Theoretisch-Physikalisches Institut
Friedrich-Schiller Universität Jena

Elektrodynamik

Sommersemester 2018

Hausübung 10

Aufgabe 39: Geladene rotierende Kugel

Wir betrachten eine Kugel vom Radius R, die auf der Oberfläche eine homogen verteilte Ladung Q trägt. Der Kugelmittelpunkt sei der Koordinatenursprung. Die Kugel rotiere um die z-Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω. Berechnen Sie das Vektorpotential $\boldsymbol{A}$ und daraus resultierende $\boldsymbol{B}$-Feld innerhalb und außerhalb der Kugel.

Hinweis: Argumentieren Sie, dass

$$\int d^3\mathbf{r}' \, \frac{\delta(r'-R)\,\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}.$$

gilt. Die Funktion $f(r)$ können Sie mittels eines Integral schreiben, welches Sie durch

$$\int \frac{d\xi\,\xi}{(A-B\,\xi)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{2}{3\,B^2}\,(2A+B\xi)\,(A-B\xi)^{\frac{1}{2}} + C.$$

auswerten können. (10 Punkte)

Aufgabe 40: Verschiebungsstrom

In dieser Aufgabe soll der Maxwellsche Verschiebungsstrom motiviert werden. Hierzu betrachten wir als Beispiel einen einfachen Stromkreis mit einer Spannungsquelle und einem Plattenkondensator (A sei die Fläche der Platten), siehe beigefügte Abbildung. Durch diesen Stromkreis soll ein zeitlich veränderlicher Strom fließen, beispielsweise da der Kondensator geladen wird.

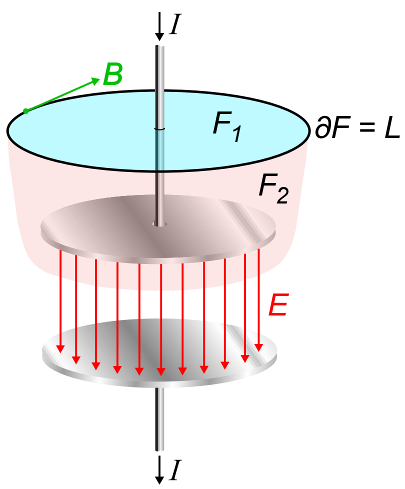

Abbildung 1: Von Wikipedia (modifiziert), Copyright by Chris Burks

(a) Das Amperesche Gesetz der Magnetostatik in der integralen Form besagt, dass

$$\oint\limits_L d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{B} = \mu_0 \int\limits_F d^2\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{j}\,,$$

wobei F eine beliebige Fläche mit Rand $\partial F = L$ ist.

Zeigen Sie, dass diese Form des Ampereschen Gesetzes Gesetz nicht vollständig sein kann, da für die in der Abbildung gezeigten Flächen F_1 und F_2 gilt:

$$\int\limits_{F_1} d^2\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{j} \neq \int\limits_{F_2} d^2\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{j}\,.$$

(b) Betrachten Sie nun den Aufladeprozess eines Kondensators. Durch den (zeitlich veränderlichen) Strom $I(t)$ ändert sich die Ladung auf den Kondensatorplatten, und damit das elektrische Feld zwischen den Platten. Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen $I(t) = dQ(t)/dt$ und der zeitlichen Ableitung des elektrischen Felds her.

Hinweis: Sie dürfen die bereits in der Vorlesung berechnete Kapazität des Plattenkondensators verwenden.

(c) Zeigen Sie für die in Abbildung 1 eingezeichneten Flächen F_1 und F_2, dass somit

$$\int\limits_{F_1} d^2\boldsymbol{A} \cdot \left(\boldsymbol{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) = \int\limits_{F_2} d^2\boldsymbol{A} \cdot \left(\boldsymbol{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right)$$

gilt. Somit verallgemeinert sich das Amperesche Gesetz zu

$$\oint\limits_L d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{B} = \mu_0 \int\limits_F d^2\boldsymbol{A} \cdot \left(\boldsymbol{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right)\,.$$

Wie lautete dessen differentielle Form?

(10 Punkte)

Lösung Aufgabe 39

Ladungsdichte der Kugel

$$\rho(r,\vartheta,\varphi) = \frac{Q}{4\pi R^2}\delta(r-R)$$

und daraus resultierende Stromdichte

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})\,\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})\,(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}), \qquad \text{mit} \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix}.$$

Somit gilt für das Vektorpotential

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3\mathbf{r}'\,\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{Q\mu_0}{(4\pi)^2\,R^2}\;\boldsymbol{\omega}\times\left(\int d^3\mathbf{r}'\;\frac{\delta(r'-R)\,\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right).$$

Um das Integral zu berechnen, erweist es sich als zweckmäßig, den Vektor $\mathbf{r}$ entlang der z-Achse zu legen. Damit gilt in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned}\int d^3\mathbf{r}'\;\frac{\delta(r'-R)\,\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} &= \int_0^\infty dr'\,r'^2\int_0^{2\pi} d\varphi' \\ &\int_0^\pi d\vartheta'\,\sin\vartheta'\,\frac{\delta(r'-R)}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\vartheta'}}\begin{pmatrix} r'\,\sin\vartheta'\,\cos\varphi' \\ r'\,\sin\vartheta'\,\sin\varphi' \\ r'\,\cos\vartheta' \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Die ersten beiden Komponenten sind durch die φ' Integration null. Für die z-Komponente erhält man

$$\begin{aligned}\left(\int d^3\mathbf{r}'\;\frac{\delta(r'-R)\,\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)_z &= 2\pi R^3\int_0^\pi d\vartheta'\,\frac{\sin\vartheta'\cos\vartheta'}{\sqrt{r^2+R^2-2rR\cos\vartheta'}} \\ &= 2\pi R^3\int_{-1}^{1} d\xi\;\frac{\xi}{\sqrt{r^2+R^2-2rR\xi}} \equiv f(r),\end{aligned}$$

wobei $\xi=\cos\vartheta'$. Legt man $\mathbf{r}$ nicht entlang der z-Achse, so erhält man stattdessen

$$\int d^3\mathbf{r}'\;\frac{\delta(r'-R)\,\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Und somit

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0\,Q}{(4\pi)^2\,R^2}\;\frac{f(r)}{r}\,(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\,,$$

wobei wir $f(r)$ auch explizit integrieren können mit Hilfe von

$$\int\frac{\xi d\xi}{(A-B\xi)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{2}{3B^2}\,(2A+B\xi)\,(A-B\xi)^{\frac{1}{2}}+C.$$

Somit gilt mit $A=r^2+R^2$ und $B=2rR$ die folgende explizite Darstellung von $f(r)$

$$\begin{aligned}f(r) &= 2\pi R^3\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{1}{4r^2R^2}\Big[(2r^2+2R^2+2rR\xi)(r^2+R^2-2rR\xi)^{\frac{1}{2}}+C\Big]_{\xi=-1}^{\xi=1} \\ &= \frac{2\pi R}{3r^2}\Big((r^2+R^2-rR)(r+R)-(r^2+R^2+rR)|r-R|\Big)\end{aligned}$$

Beachtet man, dass innerhalb der Kugel $r < R$ und somit $|r - R| = R - r$ wohingegen außerhalb der Kugel $r > R$ und somit $|r - R| = r - R$ gilt, so erhält man für $f(r)$

$$f(r) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3} R\, r & \text{für } r < R \\ \frac{4\pi}{3} \frac{R^4}{r^2} & \text{für } r > R \end{cases}$$

und somit für das Vektorpotential $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0\, Q}{(4\pi)^2\, R^2} \frac{f(r)}{r} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0\, Q}{12\pi\, R} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) & \text{für } r < R \\ \frac{\mu_0\, Q\, R^2}{12\pi\, r^3} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) & \text{für } r > R \end{cases}$$

Für das $\mathbf{B}$-Feld gilt $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ und somit innerhalb der Kugel

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0\, Q}{12\pi\, R} \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \frac{\mu_0\, Q}{12\pi\, R} \left(\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{r}) - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{r}\right)$$

Da $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{r} = 3$ und somit $\boldsymbol{\nabla}\mathbf{r} = \mathbb{1}$ folgt

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0\, Q}{6\pi\, R}\, \boldsymbol{\omega}.$$

Außerhalb der Kugel gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mu_0\, Q\, R^2}{12\pi} \left(\boldsymbol{\omega} \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \right) - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \\ &= \frac{\mu_0\, Q\, R^2}{12\pi} \frac{3(\boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r})\frac{\mathbf{r}}{r} - \boldsymbol{\omega}}{r^3} \\ &= \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\, \mathbf{m}}{r^5} \end{aligned}$$

mit dem magnetischen Dipolmoment

$$\mathbf{m} = \frac{\mu_0\, Q\, R^2}{12\pi} \boldsymbol{\omega}\, .$$

Hierbei wurde benutzt

$$\boldsymbol{\nabla} \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{1}{r^3} \mathbb{1} - \frac{3\, \mathbf{r}\, \mathbf{r}^T}{r^5}$$

und

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = 0 \qquad \text{für } \boldsymbol{r} \neq \mathbf{0}\, .$$

Lösung Aufgabe 40

(a) Vorbemerkung: Das Amperesche Gesetz der Magnetostatik

$$\oint_L d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{B} = \mu_0 \int_F d^2\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{j}\, ,$$

wobei die Fläche F den Rand L besitzt, kann mittels des Satzes von Stokes auch wie folgt formuliert werden

$$\int_F d^2\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \int_F d^2\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{j}\, ,$$

Man beachte, dass die linke Seite nicht von F abhängen kann. Dies sieht man wie folgt: Wir wählen zwei Flächen F_1 und F_2 deren Rand jeweils durch L gegeben ist. F_{tot} sei nun die Summe von F_1 und F_2, und F_{tot} hat keinen Rand. Mittels des Satzes von Gauß gilt

$$\oint\limits_{F_{tot}} d^2\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = \int\limits_V d^3\boldsymbol{r}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = 0\,, \tag{1}$$

wobei V das Volumen ist, welches durch F_{tot} berandet ist. Im letzen Schritt haben wir die Identität $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = 0$ ausgenutzt. Beachtet man außerdem, dass für den Satz von Gauß der Normalenvektor von F_{tot} immer nach außen zeigt, während der Normalenvektor für F_1 und F_2 in die gleiche Richtung zeigt, so folgt damit

$$0 = \oint\limits_{F_{tot}} d^2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = \oint\limits_{F_1} d^2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} - \oint\limits_{F_2} d^2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} \tag{2}$$

und somit haben wir gezeigt, dass

$$\oint\limits_F d^2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} \tag{3}$$

nicht von F abhängt, sondern nur von dessen Rand L.

Zur Aufgabe: In dieser Teilaufgabe zeigen wir jedoch an Hand eines Plattenkondensators, dass

$$\int\limits_F d^2\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j} \tag{4}$$

von der gewählten Fläche F (und nicht nur von dessen Rand) abhängt. Dazu wählen wir die in der Aufgabenstellung eingezeichneten Flächen F_1 und F_2. Es gilt dann

$$\int\limits_{F_1} d^2\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j} = I \tag{5}$$

sowie

$$\int\limits_{F_2} d^2\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j} = 0 \tag{6}$$

(b) Die obere Platte des Plattenkondensators sei bei $x = 0$ (Fläche der Platte sei A), die untere Platte bei $x = d$. Des Weiteren sei das elektrostatische Potential so gewählt, dass $\phi(x = d) = 0$. Somit gilt für die Spannung $U = \phi(x = 0) - \phi(x = d) = \phi(x = 0)$

Die Platten werden nun durch den Stromfluss geladen. Wir nehmen an, dass für $t = 0$ die Platten ungeladen sind. Es gilt dann

$$Q(t) = \int\limits_0^t dt' I(t')\,. \tag{7}$$

Das elektrische Feld des Plattenkondensators ergibt sich somit zu

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi = \frac{Q(t)}{A\,\epsilon_0}\boldsymbol{e}_x \tag{8}$$

Dies findet man entweder durch direktes Lösen der Poissongleichung, aus Aufgabe 19(b) oder durch die in der Vorlesung hergeleiteten Identität $Q = CU$, wobei die Kapazität $C = \epsilon_0 A/d$ und $|\boldsymbol{E}| = U/d$.

Somit erhalten wir

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = A\epsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial t}\,. \tag{9}$$

(c) Modifiziert man nun den Strom, indem man den Verschiebungsstrom addiert,

$$\int\limits_F d^2\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{j} \mapsto \int\limits_F d^2\boldsymbol{A} \cdot \left(\boldsymbol{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) \tag{10}$$

so sieht man an diesem konkreten Beispiel, dass das resultierende Integral nicht mehr von F, sondern nur noch von dessen Rand L abhängt, explizit gilt

$$\int\limits_{F_1} d^2\boldsymbol{A} \cdot \left(\boldsymbol{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) = I, \tag{11}$$

wobei in diesem Fall das elektrische Feld (und damit dessen zeitliche Ableitung) verschwindet) sowie

$$\int\limits_{F_2} d^2\boldsymbol{A} \cdot \left(\boldsymbol{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) = I \tag{12}$$

wobei in diesem Fall $\boldsymbol{j}$ verschwindet.

Die infinitesimale Version des Maxwell-Gesetzes lautet

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = \mu_0 \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} \tag{13}$$