

5. ÜBUNGSBLATT ZUR VORLESUNG THEORETISCHE MECHANIK

Abgabe am Dienstag der 6. Semesterwoche zu Vorlesungsbeginn.

Aufgabe 13:

(8 Punkte)

Ein Koordinatensystem sei so gewählt, dass sich die Erde mit Masse M_1 am Ort $\mathbf{r}_1 = (0, 0, 0.9d)$ und der Mond mit Masse M_2 am Ort $\mathbf{r}_2 = (0, 0, -0.1d)$ befindet; dabei sei d der Abstand zwischen Erde und Mond. Die von den Massen M_i auf eine Probemasse m am Ort \mathbf{r} wirkenden Gravitationskräfte sind durch $\mathbf{K}_i = -\gamma m M_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}$ gegeben.

- (a) Zeigen Sie, dass bei einem Verhältnis $M_1 : M_2 = 81 : 1$ das Koordinatensystem gerade so gewählt wurde, dass sein Ursprung im sogenannten abarischen, d.h. schwerelosen Punkt liegt. Eine Entwicklung des Kraftfelds um den Ursprung ergibt in linearer Ordnung $\mathbf{K} = A(-x, -y, 2z)$. Bestimmen Sie die Konstante A .
- (b) Ist das Kraftfeld $\mathbf{K} = A(-x, -y, 2z)$ konservativ? Berechnen Sie das zugehörige Potential V , und diskutieren Sie die Äquipotentialflächen $V(\mathbf{r}) = \text{const.}$; skizzieren Sie diese Äquipotentialflächen beispielhaft in der (x, z) -Ebene. Ist der abarische Punkt stabil?

(Aufgabenteil (b) kann unabhängig von (a) gelöst werden.)

Aufgabe 14:

(8 Punkte)

Die von einer kugelsymmetrischen Masseverteilung ausgehende Gravitationskraft wirkt genauso, als befände sich die gesamte Masse im Mittelpunkt der Kugel.

- (a) Zeigen Sie, dass dies für die sogenannte Yukawa-Kraft mit einer Abstandsabhängigkeit charakterisiert durch eine Potenzialfunktion der Form

$$V(r) = g \frac{e^{-\mu r}}{r}, \quad \mu = \text{const.} > 0,$$

immer noch richtig ist, allerdings mit einer effektiven Masse M_{eff} , die sich von der Gesamtmasse M der Kugel unterscheidet. Geben Sie diese effektive Masse an. (In der hier verwendeten Notation lautet das Gravitationspotenzial einer Punktmasse M : $\Phi(r) = -MV(r)$ mit $V(r) = \frac{G}{r}$ für die Newtonsche Gravitation.)

- (b) Für die Gravitation gilt ebenfalls, dass das Innere einer hohlen Kugelschale (mit kugelsymmetrischer Massenverteilung) kräftefrei ist. Zeigen Sie, dass dies für die Yukawa-Kraft mit $\mu \neq 0$ nicht mehr der Fall ist, sondern dass eine Kraft auf ein Probeteilchen im Kugelinnern ausgeübt wird, die vom Abstand vom Zentrum abhängt.

Aufgabe 15:

(12 Punkte)

Ein Teilchen sei anfangs in Ruhe und falle dann aus großer Höhe zur Erde. Vernachlässigen Sie den Luftwiderstand und zeigen Sie, dass das Teilchen etwa $9/11$ der gesamten Fallzeit braucht, um die erste Hälfte der Fallstrecke zurückzulegen.