2. Übungsblatt zur Vorlesung Theoretische Mechanik

Moodle-Abgabe der Wertungsaufgaben bis Mittwoch der 3. Semesterwoche um 12:00 Uhr

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Gegeben seien die Eigenschaften des Skalar- und Vektorprodukts von Basisvektoren $\mathbf{e}_i$ eines kartesischen Orthonormalsystems ($\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$, $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$, etc.).

a. Ermitteln Sie die Werte der "Entwicklungskoeffizienten" ϵ_{ijk}, indem Sie folgenden Ausdruck für Basisvektoren studieren (Einstein-Summenkonvention: über doppelt auftretende Indizes wird summiert),
$$\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_l = \epsilon_{klj}\, \mathbf{e}_j .$$

b. Betrachten Sie das zweifache Vektorprodukt $\mathbf{e}_i \times (\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_l)$, um die wichtige Identität
$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$
zu zeigen. *Hinweis:* Bestimmen Sie zunächst die Koeffizienten a, b und c in dem Ansatz $\mathbf{e}_i \times (\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_l) = a\,\delta_{kl}\,\mathbf{e}_i + b\,\delta_{il}\,\mathbf{e}_k + c\,\delta_{ik}\,\mathbf{e}_l$.

Aufgabe 4: (8 Punkte)

Vorbereitende Übung zur Gradientenbildung und Vektoranalysis. Zeigen Sie, dass

$$(a) \quad \nabla r^n = n\, r^{n-1}\,\hat{\mathbf{r}}, \qquad (b) \quad \nabla \ln r = \frac{1}{r}\,\hat{\mathbf{r}},$$
$$(c) \quad \nabla^2 \ln r = \frac{1}{r^2}, \qquad (d) \quad \nabla f(r) = \hat{\mathbf{r}}\,\frac{df}{dr},$$

wobei
$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad r = |\mathbf{r}|.$$

Präsenzaufgabe P2:

Betrachten Sie einen aus geringer Höhe fallenden Massepunkt unter dem Einfluss der Schwerkraft $F_{\mathrm{G}} = -mg$ mit Stokes'scher Reibung. Diese Reibung übt eine effektive Kraft auf den Massepunkt aus, die proportional zur Geschwindigkeit v ist und der Geschwindigkeit entgegenwirkt, d.h. $F_{\mathrm{R}} = -Kv$ mit einer Reibungskonstante K (gleiche Vorzeichenkonvention wie die Schwerkraft für fallende Massepunkte).

(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf und lösen Sie diese für die Geschwindigkeit $v(t)$ durch eine elementare Integration. (Sie benötigen insgesamt eine Integrationskonstante C_1.)

(b) Zeigen Sie, dass sich die Geschwindigkeit für unendliche Fallzeiten $t \to \infty$ einer Endgeschwindigkeit v_{E} nähert und berechnen Sie diese.

(c) Bestimmen Sie die Integrationskonstante durch die Anfangsbedingung $v(t = 0) = v_0$.

(d) Bestimmen Sie den Ort $r(t)$ durch Integration der Geschwindigkeit mit der Anfangsbedingung $r(t = 0) = r_0$. Wie verhält sich der Ort bei großen Zeiten $t \gg v_{\mathrm{E}}/g$?