03. Übungsblatt zur Vorlesung Quantentheorie

Moodle-Abgabe der Wertungsaufgaben bis Mittwoch der 4. Semesterwoche um 19:00 Uhr

Aufgabe 5: (6 Punkte)

Betrachten Sie einen Ket-Vektorraum mit der orthonormalen Basis $\{|a'\rangle\}$ von Eigenkets eines hermiteschen Operators A. Das Eigenwertspektrum sei nicht entartet, d.h. keine zwei Eigenwerte sind gleich.

(a) Zeigen Sie, dass $\prod_{a'}(A - a')$ der Nulloperator ist.

(b) Welche Bedeutung und Eigenschaften hat der folgende Operator:

$$P_{a'} = \prod_{a'' \neq a'} \frac{(A - a'')}{(a' - a'')}$$

(c) Verdeutlichen Sie (a) und (b) anhand von $A = S_z$ für ein Spin-$\frac{1}{2}$ System.

Aufgabe 6: (6 Punkte)

Sei X ein linearer Operator und $\{|a'\rangle\}$ eine orthonormale Basis eines Ket-Vektorraums. Die Spur eines Operators ist definiert durch

$$\mathrm{tr}X := \sum_{a'} \langle a'|X|a'\rangle.$$

Zeigen Sie folgende Eigenschaften:

(a) $\mathrm{tr}X$ ist unabhängig von der Wahl der Basis, d.h.
$\mathrm{tr}X = \sum_{b'} \langle b'|X|b'\rangle,$ für eine alternative orthonormale Basis $\{|b'\rangle\}$

(b) $\mathrm{tr}X^\dagger = (\mathrm{tr}X)^*$

(c) $\mathrm{tr}(\lambda X) = \lambda\, \mathrm{tr}X, \quad \lambda \in \mathbb{C}$

(d) $\mathrm{tr}(X + Y) = \mathrm{tr}(Y + X)$

(e) $\mathrm{tr}(XY) = \mathrm{tr}(YX)$

(f) $\mathrm{tr}(|a'\rangle\langle a''|) = \delta_{a'a''}$

Präsenzaufgabe P03:

Betrachten Sie die Unschärferelation für die Drehimpulsoperatoren S_x und S_y im Stern-Gerlach-Experiment: $\langle(\Delta S_x)^2\rangle\langle(\Delta S_y)^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[S_x, S_y]\rangle|^2$. Ist die Unschärferelation immer erfüllt? Bestimmen Sie diejenigen Zustände, für die das Gleichheitszeichen gilt. (Hinweis: arbeiten Sie in der $|\pm\rangle = |S_z; \pm\rangle$ Basis und überzeugen Sie sich zunächst, dass ein allgemeiner normierter Stern-Gerlach-Zustand ohne Beschränkung der Allgemeinheit als $|\ \rangle = \cos\frac{\theta}{2}|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\, e^{i\phi}|-\rangle$ geschrieben werden kann.)