12. Übungsblatt zur Vorlesung Theoretische Mechanik

Moodle-Abgabe der Wertungsaufgaben bis Mittwoch der 13. Semesterwoche um 19:00 Uhr

Aufgabe 25: (14 Punkte)

Auf der Erdoberfläche wird in einem Punkt der geographischen Breite φ ein kartesisches Koordinatensystem K angebracht, wobei die z-Achse vertikal nach oben (senkrecht zur Erdoberfläche), die y-Achse nach Norden und die x-Achse nach Osten zeigt. Ein zunächst ruhender Körper wird aus der Höhe h frei fallengelassen (mit h sehr viel kleiner als der Erdradius). Bestimmen Sie die von der Erdrotation bewirkte horizontale Abweichung der Flugbahn, indem Sie folgende Überlegungen ausführen:

(a) Wie lauten die Bewegungsgleichungen für einen Massenpunkt nahe der Erdoberfläche in einem System Inertialsystem $K'(x', y', z')$, das im Erdmittelpunkt ruht und dessen z'-Achse in Richtung der Drehachse der Erde zeigt?

(b) Wie lauten diese Bewegungsgleichungen in einem Koordinatensystem $K''(x'', y'', z'')$, welches aus $K(x, y, z)$ durch Verschiebung des Ursprungs in den Erdmittelpunkt hervorgeht?

(c) Wie lauten die Bewegungsgleichungen in dem System K?

(d) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen aus (c) unter Vernachlässigung von ω^2 Termen und unter der Annahme, dass $\dot{x}$ und $\dot{y}$ während der Fallzeit klein bleiben, d.h. $\dot{x} = \dot{y} \approx 0$. Bestimmen Sie unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen die gesuchte Abweichung $x(T)$, wobei T die Fallzeit des Körpers ist.

(Hinweis: In dieser Näherung lautet die Bewegungsgleichung für die Abweichung: $\ddot{x} = -2\omega\dot{z}\cos\varphi$, wobei φ der Winkel zwischen der Drehachse $\vec{\omega} \sim \mathbf{e}_{z'}$ und der Nordrichtung in K ist, $\cos\varphi = \mathbf{e}_{z'} \cdot \mathbf{e}_y$.)

Aufgabe 26: (8 Punkte)

Betrachten Sie einen Würfel mit homogener Massendichte ρ und Kantenlänge a.

(a) Bestimmen Sie das Trägheitsmoment des Würfels für Rotationen um eine Würfelkante. (*Hinweis:* Überzeugen Sie sich zunächst davon, dass die Wahl eines körperfesten Koordinatensystems mit einer Würfelecke im Ursprung und den Würfelkanten entlang der Koordinatenachsen für diese Aufgabe zweckmäßig ist. Mit Hilfe von Symmetrieargumenten können Sie nun effizient den gesamten Trägheitstensor berechnen.)

(b) Bestimmen Sie das Trägheitsmoment des Würfels für Rotationen um eine Achse, welche durch den Mittelpunkt und eine Ecke des Würfels geht.