Elektrodynamik

Sommersemester 2018

Hausübung 11

Aufgabe 41: Punktladung in Dielektrika

Zwei lineare Dielektrika (mit konstanten relativen Dielektrizitätskonstanten ε_1 bzw. ε_2) grenzen bei $z = 0$ aneinender. Im Dielektrikum 1 befindet sich im Abstand $z = d$ von der Trennfläche eine Punktladung q. Bestimmen Sie das elektrostatische Potential ϕ in beiden Halbräumen. Diskutieren Sie insbesondere die Ergebnisse für verschiedene Verhältnisse $\varepsilon_1/\varepsilon_2$.

Hinweis: Verwenden Sie die Methode der Spiegelladungen. Wieviele Spiegelladungen benötigen Sie?

(10 Punkte)

Aufgabe 42: Elektrodynamik in Materie

Leiten Sie aus den makroskopischen Maxwellgleichungen in Materie die Kontinuitätsgleichung sowie den Energiesatz, d.h. das Poynting Theorem, her. Das Poynting Theorem besagt, dass

$$\boldsymbol{j}_f \cdot \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{S} - \frac{\partial u}{\partial t}\,, \tag{1}$$

wobei $\boldsymbol{j}_f$ die Stromdichte der freien Ladungsträger, $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ der Poynting Vektor, und u die Energiedichte

$$u(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) \cdot \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) \cdot \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t)\right) \tag{2}$$

ist. Wie lautet die integrale Form? Interpretieren Sie diese!

(10 Punkte)

Lösung Aufgabe 41

Zwei lineare Dielektrika grenzen bei $z = 0$ aneinander. Da es sich um lineare Dielektrika handelt, gilt für die dielektrische Verschiebungsfeldes $\mathbf{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E}$ (wobei ϵ_r die relative Dielektrizitätskonstante ist) und somit müssen die folgenden Differentialgleichungen gelöst werden für $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ (Im Folgenden werden die relativen Dielektrizitätskonstanten mit ϵ_1 bzw. ϵ_2 bezeichnet):

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \epsilon_1 \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}(\boldsymbol{r}) &= q\delta(\mathbf{r}_1) \quad \text{für } z > 0 \\
\epsilon_2 \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}(\boldsymbol{r}) &= 0 \quad \text{für } z < 0 \\
\nabla \times \mathbf{E}(\boldsymbol{r}) &= 0 \quad \text{für } z \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

mit o.B.d.A. $\mathbf{r}_1 = (0, 0, d)$ (hierbei wurde Translationsinvarianz in x und y-Richtung verwendet). Außerdem liegen folgende Randbedingungen vor

$$
\begin{aligned}
\lim_{z \to 0^+} E_x(x, y, z) &= \lim_{z \to 0^-} E_x(x, y, z) \\
\lim_{z \to 0^+} E_y(x, y, z) &= \lim_{z \to 0^-} E_y(x, y, z) \\
\lim_{z \to 0^+} \epsilon_1 E_z(x, y, z) &= \lim_{z \to 0^-} \epsilon_2 E_z(x, y, z).
\end{aligned}
$$

Mit anderen Worten, wir haben ausgenutzt, dass es keine Oberflächenladungsdichte gibt und dass daher die Komponente von $\mathbf{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E}$ normal zur Grenzfläche bzw. die Komponente von $\mathbf{E}$ tangential zur Grenzfläche stetig ist.

Für das elektrostatische Potential verwenden wir nun den folgenden Ansatz

$$
\phi(x, y, z) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\sqrt{\rho^2 + (d-z)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{\rho^2 + (d+z)^2}} \right) & \text{für } z > 0 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q''}{\sqrt{\rho^2 + (d-z)^2}} & \text{für } z < 0 \end{cases}
$$

mit $\rho^2 = x^2 + y^2$. Somit ist das elektrische Feld $\boldsymbol{E}$ durch $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi$ gegeben,

$$
\boldsymbol{E}(x, y, z) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q\,(\boldsymbol{r} - d\,\boldsymbol{e}_z)}{(\rho^2 + (d-z)^2)^{3/2}} + \frac{q'\,(\boldsymbol{r} + d\,\boldsymbol{e}_z)}{(\rho^2 + (d+z)^2)^{3/2}} \right) & \text{für } z > 0 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q''\,(\boldsymbol{r} - d\,\boldsymbol{e}_z)}{(\rho^2 + (d-z)^2)^{3/2}} & \text{für } z < 0 \end{cases} \tag{3}
$$

Wir betrachten zuerst die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes $\boldsymbol{E}$. Diese muss bei $z = 0$, also für $\boldsymbol{r} = (x, y, 0)$, stetig sein. Somit folgt

$$
q + q' = q''\,. \tag{4}
$$

Nun betrachten wir die Normalkomponente von $\boldsymbol{D}$. Diese ist für $\boldsymbol{r} = (x, y, 0)$ stetig, sofern

$$
\epsilon_1(-q\,d + q'\,d) = \epsilon_2\, q''\,(-d) \tag{5}
$$

Somit verbleibt noch

$$
\begin{aligned}
q + q' &= q'' \\
\epsilon_1\,(q - q') &= \epsilon_2\, q''
\end{aligned}
$$

nach q' und q'' zu lösen. Es gilt

$$
\begin{aligned}
q'' &= \frac{2\,\epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1}\, q \\
q' &= -\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1}\, q
\end{aligned}
$$

Insgesamt wurden zwei Spiegelladungen verwendet.

Lösung Aufgabe 42

siehe Wikipedia, Poynting Theorem