren Sie das Potential und das elektrische Feld des Stabs.

(b) Bestimmen Sie das Potential und das elektrische Feld einer homogen geladenen unendlich großen und unendlich dünnen Platte, die durch $z = 0$ beschrieben wird.

(4+2 Punkte)

Aufgabe 20: Oberflächenladungsdichte

Berechnen Sie das Potential und das elektrische Feld für eine unendlich dünne Kugelschale (Ladung $-Q$, Radius R, Mittelpunkt im Koordinatenursprung), in deren Inneren sich eine positiv geladene Punktladung Q am Ort $\boldsymbol{r}_0$ (mit $|\boldsymbol{r}_0| < R$) befindet.

(3 Punkte)

Aufgabe 21: Potential eines dünnen Stabes

Benutzen Sie im Folgenden die Beziehung

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\boldsymbol{r}' \, \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$$

zwischen der Ladungsdichte $\rho(\boldsymbol{r})$ und dem skalaren Potential $\phi(\boldsymbol{r})$.

(a) Bestimmen Sie das elektrostatische Potential eines homogen geladenen unendlich dünnen Stabes der Länge $2a$.

Hinweis: Legen Sie den Stab entlang der z-Achse mit Endpunkten $z = -a$ und $z = a$. Des Weiteren führen Sie Zylinderkoordinaten (z, ϱ, ϕ) ein mit $\varrho^2 = x^2 + y^2$ und drücken Sie das Potential durch die Abstände $r_\pm$ von den Endpunkten des Stabes aus, d.h. $r_\pm = \sqrt{\varrho^2 + (z \mp a)^2}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Äquipotentiallinien Rotationsellipsoide um die z-Achse sind.

(c) Berechnen Sie das elektrische Feld. An welchen Stellen ist das elektrische Feld singulär?

(4+3+4 Punkte)

Lösung Aufgabe 19

(a) Aufgrund der vorliegenden Zylindersymmetrie ist auch das skalare Potential ϕ nur von $\varrho = \sqrt{x^2+y^2}$ abhängig, und somit besitzt das elektrische Feld nur eine Komponente in $\boldsymbol{e}_\varrho$ Richtung, d.h. $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E_\varrho(\varrho)\,\boldsymbol{e}_\varrho$.

Zur Berechnung des elektrischen Felds werden die integralen Maxwell-Gleichungen verwendet. Hierzu bietet es sich an, als Volumen einen Zylinder entlang der z-Achse zu wählen. Der Zylinder sei o.B.d.A durch $z=0$ und $z=h$ sowie durch $x^2+y^2 \le \varrho_0^2$, d.h. $\varrho \le \varrho_0$, begrenzt.

Somit ergibt sich für die eingeschlossene Ladung Q_{Zylinder}

$$Q_{\text{Zylinder}} = \int\limits_{\text{Zylinder}} d^3\boldsymbol{r}'\,\rho(\boldsymbol{r}') = \begin{cases} \rho_0\,\pi\,\varrho_0^2\,h & \text{für } \varrho_0 \le R \\ \rho_0\,\pi\,R^2\,h & \text{für } \varrho_0 > R \end{cases} \tag{1}$$

Andererseits gilt

$$\int\limits_{\partial\text{Zylinder}} d^2\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 2\pi\,\varrho_0\,h\,E_\varrho(\varrho_0)\,. \tag{2}$$

Mittels der integralen Maxwell Gleichung

$$\frac{1}{\epsilon_0}\,Q_{\text{Zylinder}} = \int\limits_{\partial\text{Zylinder}} d^2\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \tag{3}$$

folgt somit für das elektrische Feld $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E_\varrho(\varrho)\,\boldsymbol{e}_\varrho$

$$E_\varrho(\varrho) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{2\epsilon_0}\,\varrho & \text{für } \varrho \le R \\ \frac{\rho_0 R^2}{2\epsilon_0}\,\frac{1}{\varrho} & \text{für } \varrho > R \end{cases} \tag{4}$$

Da keine Oberflächenladungsdichte vorliegt, ist das elektrische Feld stetig!

Für das skalare Potential gilt

$$\phi(\varrho) = \begin{cases} -\frac{\rho_0}{4\epsilon_0}\,\varrho^2 + C & \text{für } \varrho \le R \\ -\frac{\rho_0 R^2}{2\epsilon_0}\,\log\varrho + D & \text{für } \varrho > R \end{cases} \tag{5}$$

Hierzu beachte $E_\varrho(\varrho) = -\frac{\partial\phi(\varrho)}{\partial\varrho}$. Die Konstanten C und D müssen so gewählt sein, dass das Potential bei $\varrho = R$ stetig ist.

Man beachte, dass wir in diesem Fall das Potential bei Unendlich, d.h. für $\varrho \to \infty$ nicht auf Null setzen können, da das Potential logarithmisch divergiert (dies ist kein Widerspruch zur Vorlesung, da wir hier eine nicht-lokalisierte Ladungsverteilung vorliegen haben). Eine alternativ Wahl des Nullpunkts des Potentials ist durch $\phi(\varrho = R) = 0$ gegeben (Alternativ: $\phi(\varrho = 0) = 0$).

(b) Um das elektrische Feld einer homogen geladenen unendlich großen (aber unendlich dünnen) Platte, die durch $z = 0$ charakterisiert wird, zu berechnen, stellt man sich zuerst eine Probeladung q, und die darauf wirkenden Kraft vor. Die Platte habe die Oberflächenladungsdichte σ. Wir nehmen an, dass $q > 0$ und $\sigma > 0$ gibt. Auf die Probeladung wirkt also eine abstoßende Kraft. Dies rechtfertigt den folgenden Ansatz für das elektrische Feld

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} E_0(z)\,\boldsymbol{e}_z & \text{für } z > 0 \\ -E_0(z)\,\boldsymbol{e}_z & \text{für } z < 0 \end{cases}\,. \tag{6}$$

Insbesondere hängt das elektrische Feld nicht von x und y ab aufgrund der vorliegenden Translationsinvarianz.

Um $E_0(z)$ zu bestimmen, verwendet man den Satz von Gauß. Hierzu legt man entlang der z-Achse einen Vollzylinder, der durch $z = -z_0$ und $z = z_0$ begrenzt ist und in der (x,y)-Ebene einen Kreis mit Radius R beschreibt. Es gilt einerseits

$$\int\limits_{\text{Zylinder}} d^3\boldsymbol{r}'\rho(\boldsymbol{r}') = Q_{\text{Zylinder}} = \sigma\pi R^2 \tag{7}$$

wobei Q_{Zylinder} die durch den Zylinder eingeschlossene Ladung ist.

Andererseits gilt aufgrund der integralen Maxwell-Gleichungen

$$\frac{1}{\epsilon_0}\int\limits_{\text{Zylinder}} d^3\boldsymbol{r}'\rho(\boldsymbol{r}') = \int\limits_{\partial\text{Zylinder}} d^2\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 2E_0(z_0)\pi R^2 \tag{8}$$

wobei im letzten Schritt nur der Deckel und der Boden des Zylinders beigetragen haben, da der Normalenvektor des Zylindermantels senkrecht auf $\boldsymbol{e}_z$ steht. Man beachte auch, dass der Deckel (für $z = z_0$) und der Boden (für $z = -z_0$) beide den gleichen Beitrag zum Integral ergeben, da die Normalenvektoren in entgegengesetzte Richtungen zeigen.

Somit gilt $E_0(z) = \sigma/(2\epsilon_0)$ und daher

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{z}{|z|}\,\boldsymbol{e}_z\,. \tag{9}$$

Für das Potential gilt

$$\phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{z^2}{|z|}\,\boldsymbol{e}_z\,. \tag{10}$$

Man beachte, dass das Potential im Unendlichen unendlich groß wird (dies liegt wiederum daran, dass die Ladungsverteilung nicht lokalisiert ist).

Lösung Aufgabe 20

Aufgrund des Superpositionsprinzips können wir zuerst separat das Potential bzw. das elektrische Feld für die Punktladung und für die unendlich dünne Kugelschale berechnen, und danach die jeweils erhaltenen Resultate addieren.

Für die Punktladung erhalten wir für das Potential

$$\phi_{\text{Pktl}}(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} \tag{11}$$

bzw. für das elektrische Feld

$$\boldsymbol{E}_{\text{Pktl}}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\phi_{\text{Pktl}}(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}\,. \tag{12}$$

Für das skalare Potential der unendlich dünnen Kugelschale gilt:

$$\phi_{\text{Kugels}}(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} & \text{für } |\boldsymbol{r}| > R \\ -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R} & \text{für } |\boldsymbol{r}| \le R \end{cases}\,. \tag{13}$$

Um die erste Zeile zu erhalten, argumentiert man mit der vorhandenen Kugelsymmetrie des Problems, und dass das Potential (bzw. auch das elektrische Feld) außerhalb der lokalisierten, kugelsymmetrischen Ladungsverteilung wie eine Punktladung Q aussieht. Die zweite Zeile des Potentials folgt aus der Stetigkeit bei $|\boldsymbol{r}| = R$. Für das elektrische Feld $\boldsymbol{E}_{\text{Kugels}}(\boldsymbol{r}) = E_r(r)\,\boldsymbol{e}_r$ folgt

$$E_r(r) = \begin{cases} -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2} & \text{für } |\boldsymbol{r}| > R \\ 0 & \text{für } |\boldsymbol{r}| \leq R \end{cases} . \tag{14}$$

Die Lösung der Aufgabe ist somit gegeben durch

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \phi_{\text{Kugels}}(\boldsymbol{r}) + \phi_{\text{Pktl}}(\boldsymbol{r}) \tag{15}$$

bzw.

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_{\text{Kugels}}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_{\text{Pktl}}(\boldsymbol{r}) \,. \tag{16}$$

Lösung Aufgabe 21

(a) Wie in der Aufgabenstellung beschrieben legen wir den Stab auf die z–Achse. Die Ladungsdichte eines solchen unendlich dünnen, homogen geladenen Stabes kann mit Hilfe der δ–Funktion ausgedrückt werden als

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \delta(x)\delta(y)\rho(z), \qquad \rho(z) = \begin{cases} q & -a \leq z \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{17}$$

Hierbei ist q eine konstante Ladungsdichte. Für das elektrostatische Potential ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \phi(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3\boldsymbol{r'}\,\frac{\rho(\boldsymbol{r'})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{-a}^{a} dz' \int dx'\,dy'\,\frac{\delta(x')\delta(y')}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{-a}^{a} dz'\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\ln\left[\frac{\sqrt{\varrho^2+(z-a)^2}-z+a}{\sqrt{\varrho^2+(z+a)^2}-z-a}\right], \end{aligned} \tag{18}$$

wobei $\varrho^2 = x^2 + y^2$ ist. Alternativ kann man für das Integral auch den Wert

$$\phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\ln\left[\frac{\sqrt{\varrho^2+(z-a)^2}+z-a}{\sqrt{\varrho^2+(z+a)^2}+z+a}\right] \tag{19}$$

erhalten. Diese beiden Resultate sind äquivalent, da

$$\frac{\sqrt{\varrho^2+(z-a)^2}+z-a}{\sqrt{\varrho^2+(z+a)^2}+z+a} = \frac{\sqrt{\varrho^2+(z+a)^2}-z-a}{\sqrt{\varrho^2+(a-z)^2}+a-z} \tag{20}$$

wie man durch Überkreuzmultiplizieren und Anwenden der dritten Binomischen Formel leicht sehen kann.

Definieren wir, wie in der Aufgabenstellung vorgegeben, die Abstände der beiden Stabenden vom Beobachtungspunkt mit r_+ bzw. r_-, so läßt sich (18) in der Form

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\ln\left[\frac{r_+ - z + a}{r_- - z - a}\right] \tag{21}$$

schreiben.

(b) Per Definition sind Äquipotentialflächen charakterisiert duch die Bedingung, dass das elektrostatische Potential auf dieser konstant ist, d.h. in unserem Fall dass das Argument des Logarithmus in (21) eine Konstante ist,

$$k = \frac{r_+ - z + a}{r_- - z - a}. \tag{22}$$

Aus der Definition für $r_\pm$,

$$r_\pm = \sqrt{\varrho^2 + (z \mp a)^2}$$

folgt

$$r_-^2 - r_+^2 = (z+a)^2 - (z-a)^2 = 4az$$

und somit

$$z = \frac{1}{4a}(r_-^2 - r_+^2).$$

Setzt man dieses Resultat für z in (22) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} k &= \frac{4ar_+ - r_-^2 + r_+^2 + 4a^2}{4ar_- - r_-^2 + r_+^2 - 4a^2} \\ &= \frac{(r_+ - r_- + 2a)(r_+ + r_- + 2a)}{(r_+ - r_- + 2a)(r_+ + r_- - 2a)}, \end{aligned}$$

d.h.

$$k = \frac{r_+ + r_- + 2a}{r_+ + r_- - 2a} = const.$$

Damit diese Identität erfüllt ist, muß offenbar

$$r_+ + r_- = const. \tag{23}$$

gelten. Das ist aber genau die Gleichung eines Ellipsoids. Die Äquipotentialflächen sind also Rotationsellipsoide.

(c) Das elektrische Feld berechnet sich aus dem elektrostatischen Potential durch $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi$. Durch die Geometrie der Konfiguration bzw. durch die explizite Lösung für das elektrostatische Potential folgt, dass das elektrische Feld axialsymmetrisch ist, d.h. keine φ–Komponente hat. Wir finden

$$\begin{aligned} E_\varrho &= -\frac{\partial\phi}{\partial\varrho} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\rho\left[\frac{1}{(r_+ - z + a)r_+} - \frac{1}{(r_- - z - a)r_-}\right], \\ E_z &= -\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right]. \end{aligned}$$

Schauen wir uns die beiden Komponenten des elektrischen Feldes näher an: E_z ist offenbar singulär für

$$r_\pm = 0 \;\Leftrightarrow\; \varrho = 0,\; z = \pm a,$$

d.h. genau an den Stabenden. Demgegenüber ist E_ϱ singulär für

$$r_\pm = 0$$

und für

$$\begin{aligned} r_+ + a - z = 0 &\;\Leftrightarrow\; z = a + r_+ \\ r_- - a - z = 0 &\;\Leftrightarrow\; z = r_- - a. \end{aligned}$$

Das heißt, E_ϱ ist, ebenso wie das Potential, auf der z-Achse außerhalb des Stabes singulär.