00. Übungsblatt zur Vorlesung Quantentheorie

Präsenzübung für die 2. Semesterwoche (nicht bewertet)

Aufgabe 0:

Quantenmechanische Zustände werden durch Vektoren im Hilbertraum (ggf. unendlich dimensionaler Vektroraum) repräsentiert. Im endlich dimensionalen Fall eines n-Zustandssystems können die Bras (Kets) mit komplexen Zeilenvektoren (Spaltenvektoren) im $\mathbb{C}^n$ identifiziert werden, wobei $n = \dim \mathcal{H}$. Entsprechend werden dann selbstadjungierte Operatoren durch hermitesche $n \times n$ Matrizen dargestellt und Produkte zwischen Operatoren, Bras und Kets durch Matrixmultiplikationen gebildet.

(a) Welcher Zeilenvektor (Bra) $\langle\alpha|$ kann in eindeutiger Weise einem Spaltenvektor (Ket) $|\alpha\rangle$ ($\widehat{=}\ \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^n$) zugeordnet werden, so dass für das Skalarprodukt gilt $\langle\alpha|\alpha\rangle \geq 0$ mit dem Gleichheitsvektor nur für den Nullvektor $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$?

(b) Betrachten Sie das Beispiel eines dreidimensionalen Hilbertraumes. Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3i \\ 0 & 1 & 0 \\ -3i & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

einen hermiteschen Operator darstellt und berechnen Sie die Eigenwerte a_i und normierten Eigenvektoren $\mathbf{a}_i \ \widehat{=}\ |a_i\rangle$ von A.

(c) Zeigen Sie, dass die normierten Eigenvektoren von A eine Orthonormalbasis im $\mathbb{C}^3$ bilden.

(d) Berechnen Sie die Projektoren $P_i = |a_i\rangle\langle a_i|$, $i = 1, 2, 3$ und verifizieren Sie explizit die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{i=1}^{3} P_i = \sum_{i=1}^{3} |a_i\rangle\langle a_i| = \mathbb{1}.$$

(e) Welche Form hat der Operator $\sum_i a_i P_i$?

(f) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 3 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit A kommutiert, $[A, B] := AB - BA = 0$.

(g) Zeigen Sie explizit, dass A und B die selben Eigenvektoren besitzen und dass für die Eigenwerte von B gilt

$$b_i = \langle a_i|B|a_i\rangle, \quad i = 1, 2, 3.$$