

08. ÜBUNGSBLATT ZUR VORLESUNG QUANTENTHEORIE

Moodle-Abgabe der Wertungsaufgaben bis Mittwoch der 9. Semesterwoche um 19:00 Uhr

Aufgabe 15:

(6 Punkte)

Wenn ein schwerer Kern durch Abstrahlung eines α -Teilchens zerfällt, muss das α -Teilchen durch die Potenzialbarriere des Kerns getunnelt sein. Nehmen Sie an, dass diese Potenzialbarriere nur durch das Coulombpotenzial zwischen Kern (Ladung Ze) und α -Teilchen (Ladung $2e$) beschrieben werden kann. Das Potenzial sei also gegeben durch

$$V(x) = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x}.$$

Weiterhin sei R der 'klassische Kernradius'; d.h. das α -Teilchen mit einer Energie $0 < E < V(R)$ soll von R nach außen tunneln. Für ein ortsabhängiges Potenzial ist die Tunnelwahrscheinlichkeit (von x_i nach x_a) folgendermaßen gegeben:

$$T(E) \sim e^{-\frac{2}{\hbar} \int_{x_i}^{x_a} \sqrt{2m(V(x)-E)}},$$

wobei in diesem Fall $x_i = R$. Berechnen Sie diese Tunnelwahrscheinlichkeit für den α -Zerfall.

Aufgabe 16:

(8 Punkte)

Betrachten Sie das quantenmechanische Analogon des Virialsatzes: Gegeben sei der Hamilton-Operator $H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x})$.

- (a) Verifizieren Sie im Heisenberg-Bild mit Hilfe der Heisenberg-Bewegungsgleichungen folgende Identität:

$$\left\langle \frac{d}{dt}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}) \right\rangle = \left\langle \frac{\mathbf{p}^2}{m} \right\rangle - \langle \mathbf{x} \cdot \nabla V \rangle.$$

- (b) Der quantenmechanische Virialsatz gilt für Zustände, bei denen die linke Seite verschwindet. Zeigen Sie, dass dies für stationäre Zustände $|n\rangle$ (mit $H|n\rangle = E_n|n\rangle$) der Fall ist.
- (c) Zeigen Sie, dass für stationäre Zustände und für Potentiale der Form $V(r) = A r^\alpha$ mit $r = |\mathbf{x}|$ gilt:

$$\langle n | \frac{\mathbf{p}^2}{2m} | n \rangle = \frac{\alpha}{2 + \alpha} E_n.$$

Präsenzaufgabe P08:

Betrachten Sie ein konstantes imaginäres Potenzial $-iV$.

- (a) Lösen Sie die Schrödingergleichung für dieses Potenzial (Hinweis: Sie können ein- und auslaufende ebene Wellen $e^{\pm i k x - i \frac{E}{\hbar} t}$ ansetzen, wobei k zu bestimmen ist.)
- (b) Berechnen Sie den Wahrscheinlichkeitsstrom $j = \frac{\hbar}{m} \text{Im}(\psi^* \partial_x \psi)$ zu führender Ordnung in $V \ll E$, wobei E der (reelle) Energieeigenwert ist (vgl. Aufgabe 14, Blatt 7).
- (c) Interpretieren Sie Ihr Ergebnis: Welchen physikalischen Prozess könnte der obige Hamiltonoperator beschreiben? Wie passt Ihr Ergebnis zu der Tatsache, dass der Hamiltonoperator des Systems nicht hermitesch ist?