

## 11. ÜBUNGSBLATT ZUR VORLESUNG QUANTENTHEORIE

Moodle-Abgabe der Wertungsaufgaben bis Mittwoch der 12. Semesterwoche um 19:00 Uhr

**Aufgabe 21:** (6 Punkte)

Die stationäre Schrödingergleichung für einen 3-dimensionalen harmonischen Oszillator lautet

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + \frac{m}{2}(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2)\right)\psi = E\psi.$$

- Bestimmen Sie die Energieeigenwerte  $E$  und Eigenfunktionen  $\psi$ .
- Bestimmen Sie die Entartungsgrade der Energieeigenzustände für den Fall  $\omega_1 = \omega_2$  und  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$ .
- Bestimmen Sie die Parität der Zustände, d.h., die Eigenschaft der Zustände unter Spiegelungen des Ortsraumes am Ursprung.

**Aufgabe 22:** (6 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe des Gradienten in Kugelkoordinaten, dass in sphärischen Koordinaten für den Drehimpulsoperator  $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$  gilt ( $L_{\pm} := L_x \pm iL_y$ ):

$$\begin{aligned} L_z &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}, & L_x &= i\hbar\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right), \\ L_y &= i\hbar\left(-\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right), & L_{\pm} &= i\hbar e^{\pm i\phi}\left(\mp i\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right). \end{aligned}$$

**Präsenzaufgabe P11:**

Betrachten Sie die kohärenten Zustände  $|\xi\rangle$  des harmonischen Oszillators.

- Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit  $p_n$ , bei einer Energiemessung von  $|\xi\rangle$  die Energie  $E_n$  zu messen, gegeben ist durch die *Poisson-Verteilung*:

$$p_n = \frac{1}{n!} |\xi|^{2n} e^{-|\xi|^2}.$$

- Prüfen Sie nach, dass diese Wahrscheinlichkeit korrekt normiert ist, d.h., dass die Wahrscheinlichkeit, irgend eine Energie zu messen, gleich 1 ist.
- Bestimmen Sie die Energieunschärfe  $\Delta E$  des kohärenten Zustands  $|\xi\rangle$ . Gehen Sie dabei wie folgt vor: Die Energieunschärfe ist proportional zur Unschärfe der Besetzungszahl,  $\Delta E = \hbar\omega\Delta N$ . Um die nötigen Erwartungswerte von  $N$  bzw.  $N^2$  bezüglich  $|\xi\rangle$  zu bestimmen, zeigen Sie zunächst, dass die sogenannte Erzeugende Funktion  $F(z)$  wie folgt dargestellt werden kann:

$$F(z) := \langle e^{zN} \rangle_{\xi} \stackrel{\text{zu zeigen}}{=} \frac{\exp(|\xi|^2 e^z)}{\exp(|\xi|^2)}.$$

Bestimmen Sie nun die Energieunschärfe mit Hilfe von  $F'(0)$  und  $F''(0)$ .

- Überprüfen Sie, ob zwei kohärente Zustände  $|\xi\rangle$  und  $|\xi'\rangle$  orthogonal sein können.