2. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik I

Abgabe am Dienstag der 4. Semesterwoche in der Vorlesung.

Aufgabe 4: (8 Punkte)

Die Ket-Vektoren $|\pm\rangle := |S_z;\pm\rangle$ sind Eigenvektoren der z-Komponente des Drehimpulsoperators des Silberatoms und bilden eine orthonormierte Basis für das Stern-Gerlach-Experiment. In Matrixdarstellung lassen sich diese Basisvektoren damit schreiben als $|+\rangle \mathrel{\widehat{=}} \binom{1}{0}$, $|-\rangle \mathrel{\widehat{=}} \binom{0}{1}$.

(a) Zeigen Sie, dass sich die Drehimpulskomponenten in Matrixdarstellung mithilfe der *Pauli-Spinmatrizen* σ_i schreiben lassen als

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_1, \quad S_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_2, \quad S_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_3,$$

wobei

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Verwenden Sie dazu die in der Vorlesung angegebene Darstellung der Eigenvektoren von S_x und S_y in der $|\pm\rangle$-Basis,

$$|S_x;\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\pm|+\rangle + |-\rangle\right), \quad |S_y;\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle \pm i|-\rangle\right).$$

(b) Verifizieren Sie, dass für die Spinmatrizen die Identität

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}\,\mathbb{1} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k$$

gilt, wobei ϵ_{ijk} der total antisymmetrische Tensor 3. Stufe ist.

(c) Verifizieren Sie die Identitäten für den Kommutator und Antikommutator zweier Spinmatrizen

$$[\sigma_i,\sigma_j] := \sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k, \qquad \{\sigma_i,\sigma_j\} := \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}\mathbb{1}.$$

Aufgabe 5: (6 Punkte)

Benutzen Sie die Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion, um zu zeigen, dass

$$U = e^{i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\alpha}} = \mathbb{1}\cos\alpha + i\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\alpha}}{\alpha}\sin\alpha, \quad \text{wobei } \boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^3,\ \alpha = |\boldsymbol{\alpha}|.$$

Dabei seien die Komponenten von $\boldsymbol{\sigma}$ die drei Spinmatrizen σ_i. Zeigen Sie mit Hilfe dieser Darstellung, dass U *unitär* ist (d. h. $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{1}$) und zusätzlich $\det U = 1$ gilt.

Aufgabe 6: (6 Punkte)

Ein Stern-Gerlach-Apparat werde in Richtung des Vektors $\hat{\mathbf{n}}$ ausgerichtet. In Kugelkoordinaten sei $\hat{\mathbf{n}}^{\mathrm{T}} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$. Konstruieren Sie (ausgehend von der S_z-Basis mit Basiskets $|\pm\rangle := |S_z;\pm\rangle$) den Eigenket $|S_{\hat{\mathbf{n}}};+\rangle$ zum Drehimpulsoperator $S_{\hat{\mathbf{n}}} = \mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ in $\hat{\mathbf{n}}$ Richtung. Dieser muss die Eigenwertgleichung $S_{\hat{\mathbf{n}}}|S_{\hat{\mathbf{n}}};+\rangle = \frac{\hbar}{2}|S_{\hat{\mathbf{n}}};+\rangle$ erfüllen.