

01. ÜBUNGSBLATT ZUR VORLESUNG THEORETISCHE MECHANIK

Moodle-Abgabe der Wertungsaufgaben bis Mittwoch der 2. Semesterwoche um 12:00 Uhr

Aufgabe 1:

(4 Punkte)

- (a) Beweisen Sie, dass für die Produkte zweier zeitabhängiger Vektoren gilt:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{b}(t)] &= \frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} \cdot \mathbf{b}(t) + \mathbf{a}(t) \cdot \frac{d\mathbf{b}(t)}{dt}, \\ \frac{d}{dt}[\mathbf{a}(t) \times \mathbf{b}(t)] &= \frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} \times \mathbf{b}(t) + \mathbf{a}(t) \times \frac{d\mathbf{b}(t)}{dt},\end{aligned}$$

(Hinweis: Verwenden Sie die Indexdarstellung der Skalar- und Kreuzprodukte, so dass Sie die Ableitungsregeln für einfache zeitabhängige (Komponenten-)Funktionen verwenden können.)

- (b) Zeigen Sie, dass für die Bewegung eines Massepunktes auf einem Kreis der Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} stets senkrecht auf dem Ortsvektor \mathbf{r} steht, falls der Kreismittelpunkt als Koordinatenursprung gewählt wurde.

Aufgabe 2:

(10 Punkte)

Aus drei in der Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_i\}$ gegebenen Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ wird eine neue Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}'_i\}$ aufgebaut.

- (a) Bestimmen Sie dazu die Konstanten γ, μ, ν in den Vektoren

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 + \gamma \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_3 + \mu \mathbf{a}_2 + \nu \mathbf{a}_1$$

genau so, dass diese orthogonal sind. Die neue Orthonormalbasis ist dann durch $\mathbf{e}'_i = \mathbf{b}_i / |\mathbf{b}_i|$ gegeben. Warum müssen die Vektoren \mathbf{a}_i linear unabhängig sein?

- (b) Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1 &= 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{a}_2 &= (2 + 2\sqrt{3})\mathbf{e}_1 + (1 - 2\sqrt{3})\mathbf{e}_2 + (\sqrt{3} - 2)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{a}_3 &= \sqrt{3}\mathbf{e}_1 - \sqrt{3}\mathbf{e}_2\end{aligned}$$

linear unabhängig sind, und geben Sie die neue Basis $\{\mathbf{e}'_i\}$ explizit an.

- (c) Zwei Orthonormalsysteme $\{\mathbf{e}_i\}$ und $\{\mathbf{e}'_i\}$ sind durch eine orthogonale Transformation $\mathbf{e}'_i = \sum_j A_{ij} \mathbf{e}_j$ verknüpft. Beweisen Sie, dass für die Matrix A gilt: $A^T A = A A^T = \mathbb{1}$.

(Die Präsenzaufgabe wird gemeinsam in der Übungsgruppe gelöst. Sie trägt nicht zu den Übungspunkten bei, eine Korrektur von individuell eingereichten Lösungen erfolgt nicht.)

Präsenzaufgabe P01:

Für diese Aufgabe verwenden wir einige bereits aus der Experimentalphysik bekannte Zusammenhänge (Energiebegriff), die im Verlauf der Vorlesung noch näher begründet werden:

Ein Ball falle aus einer Anfangshöhe h_0 zu Boden. Beim Aufprall am Boden zum Zeitpunkt t_1 hat sich die anfängliche Lageenergie $E_0 = mgh_0$ in vollständig in kinetische Energie mit Aufprallgeschwindigkeit v_0 , d.h. $E_0 = \frac{m}{2}v_0^2$ umgewandelt. Durch die Verformungen des Balls nimmt die Energie beim ersten Aufprall und dann schrittweise bei weiteren Aufprallen um einen Faktor k , $0 < k < 1$ ab, $E_i = k E_{i-1}$. Berechnen Sie die weiteren Aufprall-Zeiten t_i als Funktion von t_1 , k , v_0 und g . Betrachten Sie insbesondere den Limes $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i$. Die Gesamtzahl der Aufpralle ist unendlich. Ist deshalb auch die Zeit, während der der Ball noch hüpft, auch unendlich?