Theoretisch-Physikalisches Institut
Friedrich-Schiller Universität Jena

Elektrodynamik

Sommersemester 2018

Hausübung 2

Aufgabe 12: Eigenschaften der Delta-Distribution

(a) Zeigen Sie, dass für die Delta-Distribution folgendens gilt;

$$\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|}\,\delta(x)\,,$$

wobei α eine reelle Zahl, $\alpha \neq 0$, ist.

(b) Verwenden Sie zudem die Regel

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|}\,\delta(x - x_i)\,, \tag{1}$$

die für eine Funktion $f(x)$ mit ausschliesslich einfachen Nullstellen bei $x = x_i$ (d.h. $f(x_i) = 0$ aber $f'(x_i) \neq 0$) gültig ist, um den folgenden Ausdruck zu vereinfachen:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\,\left(x^2 + x\,e^{i\pi x}\right)\,\delta(x^3 + 2x^2 - x - 2)\,.$$

Argumentieren Sie, warum (1) gilt.

(2+4 Punkte)

Aufgabe 13: Nützliche Identitäten

Zeigen Sie die folgende Identität

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} = 4\pi\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,. \tag{2}$$

Folgern Sie daraus, dass

$$\Delta\,\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = -4\pi\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{3}$$

gilt.

(4+2 Punkte)

Hinweis: Um die Identität (2) zu beweisen, berechnen Sie zuerst explizit die Divergenz für $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}'$. Argumentieren Sie zudem, dass die Identität (2) auch wie folgt geschrieben werden kann

$$\int\limits_V d^3\boldsymbol{r}\;\boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} = \begin{cases} 0 & \text{falls } \boldsymbol{r}' \notin V \\ 4\pi & \text{falls } \boldsymbol{r}' \in V \end{cases} \tag{4}$$

Beweisen Sie (4) explizit!

Aufgabe 14: Elektrisches Feld einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung

Wir betrachten im Folgenden eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung $\rho(\boldsymbol{r}) = \rho(r)$ wobei $r = |\boldsymbol{r}|$.

(a) Argumentieren Sie mit Hilfe der Maxwell Gleichungen, dass das elektrische Feld nur eine radiale Komponente hat, d.h.

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = f(r)\,\frac{\boldsymbol{r}}{r}\,.$$

(b) Wir nehmen desweiteren an, dass die Ladungsverteilung ausserhalb einer Kugel um den Ursprung mit Radius R verschwindet. Zeigen Sie mit Hilfe der integralen Maxwell-Gleichung, dass $f(r)$ durch

$$f(r) = \frac{1}{\epsilon_0\, r^2}\int\limits_0^r dr' r'^2 \rho(r') = \frac{Q(r)}{4\pi\epsilon_0\, r^2}$$

gegeben ist. Interpretieren Sie die Grösse $Q(r)$. Wie verhält sich das elektrische Feld für $r > R$?

(c) Berechnen Sie das elektrische Feld für eine homogen geladene Kugelschale mit Radien R_1 und R_2 (wobei $R_2 > R_1$) mit Gesamtladung Q.

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Ladungsverteilung durch

$$\rho(r) = \rho_0\;\vartheta(R_2 - r)\;\vartheta(r - R_1)$$

gegeben ist, wobei ϑ die Heaviside Funktion ist mit $\vartheta(x) = 1$ für $x \geq 0$ und $\vartheta(x) = 0$ für $x < 0$. Bestimmen Sie ρ_0 in Abhängigkeit von R_1, R_2 und Q!

(2+3+3 Punkte)

Lösung Aufgabe 12: Eigenschaften der Delta-Distribution

(a) Die Identität

$$\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|}\,\delta(x)\,,$$

kann man wie folgt beweisen. Wir nehmen zuerst an, dass $\alpha > 0$ ist. Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\delta(\alpha x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\alpha}\, f(y/\alpha)\delta(y) = \frac{f(0)}{\alpha}\,, \tag{5}$$

wobei wir $y = \alpha x$ substituiert hatten, und $dx = dy/\alpha$ gilt. Ist α jedoch negativ, so muss beachtet werden, dass bei der Substitution auch die Integralgrenzen angepasst werden müssen. Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\delta(\alpha x) = \int_{\infty}^{-\infty} \frac{dy}{\alpha}\, f(y/\alpha)\delta(y) = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\alpha}\, f(y/\alpha)\delta(y) = -\frac{f(0)}{\alpha}\,. \tag{6}$$

Beide Fälle kann man wie folgt zusammenfassen

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|}\, f(0) \tag{7}$$

Dieses Resultat erhält man auch für $\frac{1}{|\alpha|}\,\delta(x)$, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\frac{1}{|\alpha|}\,\delta(x) = \frac{1}{|\alpha|}\, f(0) \tag{8}$$

Somit gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\delta(\alpha x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\frac{1}{|\alpha|}\,\delta(x) \tag{9}$$

für alle Testfunktionen f, und damit folgt die Behauptung.

(b) Wir verwenden zuerst die behauptete Regel

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|}\,\delta(x - x_i)\,, \tag{10}$$

für das konkret angegebene Beispiel. Es gilt

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x-1)(x+1)(x+2)\,. \tag{11}$$

f hat nur einfache Nullstellen und somit gilt

$$\delta(f(x)) = \frac{1}{6}\,\delta(x-1) + \frac{1}{2}\,\delta(x+1) + \frac{1}{3}\,\delta(x+2)\,. \tag{12}$$

Damit ergibt sich für das Integral

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, \left(x^2 + xe^{i\pi x}\right)\, \delta(f(x)) &= \frac{1}{6}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, \left(x^2 + xe^{i\pi x}\right) \delta(x-1) \\ &\quad +\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, \left(x^2 + xe^{i\pi x}\right) \delta(x+1) \\ &\quad +\frac{1}{3}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, \left(x^2 + xe^{i\pi x}\right) \delta(x+2) \\ &= \frac{1}{6}(1-1) + \frac{1}{2}(1+1) + \frac{1}{3}(4-2) = \frac{5}{3} \end{aligned} \tag{13}$$

Wie beweist man nun die Identität

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|}\, \delta(x - x_i)\,, \tag{14}$$

Wir nehmen zuerst der Einfachkeithalber an, dass die Funktion f nur eine Nullstelle x_1 hat, und diese einfach sei, d.h. $f'(x_1) \neq 0$. Wir können die Funktion f um diese Nullstelle herum entwickeln. Es gilt

$$f(x) = f'(x_1)\,(x - x_1) + ... \tag{15}$$

wobei wir die durch ... angedeuteten höheren Terme für das Argument vernachlässigen können. Somit gilt

$$\delta(f(x)) = \delta(f'(x_1)\,(x - x_1)) = \frac{1}{|f'(x_1)|}\, \delta(x - x_1)\,, \tag{16}$$

und damit die Behauptung. Lassen wir nun die Annahme fallen, dass die Funktion f nur eine Nullstelle haben. Wir nehmen jedoch weiter an, dass f nur einfache Nullstellen x_i hat. Die Delta-Distribution $\delta(f(x))$ hat somit nur bei $x = x_i$ support. Um jede dieser Nullstellen können wir wie oben Taylor entwickeln, und erhalten somit

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|}\, \delta(x - x_i)\,, \tag{17}$$

Lösung Aufgabe 13: Nützliche Identitäten

siehe Skript!

Lösung Aufgabe 14: Elektrisches Feld einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung

(a) Die Ladungsverteilung ist kugelsymmetrisch und daher sollte auch die Lösung des Differentialgleichunssystems

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 4\pi\rho(\boldsymbol{r})\,, \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$$

radialsymmetrisch sein. Daraus folgt, dass man $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ in der Form

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E_r(r)\, \boldsymbol{e}_r + E_\vartheta(r)\, \boldsymbol{e}_\vartheta + E_\varphi(r)\, \boldsymbol{e}_\varphi$$

schreiben kann. Hierbei ist $\boldsymbol{e}_r$ der Einheitsvektor in radialer Richtung

$$\boldsymbol{e}_r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

und $r = |\boldsymbol{r}|$. Man beachte, dass E_r, E_ϑ und E_φ nur Funktionen von r, nicht aber von ϑ und φ sind. Dies ist eine Konsequenz der Kugelsymmetrie. Aufgrund Kugelsymmetrie folgt jedoch nicht, dass E_ϑ und E_φ verschwinden. Dies ist eine Konsequenz der Maxwell-Gleichungen. Es gilt

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \Bigg(&\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta} (E_\varphi\, r \sin\vartheta) - \frac{\partial}{\partial\varphi} (E_\vartheta r) \right) \boldsymbol{e}_r \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial\varphi} E_r - \frac{\partial}{\partial r} (E_\varphi r \sin\vartheta) \right) r\, \boldsymbol{e}_\vartheta \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial r} (E_\vartheta r) - \frac{\partial}{\partial\vartheta} E_r \right) r \sin\vartheta\, \boldsymbol{e}_\varphi \Bigg)\end{aligned}$$

Da die Komponenten E_r, E_ϑ und E_φ nur von r abhängen und $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$ gelten muss, folgt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}(E_\vartheta r) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial r}(E_\varphi r) &= 0 \\ E_\varphi &= 0.\end{aligned}$$

Daraus folgt $E_\vartheta = \frac{c}{r}$ und $E_\varphi = 0$. Da ρ unabhängig von ϑ und φ ist, muss die Divergenz des elektrischen Feldes,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 E_r) + \frac{c}{r^2 \tan\vartheta}\,, \tag{18}$$

auch davon unabhängig sein. Somit ist $c = 0$ und $E_\vartheta = 0$ und es folgt

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E_r(r)\, \boldsymbol{e}_r = E_r(r)\, \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} = f(r)\, \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}.$$

(b) Wir betrachten eine Kugel um den Koordinatenursprung mit Radius r, im Folgenden mit $B_r(0)$ bezeichnet. Nach dem Satz von Gauß gilt

$$\int\limits_{B_r(0)} d^3\boldsymbol{r} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \int\limits_{\partial B_r(0)} d^2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{E}$$

wobei gemäß Maxwell $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\epsilon_0$. Für die linke Seite gilt

$$\int\limits_{B_r(0)} d^3\boldsymbol{r}\, \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int\limits_{B_r(0)} d^3\boldsymbol{r}\, \rho(\boldsymbol{r}) = \frac{4\pi}{\epsilon_0} \int\limits_0^r dr'\, r'^2 \rho(r') = \frac{Q(r)}{\epsilon_0}$$

während wir für die rechte Seite

$$\int\limits_{\partial B_r(0)} d^2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{E} = r^2 f(r) \int\limits_0^\pi d\vartheta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \sin\vartheta = 4\pi r^2 f(r)$$

mit $d^2\boldsymbol{a} = r^2 \sin\vartheta \; d\vartheta \; d\varphi \; \frac{\boldsymbol{r}}{r}$ erhalten. Somit folgt

$$f(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} Q(r)$$

.

(c) Die Konstante ρ_0 ist durch die Bedingung

$$Q = \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3\boldsymbol{r} \; \rho(\boldsymbol{r})$$

fixiert. Insbesondere gilt

$$Q = \frac{4}{3}\pi \left(R_2^3 - R_1^3\right) \rho_0$$

und somit

$$\rho_0 = \frac{3Q}{4\pi} \frac{1}{R_2^3 - R_1^3}$$

Für $f(r)$ erhält man

$$f(r) = \begin{cases} 0 & \text{für } r \leq R_1 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \, r^2} \frac{4}{3}\pi (r^3 - R_1^3)\rho_0 & \text{für } R_1 < r < R_2 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \, r^2} & \text{für } r \geq R_2 \end{cases}$$