Theoretisch-Physikalisches Institut
Friedrich-Schiller Universität Jena

Elektrodynamik

Sommersemester 2018

Hausübung 1

Aufgabe 9: Rechnen mit $\boldsymbol{\nabla}$

Gegeben ist das Vektorfeld

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{r}}{r^3}\,,$$

wobei $\boldsymbol{m}$ ein konstanter Vektor und $r = |\boldsymbol{r}|$ ist. Berechnen Sie $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$.

(6 Punkte)

Aufgabe 10: Satz von Gauß

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\boldsymbol{v}(x, y, z) = y^2\, \boldsymbol{e}_x + (2x\, y + z^2)\, \boldsymbol{e}_y + 2y\, z\, \boldsymbol{e}_z \tag{1}$$

in kartesischen Koordinaten.

Was besagt der Satz von Gauß? Weisen Sie diesen nach für das Vektorfeld $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ und den Einheitswürfel in $\mathbb{R}^3$ nach. Der Einheitswürfel ist gegeben durch die Eckpunkte (x_i, y_i, z_i) wobei $x_i, y_i, z_i \in \{0, 1\}$.

(7 Punkte)

Aufgabe 11: Satz von Stokes

Gegeben sei wiederum das Vektorfeld (1). Integrieren Sie das Vektorfeld $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ explizit entlang der geschlossenen Kurve $\mathcal{C}$, die durch die Teilstrecken $(0, 0, 0)$ nach $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 0)$ nach $(0, 1, 1)$, $(0, 1, 1)$ nach $(0, 0, 1)$ sowie $(0, 0, 1)$ nach $(0, 0, 0)$. Verwenden Sie hierfür auch den Satz von Stokes. Was besagt dieser?

(7 Punkte)

Lösung Aufgabe 9

Es gibt mehrere Möglichkeiten, $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ zu berechnen. Beispielsweise explizit für die Komponente $B_x(\boldsymbol{r})$:

$$\begin{aligned}
B_x(\boldsymbol{r}) &= \frac{\partial}{\partial y} A_z(\boldsymbol{r}) - \frac{\partial}{\partial z} A_y(\boldsymbol{r}) \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{m_x y - m_y x}{r^3}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{m_z x - m_x z}{r^3}\right) \\
&= 2\frac{m_x}{r^3} + \frac{3}{r^5}(-m_x y^2 + m_y xy + m_z xz - m_x z^2) \\
&= -\frac{m_x}{r^3} + \frac{3x}{r^5}(m_x x + m_y y + m_z z) \\
&= \frac{1}{r^3}(-m_x + 3(\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{m})\hat{x})
\end{aligned}$$

wobei $\hat{\boldsymbol{r}} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$ und somit

$$\hat{x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Damit ist

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{r^3}(3(\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{m})\hat{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{m}).$$

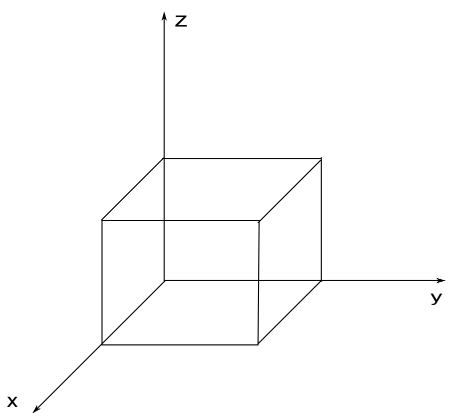
Lösung Aufgabe 10

Der Satz von Gauß lautet

$$\int\limits_V \nabla \cdot \mathbf{v} d^3\mathbf{r} = \oint\limits_{\partial V} d^2\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}\,,$$

wobei $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ das zu integrierende Vektorfeld ist, $\oint_{\partial V} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$ den Fluß durch die geschloßene Oberfläche ∂V darstellt, und V das Volumen ist.

Im vorliegenden Fall handelt es sich um das folgende Volumen:



Mit $\nabla \cdot \mathbf{v} = 2(x+y)$ folgt

$$\int_V dxdydz(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 2\int_0^1 dz \int_0^1 dy \int_0^1 dx(x+y) = 2\int_0^1 dz \int_0^1 dy \left(\frac{1}{2}+y\right)$$

$$= 2\int_0^1 dz \left[\frac{y}{2}+\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 2\int_0^1 dz = 2.$$

Der Fluß durch die geschloßene Oberfläche ∂V, d.h.

$$\oint_{\partial V} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$$

berechnen wir für die sechs verschiedenen Seiten des Würfels:

(i) Vorderseite: $d^2\mathbf{A} = dydz\,\mathbf{e}_x$ und $x = 1$

$$\oint_{\partial V_1} d^2\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \int_0^1 dy \int_0^1 dzy^2 = \frac{1}{3}$$

(ii) Rückseite: $d^2\mathbf{A} = -dydz\,\mathbf{e}_x$ und $x = 0$

$$\oint_{\partial V_2} d^2\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = -\int_0^1 dy \int_0^1 dzy^2 = -\frac{1}{3}$$

(iii) Rechte Seite: $d^2\mathbf{A} = dxdz\,\mathbf{e}_y$ und $y = 1$

$$\oint_{\partial V_3} d^2\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \int_0^1 dx \int_0^1 dz(2x+z^2) = \frac{4}{3}$$

(iv) Linke Seite: $d^2\mathbf{A} = -dxdz\,\mathbf{e}_y$ und $y = 0$

$$\oint_{\partial V_4} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = -\int_0^1 dx \int_0^1 dz(z^2) = -\frac{1}{3}$$

(v) Deckel: $d^2\mathbf{A} = dxdy\,\mathbf{e}_z$ und $z = 1$

$$\oint_{\partial V_5} d^2\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = 1$$

(vi) Boden: $d^2\mathbf{A} = -dxdy\,\mathbf{e}_z$ und $z = 0$

$$\oint_{\partial V_6} d^2\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Somit

$$\oint_{\partial V} d^2\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{4}{3} - \frac{1}{3} + 1 + 0 = 2.$$

Somit haben wir für dieses konkrete Beispiel den Satz von Gauß überprüft.

Lösung Aufgabe 11

Der Satz von Stokes lautet

$$\int_F d^2\mathbf{A}\,(\nabla \times \mathbf{v}) = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}\,,$$

wobei C eine geschloßene Kurve ist, F eine beliebige Fläche, die als Rand die geschloßene Kurve C besitzt, d.h. $\partial F = C$.

Die Orientierung des in $d^2\mathbf{A}$ versteckten Normalenvektor, der senkrecht auf dem Flächenelements d^2A steht, wird anhand der Rechten-Hand-Regel bestimmt.

Im vorliegenden Fall zerlegen wir das Kurvenintegral wie folgt:

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{C_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{C_3} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{C_4} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r},$$

wobei die Strecken C_i die Punkte wie folgt verbinden:

$$\begin{aligned}
C_1 &: (0,0,0) \longrightarrow (0,1,0) \\
C_2 &: (0,1,0) \longrightarrow (0,1,1) \\
C_3 &: (0,1,1) \longrightarrow (0,0,1) \\
C_4 &: (0,0,1) \longrightarrow (0,0,0).
\end{aligned}$$

Somit gilt für die einzelnen Integrale

$$\oint_{C_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \left[\int_0^1 dy\ (2xy + z^2)\right]_{x=0,\ z=0} = 0$$

$$\oint_{C_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \left[\int_0^1 dz\ 2yz\right]_{x=0,\ y=1} = 1$$

$$\oint_{C_3} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = -\left[\int_0^1 dy\ (2xy + z^2)\right]_{x=0,\ z=1} = -1$$

$$\oint_{C_4} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = -\left[\int_0^1 dz\ 2yz\right]_{y=0} = 0$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

Nun berechnen wir dieses Kurvenintegral mit dem Satz von Stokes. Als Fläche bietet es sich an den in der (y,z)-Ebene liegendes Quadrat mit den Eckpunkten $(0,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ und $(0,1,1)$ zu wählen. Diese Fläche wird durch die vorgegebene Kurve berandet. Weiterhin bestimmen wir mit Hilfe der Rechten Hand Regel die Orientierung von $d^2\mathbf{A}$. Wir erhalten $d^2\mathbf{A} = dydz\,\mathbf{e}_x$.

Somit gilt

$$\int_F d^2\mathbf{A}\,(\nabla\times\mathbf{v}) = \int_0^1 dy \int_0^1 dz\; 0 = 0$$

Falls $\boldsymbol{\nabla}\times\ \mathbf{v} = 0$ (was hier der Fall ist) und das Gebiet, auf dem $\mathbf{v}$ definiert ist, einfach-zusammenhängend ist, dann gilt für jeden geschlossenen Weg C:

$$\oint_C \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} = 0.$$