# 7. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik I

Abgabe am Dienstag der 9. Semesterwoche in der Vorlesung.

**Aufgabe 19:** (7 Punkte)

In Einheiten, in denen $\hbar = 1$ und $m = \frac{1}{2}$ sei das Potenzial $V(x) = -6\,\mathrm{sech}^2(x) = -\frac{6}{\cosh^2(x)}$ gegeben; die zugehörige 1-dimensionale stationäre Schrödingergleichung lautet

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{6}{\cosh^2(x)}\right)\psi(x) = E\psi(x)$$

(a) Zeichnen Sie das Potenzial.

(b) Lösen Sie die Schrödingergleichung für den Energieeigenwert $E = -4$. Handelt es sich bei der zugehörigen Wellenfunktion um den Grundzustand? Begründen Sie Ihre Antwort.

**Aufgabe 20:** (7 Punkte)

Die Wahrscheinlichkeitsdichte im Ortsraum ist gegeben durch $\rho(\mathbf{x}', t) = |\psi(\mathbf{x}', t)|^2 = |\langle \mathbf{x}'|\psi, t\rangle|^2$. Zeigen Sie mit Hilfe der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte eine Kontinuitätsgleichung erfüllt,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{j} = 0,$$

wobei der zugehörige Wahrscheinlichkeitsstrom $\mathbf{j}$ gegeben ist durch $\mathbf{j} = \frac{\hbar}{m}\,\mathrm{Im}\,(\psi^* \boldsymbol{\nabla} \psi)$.

**Aufgabe 21:** (6 Punkte)

Ein Teilchen im Grundzustand in einem eindimensionalen Kasten der Länge $L$ hat eine Wellenamplitude

$$\langle x|\psi, t\rangle = \psi(x,t) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\,\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}t\right), \quad \text{für } 0 < x < L. \tag{1}$$

Außerhalb verschwinde die Wellenfunktion. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werden die Kastenwände plötzlich weggenommen, und das Teilchen kann sich frei bewegen. Bestimmen Sie für die Zeiten nach $t = 0$ die Wahrscheinlichkeit, dass der Teilchenimpuls zwischen $p$ und $p + dp$ liegt. Welches sind die dominierenden $p$-Werte? Was erwarten Sie klassisch für die Verteilung der Impulse?