4. Übungsblatt zur Vorlesung Theoretische Mechanik

Abgabe am Dienstag der 5. Semesterwoche zu Vorlesungsbeginn.

Aufgabe 10: (10 Punkte)

Ein Bollerwagen der Masse M enthalte anfangs ein Kaltgetränk der Masse m_0. Ab dem Zeitpunkt $t = 0$ ziehe fortwährend ein:e Physikstudent:in mit konstanter waagerechter Kraft F in Rollrichtung. Gleichzeitig werde aus Versehen der Zapfhahn geöffnet, durch den das Kaltgetränk mit konstanten Rate $dm/dt = -b$ ausfließt. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Bollerwagens, wenn das ganze Getränk herausgeflossen ist. Nehmen Sie an, dass der Bollerwagen zur Zeit $t = 0$ in Ruhe ist. (Hinweis: Beachten Sie, dass das herausfließende Kaltgetränk ebenfalls zur Impulsbilanz beiträgt.)

Aufgabe 11: (8 Punkte)

Lösen Sie die Differentialgleichung der erzwungenen Schwingung

$$\ddot{x} + 2\kappa\dot{x} + \omega_0^2 x = k(t) \quad \text{mit} \quad k(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t < 0 \\ k_0 & \text{für} \quad 0 \le t \le \tau \\ 0 & \text{für} \quad t > \tau \end{cases}$$

für den Fall, dass der Oszillator für $t < 0$ an der Stelle $x = 0$ ruht. Es gelte $\tau \gg \kappa^{-1} > \omega_0^{-1}$. Integrieren Sie hierzu die Differentialgleichung in den beiden Intervallen $0 \le t \le \tau$ und $t > \tau$ getrennt und verwenden Sie geeignete Stetigkeitsbedingungen, um die Lösungen bei $t = 0$ und $t = \tau$ aneinander anzuschließen.
(Hinweis: Verwenden Sie konventionshalber für die Lösung der homogenen Differenzialgleichung den Ansatz $x_\mathrm{h}(t) = A\sin(\omega t + \delta)e^{-\kappa t}$ mit zu bestimmenden ω, A, δ. Versuchen Sie für die partikuläre Lösung den einfachsten sinnvollen Ansatz zu finden.)

Aufgabe 12: (6 Punkte)

Betrachten Sie einen Massepunkt der Masse m, der sich zur Anfangszeit t_0 am Anfangsort $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$ befindet und mit Anfangsgeschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}(t_0) = \mathbf{v}_0$ in einem Zentralkraftfeld der Form $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r)\mathbf{e}_r$ bewegt. Hierbei ist $\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r}$ der Einheitsvektor in $\mathbf{r}$-Richtung und $r = |\mathbf{r}|$ und $f(r)$ eine beliebige Funktion die nur vom Abstand vom Kraftzentrum im Ursprung ($r = 0$) abhängt.
Diskutieren Sie für generische Anfangsbedingungen $|\mathbf{r}_0| > 0$ und $|\mathbf{v}_0| > 0$, ob der Drehimpuls erhalten sein kann. Falls ja, drücken Sie den Drehimpuls durch die Anfangsbedingungen der Bahnkurve aus.
Diskutieren Sie ebenfalls, ob Komponenten des Impulses erhalten sein können; falls ja, geben Sie deren Wert an.
Bitte begründen Sie jeweils Ihre Antwort.
(Hinweis: falls Sie ein konkretes Koordinatensystem verwenden wollen, können Sie o.B.d.A. $\mathbf{r}_0$ entlang der x-Achse und $\mathbf{v}_0$ in der (x, y) Ebene wählen)