10. Übungsblatt zur Vorlesung Theoretische Mechanik

Moodle-Abgabe der Wertungsaufgaben bis Mittwoch der 11. Semesterwoche um 19:00 Uhr

Aufgabe 19: (8 Punkte)

(a) Zeigen Sie mit Hilfe von Gleichung (1) vom vorhergehenden Blatt 09,

$$d\theta = \pm \frac{\ell\, dr}{\mu r^2 \sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - V(r) - \frac{\ell^2}{2\mu r^2}\right)}},$$

folgendes Resultat:
Für die Streuung an einem zentralsymmetrischen Potential $V(r)$ ist der Ablenkwinkel $\vartheta(b)$ in Abhängigkeit vom Stoßparameter b durch

$$\vartheta = \pi - 2b \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{V(r)}{E} - \frac{b^2}{r^2}}}$$

gegeben (r_0 ist der Minimalabstand). Verwenden Sie diese Formel für die Streuung an der harten Kugel

$$V(r) = \begin{cases} \infty & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch eine einfache geometrische Überlegung.

(b) Geben Sie für die harte Kugel den differentiellen Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega}$ und den totalen Wirkungsquerschnitt σ an.

Aufgabe 20: (8 Punkte)

Die Legendre-Transformierte der Funktion $f(x)$ ist gegeben durch eine Funktion $g(y)$,

$$g(y) = yx(y) - f(x(y)), \qquad \text{mit} \quad y(x) = f'(x)$$

(a) Zeigen Sie, dass die Legendre-Transformierte $g(y)$ dem (negativen) Achsenabschnitt einer Tangente an $f(x)$ entspricht, wobei y die Steigung der Tangente bezeichnet. Illustrieren Sie diesen Befund anhand einer Skizze.

(b) Zeigen Sie, dass die erneute Transformation von $g(y)$ zu einer Funktion $h(x) = xy(x) - g(y(x))$ mit $x(y) = g'(y)$ einer Rücktransformation entspricht, so dass $h(x) \equiv f(x)$ folgt.

Präsenzaufgabe P10:

Betrachten Sie erneut ein Teilchen der Masse m, dass sich unter Einfluss der Schwerkraft auf der Innenseite eines Kegels mit Öffnungswinkel 2α bewegt. In einer früheren Aufgabe haben wir bereits die Langrangefunktion mit dem Winkel φ um die Symmetrieachse des Kegels und den Abstand r von der Spitze des Kegels als generalisierte Koordinaten konstruiert.

(a) Konstruieren Sie nun die zugehörige Hamilton-Funktion $H(r, \varphi, p_r, p_\varphi)$ durch Legendre-Transformation.

(b) Stellen Sie die kanonischen Bewegungsgleichungen auf und verifizieren Sie, dass diese wieder zu den bekannten Bewegungsgleichungen führen, die Sie bereits aus der Lagrange-Gleichung 2. Art erhalten haben.