Theoretisch-Physikalisches Institut
Friedrich-Schiller Universität Jena

Elektrodynamik

Sommersemester 2018

Hausübung 3

Aufgabe 15: Kugelsymmetrische Ladungsverteilung, Teil II

Wir betrachten im Folgenden wiederum eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung $\rho(\boldsymbol{r}) = \rho(r)$ wobei $r = |\boldsymbol{r}|$.

(a) Lösen Sie die Poisson-Gleichung für eine allgemeine (jedoch kugelsymmetrische) Ladungsverteilung $\rho(r)$. Die Integrationskonstante soll dabei so gewählt werden, dass

$$\lim_{r\to\infty} \phi(r) = 0$$

gilt.

Lösung (Zum Weiterrechnen für Teilaufgabe(b)):

$$\phi(r) = \frac{1}{\epsilon_0 r} \int_0^r dr' r'^2 \, \rho(r') + \frac{1}{\epsilon_0} \int_r^\infty dr' \, r' \, \rho(r') \, . \qquad (1)$$

(b) Berechnen Sie mittels der Poisson Gleichung das Potential für eine homogen geladene Kugelschale mit Radien R_1 und R_2 (wobei $R_2 > R_1$) mit Gesamtladung Q.

(4+5 Punkte)

Aufgabe 16: Modifiziertes Yukawa-Potential

Bestimmen Sie für das kugelsymmetrische Potential

$$\phi(r) = \frac{q}{r}(1 + br)e^{-ar}$$

die dazugehörige Ladungsverteilung. (4 Punkte)

Hinweis: Seien Sie vorsichtig bei $r = 0$.

Aufgabe 17: Kugelsymmetrische Ladungsdichte

Gegeben sei die kugelsymmetrische Ladungsdichte

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \frac{L\,\epsilon_0}{r}(1 - e^{-ar})\,\Theta(R - r)\,,$$

wobei $r = |\boldsymbol{r}|$. Außerdem sind L, R und a positive Konstanten. Berechnen Sie mit Hilfe der Poisson-Gleichung das elektrostatische Potential und hieraus das elektrische Feld.

(7 Punkte)

Bitte wenden!

Aufgabe 18 (Bonus): Das Theorem von Helmholtz

Gegeben seien die Differentialgleichungen

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{r})\,, \qquad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r}) \tag{2}$$

für ein Vektorfeld $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$, wobei $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r})$ die Bedingung $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}) = 0$ erfüllt. Des Weiteren nehmen wir an, dass $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r})$ und $f(\boldsymbol{r})$ schneller als r^{-2} gegen 0 gehen für $r = |\boldsymbol{r}| \to \infty$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla} g(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) \tag{3}$$

die obigen Differentialgleichungen erfüllt, sofern $g(\boldsymbol{r})$ und $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ durch

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3\boldsymbol{r}'\, \frac{f(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\,, \\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3\boldsymbol{r}'\, \frac{\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\,, \end{aligned}$$

gegeben sind. Exisitieren diese Integrale?

(b) Zeigen Sie unter der zusätzlichen Voraussetzung

$$|\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})| \to 0 \qquad \text{für} \qquad |\boldsymbol{r}| \to \infty$$

dass die Lösung (3) eindeutig ist.