13. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik I

Abgabe am Dienstag der 15. Semesterwoche in der Vorlesung.

Aufgabe 37: (7 Punkte)

Lassen sich die folgenden Probleme störungstheoretisch in einer Entwicklung im Parameter λ behandeln? Falls ja, rechnen Sie die Korrektur zur Grundzustandsenergie in erster nicht-verschwindender Ordnung aus.

a) Der freie Hamiltonian sei $H_0 = \frac{p^2}{2m}$. Die Störung sei $H' = -\lambda\delta(x - x_0)$.
b) Der freie Hamiltonian beschreibe ein Teilchen der Masse m in einem unendlich tiefen Potenzialtopf der Länge L. Bei $\frac{L}{4}$ und $\frac{3L}{4}$ befinde sich jeweils ein Störpotenzial der Breite λ ($\lambda \ll L$) und der Höhe V.
c) Der freie Hamiltonian sei $H_0 = \frac{p^2}{2m} + m\omega^2 x^2$. Die Störung sei $H' = e^{-\frac{x^2}{\lambda}}$.
d) Ein quantenmechanischer Rotator rotiere nur in einer Ebene und habe bezüglich dieser Ebene das Trägheitsmoment I und das elektrische Dipolmoment $\vec{\mu}$. Der freie Hamiltonian sei in Kugelkoordinaten in Ortsdarstellung $H_0 = -\frac{\hbar^2}{2I}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$ und die Störung durch ein elektrisches Feld $\lambda\epsilon$ sei $H' = -\mu\lambda\epsilon\cos(\theta)$.

Aufgabe 38: (6 Punkte)

Zeigen Sie im Rahmen der Rayleigh-Schrödinger-Störungstheorie ohne Entartung, dass die Korrektur 2. Ordnung $|\psi^{(2)}\rangle$ zum Zustandsvektor $|\psi(\lambda)\rangle = |\psi^{(0)}\rangle + \lambda|\psi^{(1)}\rangle + \lambda^2|\psi^{(2)}\rangle + \ldots$ durch die Matrixelemente der Störung V_{nm}, die ungestörten Eigenfunktionen $|\psi_n^{(0)}\rangle = |n\rangle$ und die ungestörten Energieeigenwerte ϵ_n ausgedrückt werden können:

$$|\psi^{(2)}\rangle = \sum_{m,k\neq n} \frac{1}{(\epsilon_n - \epsilon_m)(\epsilon_n - \epsilon_k)} V_{mk}V_{kn}|m\rangle - \sum_{m\neq n} \frac{1}{(\epsilon_n - \epsilon_m)^2} V_{nn}V_{mn}|m\rangle.$$

Aufgabe 39: (7 Punkte)

Betrachten Sie den 3-dimensionalen harmonischen Oszillator in Kugelkoordinaten mit Hamilton-Operator und Energieeigenwerten

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{r^2}\right) + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2, \quad E = \hbar\omega\left(2n + l + \frac{3}{2}\right), \quad p_r = \frac{\hbar}{i}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right).$$

Verwenden Sie das Hellmann-Feynman-Theorem für folgende Aufgaben:
a) Bestimmen Sie $\langle r^2\rangle$. Hinweis: $\lambda = \omega$.
b) Bestimmen Sie $\langle 1/r^2\rangle$. Hinweis: $\lambda = l$.
c) Bestimmen Sie $\langle T\rangle = \left\langle \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{r^2}\right)\right\rangle$. Hinweis: $\lambda = \hbar$.
d) Welcher Zusammenhang besteht zwischen $\langle T\rangle$ und $\langle U\rangle = \langle \frac{m}{2}\omega^2 r^2\rangle$?
e) Berechnen Sie $\left\langle \frac{p_r^2}{2m}\right\rangle$. Was gilt für große l?