# 11. Übungsblatt zur Vorlesung Theoretische Mechanik

Abgabe am Dienstag der 12. Semesterwoche zu Vorlesungsbeginn.

**Aufgabe 32:** (10 Punkte)

(a) Verifizieren Sie folgende Eigenschaften der Poisson-Klammern:

$$\{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \qquad \textit{(fundamentale Poisson-Klammern)}$$
$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g \qquad \textit{(Leibniz-Regel)}$$

wobei $f, g, h$ beliebige Phasenraum-Funktionen sind.

(b) Zeigen Sie unter Verwendung von (a), dass die Komponenten des Drehimpulses $L_i = \epsilon_{ijk} q_j p_k$ folgende Poisson-Klammern erfüllen:

$$\{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} L_k, \qquad \{\mathbf{L}^2, L_i\} = 0.$$

**Aufgabe 33:** (10 Punkte)

Betrachten Sie den eindimensionalen harmonischen Oszillator im kanonischen Hamilton-Formalismus mit Hamilton-Funktion $H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2$.

(a) Stellen Sie unter Verwendung der fundamentalen Poisson-Klammern, z.B. $\{q, p\} = 1$, und der Rechenregeln für Poisson-Klammern die Bewegungsgleichungen

$$\dot{q} = \{q, H\}, \quad \dot{p} = \{p, H\},$$

auf und lösen Sie diese für die Anfangsbedingungen $q(t = t_0) = q_0$ und $p(t = t_0) = p_0$.

(b) Berechnen Sie damit folgende Poisson-Klammern zwischen $q$ und $p$ zu beliebigen Zeiten:

$$\{q(t), q(t_0)\}, \quad \text{und} \ \{q(t), p(t_0)\}.$$

(Hinweis: bei den fundamentalen Poisson-Klammern, z.B. $\{q, p\} = 1$, wird implizit angenommen, dass die kanonischen Variablen zu gleichen Zeiten betrachtet werden, also z.B. $\{q(t_0), p(t_0)\} = 1$.)

**Aufgabe 34:** (8 Punkte)

Eine zylinderförmige Raumstation im Erdorbit (freier Fall) drehe sich alle $10s$ gleichmäßig um die Symmetrieachse. Ihr Durchmesser betrage $10m$. Ein Astronaut in der Raumstation hält einen Ball $2m$ von der Außenwand entfernt und läßt ihn los, ohne ihn anzustossen. Wo trifft der Ball die Außenwand?
Lösen Sie die Bewegungsgleichungen im kartesischen Koordinatensystem des Astronauten. Die Symmetrieachse stimme dabei mit der $Z$ Achse überein, der Astronaut befinde sich auf der $X$ Achse bei $x_0 = 3m$.
Hinweis: Führen Sie eine komplexe Koordinate $\xi = x + \mathrm{i}y$ ein. Die Lösung lautet schließlich: $\vec{x}(t) = x_0\big[(\cos\omega t + \omega t\sin\omega t)\vec{e}_x + (-\sin\omega t + \omega t\cos\omega t)\vec{e}_y\big]$. Ort des Aufschlags auf der Außenwand: $\vec{x} = (4.59m, -1.97m, 0)$.