11. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik I

Abgabe am Dienstag der 13. Semesterwoche in der Vorlesung.

Aufgabe 31: (6 Punkte)

Die stationäre Schrödingergleichung für einen 3-dimensionalen harmonischen Oszillator lautet

$$\Big(-\tfrac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + \tfrac{m}{2}(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2)\Big)\psi = E\psi.$$

(a) Bestimmen Sie die Energieeigenwerte E und Eigenfunktionen ψ.

(b) Bestimmen Sie die Entartungsgrade der Energieeigenzustände für den Fall $\omega_1 = \omega_2$ und $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$.

(c) Bestimmen Sie die Parität der Zustände, d.h., die Eigenschaft der Zustände unter Spiegelungen des Ortsraumes am Ursprung.

Aufgabe 32: (10 Punkte)

Betrachten Sie die kohärenten Zustände $|\xi\rangle$ des harmonischen Oszillators.

(a) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit p_n, bei einer Energiemessung von $|\xi\rangle$ die Energie E_n zu messen, gegeben ist durch die *Poisson-Verteilung*:

$$p_n = \frac{1}{n!}\,|\xi|^{2n}\,e^{-|\xi|^2}.$$

(b) Prüfen Sie nach, dass diese Wahrscheinlichkeit korrekt normiert ist, d.h., dass die Wahrscheinlichkeit, irgend eine Energie zu messen, gleich 1 ist.

(c) Bestimmen Sie die Energieunschärfe ΔE des kohärenten Zustands $|\xi\rangle$. Gehen Sie dabei wie folgt vor: Die Energieunschärfe ist proportional zur Unschärfe der Besetzungszahl, $\Delta E = \hbar\omega\Delta N$. Um die nötigen Erwartungswerte von N bzw. N^2 bezüglich $|\xi\rangle$ zu bestimmen, zeigen Sie zunächst, dass die sogenannte Erzeugende Funktion $F(z)$ wie folgt dargestellt werden kann:

$$F(z) := \langle e^{zN}\rangle_\xi \overset{\text{zu zeigen}}{=} \frac{\exp\left(|\xi|^2 e^z\right)}{\exp\left(|\xi|^2\right)}.$$

Bestimmen Sie nun die Energieunschärfe mit Hilfe von $F'(0)$ und $F''(0)$.

(d) Überprüfen Sie, ob zwei kohärente Zustände $|\xi\rangle$ und $|\xi'\rangle$ orthogonal sein können.

Aufgabe 33: (5 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe des Gradienten in Kugelkoordinaten, dass in sphärischen Koordinaten für den Drehimpulsoperator $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ gilt ($L_\pm := L_x \pm iL_y$):

$$\begin{aligned} L_z &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}, \quad L_x = i\hbar\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right), \\ L_y &= i\hbar\left(-\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right), \quad L_\pm = i\hbar e^{\pm i\phi}\left(\mp i\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right). \end{aligned}$$