Theoretisch-Physikalisches Institut
Friedrich-Schiller Universität Jena

Elektrodynamik

Sommersemester 2018

Hausübung 3

Aufgabe 15: Kugelsymmetrische Ladungsverteilung, Teil II

Wir betrachten im Folgenden wiederum eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung $\rho(\boldsymbol{r}) = \rho(r)$ wobei $r = |\boldsymbol{r}|$.

(a) Lösen Sie die Poisson-Gleichung für eine allgemeine (jedoch kugelsymmetrische) Ladungsverteilung $\rho(r)$. Die Integrationskonstante soll dabei so gewählt werden, dass

$$\lim_{r\to\infty} \phi(r) = 0$$

gilt.

Lösung (Zum Weiterrechnen für Teilaufgabe(b)):

$$\phi(r) = \frac{1}{\epsilon_0 r} \int_0^r dr' r'^2 \rho(r') + \frac{1}{\epsilon_0} \int_r^\infty dr' \, r' \, \rho(r') \, . \tag{1}$$

(b) Berechnen Sie mittels der Poisson Gleichung das Potential für eine homogen geladene Kugelschale mit Radien R_1 und R_2 (wobei $R_2 > R_1$) mit Gesamtladung Q.

(4+5 Punkte)

Aufgabe 16: Modifiziertes Yukawa-Potential

Bestimmen Sie für das kugelsymmetrische Potential

$$\phi(r) = \frac{q}{r}(1 + br)e^{-ar}$$

die dazugehörige Ladungsverteilung. (4 Punkte)

Hinweis: Seien Sie vorsichtig bei $r = 0$.

Aufgabe 17: Kugelsymmetrische Ladungsdichte

Gegeben sei die kugelsymmetrische Ladungsdichte

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \frac{L\,\epsilon_0}{r}(1 - e^{-ar})\,\Theta(R - r)\,,$$

wobei $r = |\boldsymbol{r}|$. Außerdem sind L, R und a positive Konstanten. Berechnen Sie mit Hilfe der Poisson-Gleichung das elektrostatische Potential und hieraus das elektrische Feld.

(7 Punkte)

Bitte wenden!

Aufgabe 18 (Bonus): Das Theorem von Helmholtz

Gegeben seien die Differentialgleichungen

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{r})\,, \qquad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r}) \tag{2}$$

für ein Vektorfeld $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$, wobei $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r})$ die Bedingung $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}) = 0$ erfüllt. Des Weiteren nehmen wir an, dass $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r})$ und $f(\boldsymbol{r})$ schneller als r^{-2} gegen 0 gehen für $r = |\boldsymbol{r}| \to \infty$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla} g(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) \tag{3}$$

die obigen Differentialgleichungen erfüllt, sofern $g(\boldsymbol{r})$ und $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ durch

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\boldsymbol{r}\,' \, \frac{f(\boldsymbol{r}\,')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}\,'|}\,, \\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\boldsymbol{r}\,' \, \frac{\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}\,')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}\,'|}\,, \end{aligned}$$

gegeben sind. Exisitieren diese Integrale?

(b) Zeigen Sie unter der zusätzlichen Voraussetzung

$$|\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})| \to 0 \qquad \text{für} \qquad |\boldsymbol{r}| \to \infty$$

dass die Lösung (3) eindeutig ist.

Lösung der Aufgabe 15

Die Poisson-Gleichung

$$\Delta\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\,\rho(r)$$

reduziert sich für kugelsymmetrische Ladungsverteilungen $\rho(\boldsymbol{r}) = \rho(r)$ (d. h. unabhängig von θ und ϕ) für das elektrostatische Potential $\phi = \phi(r)$ zu

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\phi(r)\right) = -\frac{1}{\epsilon_0}\,\rho(r)\,.$$

Integriert man diese Gleichung, so erhält man

$$r^2\frac{\partial}{\partial r}\phi(r) = -\frac{1}{\epsilon_0}\int\limits_0^r dr' r'^2\rho(r') + c_1$$

bzw.

$$\frac{\partial}{\partial r}\phi(r) = -\frac{1}{\epsilon_0\,r^2}\int\limits_0^r dr' r'^2\rho(r') + \frac{c_1}{r^2}$$

Die Integrationskonstante c_1 ist Null unter der Annahme, dass bei $r = 0$ keine Punktladung sitzt, d. h. dass $\rho(r)$ nicht von der Form $\rho(r) = q\delta(r) + ...$ ist. Eine weitere Integration liefert

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_0^r dr'\left(-\frac{1}{r'^2}\right)Q(r') + c_2$$

mit (siehe auch Aufgabe 2)

$$Q(r') = 4\pi\int\limits_0^{r'} dr'' r''^2\rho(r'')$$

Für den Limes $r \to \infty$ soll das Potential verschwinden und daher muss c_2 geschickt gewählt werden. Dies sieht man wie folgt:

$$\begin{aligned}
\phi(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_0^r dr'\left(-\frac{1}{r'^2}\right)Q(r') + c_2 \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left.\frac{Q(r')}{r'}\right|_0^r - \frac{1}{\epsilon_0}\int\limits_0^r dr' r'\rho(r') + c_2 \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q(r)}{r} + \frac{1}{\epsilon_0}\int\limits_r^\infty dr' r'\rho(r') + \underbrace{\left[-\frac{1}{\epsilon_0}\int\limits_0^\infty dr' r'\rho(r') + c_2\right]}_{=0}
\end{aligned}$$

Im Limes $r \to \infty$ verschwinden die ersten beiden Terme, so dass nur noch die eckige Klammer stehen bleibt. Da wir das Potential so wählen wollen, so dass $\lim\limits_{r\to\infty}\phi(r) = 0$ gilt, muss die eckige Klammer verschwinden, was durch eine geeignete Wahl der Integrationskonstanten c_2 geschieht. Damit haben wir gezeigt

$$\phi(r) = \frac{1}{\epsilon_0\,r}\int\limits_0^r dr' r'^2\rho(r') + \frac{1}{\epsilon_0}\int\limits_r^\infty dr' r'\rho(r')$$

(b) Für die Ladungsverteilung $\rho(r) = \rho_0\,\Theta(R_2 - r)\,\Theta(r - R_1)$ gilt

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{2\epsilon_0}\left(R_2^2 - R_1^2\right) & \text{für } r \leq R_1 \\ \frac{1}{3\epsilon_0}\frac{(R_2^3 - R_1^3)}{r}\rho_0 & \text{für } r \geq R_2 \\ \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\left[\frac{1}{r}\left(\frac{1}{3}r^3 - \frac{1}{3}R_1^3\right) + \frac{1}{2}R_2^2 - \frac{1}{2}r^2\right] & \text{für } R_1 < r < R_2 \end{cases}$$

wobei $\phi(r)$ stetig bei $r = R_1$ und $r = R_2$ ist.

Lösung der Aufgabe 16

$$\phi(r) = \frac{q}{r}(1 + br)e^{-ar}$$

Wir wollen $\rho(r)$ durch die Poisson-Gleichung bestimmen. Man beachte jedoch, dass $\phi(r)$ für $r \to 0$ divergiert. Daher erweist es sich als sinnvoll wie folgt umzuformen:

$$\phi(r) = \frac{q}{r} + \frac{q}{r}(e^{-ar} - 1) + bqe^{-ar}$$

Es gilt in Kugelkoordinaten

$$\phi(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + ...$$

wobei ... Ableitungen nach θ und ϕ enthalten, die hier nicht relevant sind.
Somit gilt

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(r)$$

(siehe Vorlesung) sowie

$$\begin{aligned} \Delta\left(\frac{e^{-ar} - 1}{r}\right) &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{-ar} - 1}{r}\right)\right) \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{-ae^{-ar}r - e^{-ar} + 1}{r^2}\right) \\ &= -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(e^{-ar}(1 + ar)\right) \\ &= \frac{a^2}{r}e^{-ar} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta\left(e^{-ar}\right) &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}e^{-ar}\right) \\ &= -\frac{a}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2e^{-ar}\right) = -\frac{a}{r^2}\left(2re^{-ar} - ar^2e^{-ar}\right) \\ &= -\frac{a}{r}e^{-ar}\left(2 - ar\right) \end{aligned}$$

und somit

$$\Delta\phi(r) = -4\pi q\delta(r) + q\frac{a^2}{r}e^{-ar} - bq\frac{a}{r}e^{-ar}(2 - ar)$$

$$\rho(r) = 4\pi\epsilon_0\,q\left(\underbrace{\delta(r)}_{\text{Punktladung im Ursprung}} \underbrace{- \frac{a^2}{4\pi r}e^{-ar} + \frac{b}{4\pi}\frac{a}{r}e^{-ar}\left(2 - ar\right)}_{\text{kontinuierliche: Ladungsverteilung}}\right)$$

Lösung der Aufgabe 17

Wir müssen die Poissongleichung

$$\Delta\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho$$

lösen. Dies geschieht durch

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\,\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

Verwendet man Kugelkoordinaten, so erhält man

$$\begin{aligned}
\phi(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^\infty \mathrm{d}r' \int_0^\pi \mathrm{d}\theta' \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi'\; r'^2 \sin\theta'\; \frac{L\epsilon_0}{r'}(1-e^{-ar'})\;\Theta(R-r')\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^R \mathrm{d}r'\; Lr'(1-e^{-ar'})\int_{-1}^{1}\mathrm{d}(\cos\theta')\;\frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta'}} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^R \mathrm{d}r'\; Lr'(1-e^{-ar'})\;\frac{1}{rr'}\left[\sqrt{(r+r')^2}-\sqrt{(r-r')^2}\right] \\
&= L\int_0^R \mathrm{d}r'\;(1-e^{-ar'})\begin{cases} r'/r & \text{für } r>r' \\ 1 & \text{für } r<r' \end{cases}
\end{aligned}$$

Die Unterscheidung der beiden Fälle ist nur für das Potential innerhalb der Ladungsverteilung ($r<R$) notwendig. Dort bekommt man also

$$\begin{aligned}
\phi^i(r) &= L\left[\int_0^r \mathrm{d}r'\;\frac{r'}{r}(1-e^{-ar'}) + \int_r^R \mathrm{d}r'\;(1-e^{-ar'})\right] \\
&= L\left[-\frac{r}{2}+\frac{1}{a^2r}(e^{-ar}-1)+R+\frac{1}{a}e^{-aR}\right]
\end{aligned}$$

Für das Potential außerhalb ($r>R$) ergibt sich

$$\begin{aligned}
\phi^a(r) &= L\int_0^R \mathrm{d}r'\;\frac{r'}{r}(1-e^{-ar'}) \\
&= \frac{L}{r}\left[\frac{R^2}{2}+\frac{1}{a^2}(e^{-aR}-1)+\frac{R}{a}e^{-aR}\right]
\end{aligned}$$

Da die gesamte eckige Klammer konstant ist, erkennt man sofort das richtige Verhalten, nämlich Abfall wie $1/r$ entsprechend einer Punktladung.

Wie man außerdem leicht prüfen kann gilt $\phi(0) = \text{Konstante}$, $\phi(\infty) = 0$, $\phi^i(R) = \phi^a(R)$.

Das elektrische Feld ergibt sich aus dem Potential durch negative Gradientenbildung. Nur die radiale Komponente ist ungleich Null:

$$\begin{aligned}
E_r^i &= -\frac{\partial}{\partial r}\phi^i(r) = L\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{a^2r^2}(e^{-ar}-1)+\frac{1}{ar}e^{-ar}\right] \\
E_r^a &= -\frac{\partial}{\partial r}\phi^a(r) = \frac{L}{r^2}\left[\frac{R^2}{2}+\frac{1}{a^2}(e^{-aR}-1)+\frac{R}{a}e^{-aR}\right]
\end{aligned}$$

Man kann wieder prüfen, daß gilt $E_r(0) = 0,\ E_r(\infty) = 0,\ E_r^i(R) = E_r^a(R)$. Letzteres gilt, da es keine Flächenladungsdichte auf der Oberfläche gibt.

Lösung der Aufgabe 18

(a) Das Vektorfeld

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla} g(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) \tag{4}$$

sowie das Skalarfeld $g(\boldsymbol{r})$ und das Vektorfeld $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ sind bereits in der Aufgabenstellung gegeben. Die Rotation des Vektorfelds $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ berechnet sich zu

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} g(\boldsymbol{r})) + \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}))$$

Es gilt

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} g(\boldsymbol{r}) = 0$$

und somit

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})) = -\Delta u(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}))$$

Desweiteren gilt

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3\boldsymbol{r}' \boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}} \left(\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \right) \\
&= -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3\boldsymbol{r}' \boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}'} \left(\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \right) \\
&= \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3\boldsymbol{r}' \left(\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}'} \cdot \boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}') \right) \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} - \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial\mathbb{R}^3} d^2\mathbf{A}'\, w(\boldsymbol{r}') \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}
\end{aligned}$$

Man beachte, dass der Integrand $w(\boldsymbol{r}')\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$ schneller als r'^{-3} für $|\boldsymbol{r}'| \to \infty$ abfällt und dass $\nabla_{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}) = 0$ (siehe Voraussetzung) gilt. Somit folgt

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) = 0\,.$$

Desweiteren gilt

$$\Delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3\boldsymbol{r}' \Delta \left(\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \right) \boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}') = -\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r})$$

wobei wir

$$\Delta \left(\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \right) = -4\pi\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$$

verwendet haben. Somit folgt für $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}).$$

Für die Divergenz von $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ gilt

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla} \cdot (\nabla g(\boldsymbol{r})) + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})) = -\Delta g(\boldsymbol{r})$$

wobei $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})) = 0$ verwendet wurde. Des weiteren folgt

$$-\Delta g(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3\boldsymbol{r}' f(\boldsymbol{r}') \Delta \left(\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \right) = f(\boldsymbol{r})$$

und somit

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r}).$$

Für die Existenz der Integrale muss man annehmen, dass $|f(r)|$ und $|\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r})|$ schneller als r^{-2} gegen 0 gehen für $r = |\boldsymbol{r}| \to \infty$. Dies erklärt die zusätzliche Voraussetzung in der Aufgabenstellung.

(b) Wir nehmen an, dass die Lösung nicht eindeutig ist, d.h. dass auch

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = -\nabla g(\boldsymbol{r}) + \nabla \times \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{r})$$

eine Lösung ist mit

$$|\boldsymbol{h}(\boldsymbol{r})| \to 0 \qquad \text{für} \;\; |\boldsymbol{r}| \to \infty$$

und

$$\nabla \cdot \boldsymbol{h}(\boldsymbol{r}) = 0\,, \qquad \nabla \times \boldsymbol{h}(\boldsymbol{r}) = 0\,.$$

Somit folgt auch

$$0 = \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{h}(\boldsymbol{r})) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{h}(\boldsymbol{r})) - \Delta \boldsymbol{h}(\boldsymbol{r}) = -\Delta \boldsymbol{h}(\boldsymbol{r})$$

und daher

$$0 = \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3\boldsymbol{r}\; \boldsymbol{h}(\boldsymbol{r})\Delta \boldsymbol{h}(\boldsymbol{r}) = -\int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3\boldsymbol{r}\, |\nabla \boldsymbol{h}(\boldsymbol{r})|^2 + \int\limits_{\partial\mathbb{R}^3} d^2\boldsymbol{A}\, \boldsymbol{h}(\boldsymbol{r}) \nabla \boldsymbol{h}(\boldsymbol{r})$$

Der Randterm fällt weg, da $|\boldsymbol{h}(\boldsymbol{r})| \to 0$ für $|\boldsymbol{r}| \to \infty$. Der Term $|\nabla \boldsymbol{h}(\boldsymbol{r})|^2$ ist nur positiv oder null. Daher muss bereits $\nabla \boldsymbol{h}(\boldsymbol{r}) = 0$ für alle $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ gelten, und wegen $|\boldsymbol{h}(\boldsymbol{r})| \to 0$ für $|\boldsymbol{r}| \to \infty$ folgt, dass $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{r}) = 0$ ist. Somit ist die Lösung eindeutig.