

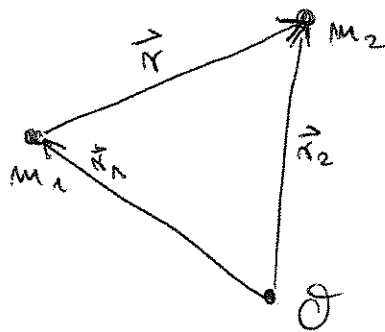
## 6. Das klassische Zwei-Körper-Problem

Wir betrachten im Folgenden die Bewegung zweier Körper, die aufeinander Kräfte entlang ihrer Verbindungslinie ausüben (Zentralkräfte). Dieses System ist offensichtlich für die Himmelmechanik von großer Bedeutung. Entspricht die genannte Kraft der Gravitationskraft, spricht man vom "Kepler-Problem".

Wie wir sehen werden, ist das Problem exakt lösbar (was für das 3-, 4-, etc. Körperproblem nicht mehr gilt.)

### 6.1 Relativkoordinaten

Aufgrund der Zentralkraftnatur kann die potentielle Energie des Systems nur vom Abstand der Körper abhängen



$$U = U(|\vec{r}|) \quad (6.1)$$

mit  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

Die Lagrange-Funktion lautet somit

$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2 - U(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) \quad (6.2)$$

Der Schwerpunkt des Systems ist definiert durch

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{M} \vec{r}_1 + \frac{m_2}{M} \vec{r}_2, \quad M = m_1 + m_2 \quad (6.3)$$

Gesamtmasse

Da (6.1) & (6.3) eine lineare Transformation vom  $(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \rightarrow (\vec{r}, \vec{R})$  darstellen, können wir statt  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$  auch die Koordinaten  $\vec{r}$  und  $\vec{R}$  verwenden. Aus (6.1) & (6.3) folgt

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{M} \vec{r} \quad (6.4)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{M} \vec{r}$$

In den Koordinaten  $\vec{R}$  und  $\vec{r}$  lautet die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - U(|\vec{r}|) \quad (6.5)$$

mit der reduzierten Masse

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{M} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (6.6)$$

Der Schwerpunkt  $\vec{R}$  ist offensichtlich eine zyklische Koordinate  $\frac{\partial L}{\partial R_i} = 0$ , so dass der zugehörige Schwerpunktsimpuls

$$\vec{P} = M \dot{\vec{R}} = \text{const.} \quad (6.7)$$

eine Erhaltungsgröße ist. Dies ist gleichbedeutend damit, dass sich der Schwerpunkt des Systems kraftfrei bewegt. Damit ist das Koordinatensystem, in dem der Schwerpunkt ruht, ebenfalls ein Inertialsystem, in welchem wir im Folgenden die Dynamik des 2-Körper-Problems beschreiben.

Wir wählen den Ursprung dergestalt, dass  $\vec{R} = 0$ . Das verbleibende Problem ist nun rein in der Relativkoordinate  $\vec{r}$  formuliert:

$$L = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - U(r), \quad r = |\vec{r}| \quad (6.8)$$

Sobald wir  $\vec{r}(t)$  kennen, lässt sich  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$  mittels (6.4) bestimmen. (6.8) macht deutlich, dass wir das 2-Körperproblem effektiv auf ein äquivalentes Ein-Teilchen-Problem abgebildet haben, bei dem sich ein effektives Teilchen mit reduzierter Masse  $\mu$  im

einem Zentralkraftpotential  $U(r)$  befindet.

## 6.2 Erhaltungssätze

Das Zwei-Körper-Problem dient auch als gutes Beispiel dafür, wie Symmetrien und Erhaltungssätze die Lösung der Bewegungsgleichung vereinfachen können. Da  $U = U(|\vec{r}|)$  gilt, besitzt das Problem sphärische Symmetrie. Wie in (5.91)ff. gezeigt, impliziert dies die Erhaltung des Drehimpulses

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \text{const.} \quad (6.9)$$

Um (6.9) zu allen Zeiten  $t$  zu erfüllen, müssen  $\vec{r}$  und  $\vec{p}$  zu allen Zeiten in einer Ebene liegen, deren Normale in  $\vec{L}$ -Richtung zeigt. Die Bahnkurve  $\vec{r}(t)$  liegt damit ebenfalls in dieser zeitlich unveränderlichen Ebene, so dass  $\vec{r}(t)$  durch 2-dimensionale Polarkoordinaten aufgespannt werden kann

$$\vec{r} = r \hat{e}_r, \quad \dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta \quad (6.10)$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - U(r). \quad (6.11)$$

Offensichtlich ist  $\theta$  eine zyklische Koordinate, deren

Zugehörige Erhaltungsgröße dem Drehimpuls entspricht,

$$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \stackrel{(5.94)}{=} \mu r^2 \dot{\theta} = L_z = \text{const.} \quad (6.12)$$

(N.B.: da  $\vec{r}$  in der "polaren"  $(x, r)$  Ebene gewählt wurde, hat  $\vec{L}$  in diesen Koordinaten nur eine  $L_z$ -Komponente.)

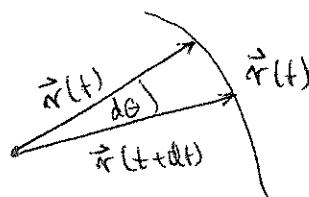
Aus Konventionsgründen wird diese Konstante " $l$ " genannt:

$$l := \mu r^2 \dot{\theta} = \text{const.} \quad (6.13)$$

Im Zwei-Körper-Problem hat die Drehimpulserhaltung eine einfache anschaulich-geometrische Interpretation: die

Fläche, die der Vektor  $\vec{r}(t)$  in einem Zeitintervall  $dt$  überstreicht, ist gegeben durch

$$dA = \frac{1}{2} r \cdot r d\theta.$$



$$(6.14)$$

Daraus folgt für die "Flächengeschwindigkeit"

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{l}{2\mu} = \text{const.} \quad (6.15)$$

Der Vektor der Bahnkurve überstreicht also in gleichen Zeiten gleiche Flächen unabhängig vom momentanen Abstand  $r(t)$ . Dies ist das berühmte 2. Keplersche Gesetz.

das Kepler empirisch aus den Beobachtungen von Tycho Brahe herausgelassen hat (Kepler 1609). Dieses Gesetz ist nicht auf gravitativ wechselwirkende Körper beschränkt, sondern gilt für allgemeine Zentralkräfte.

Als nächstes betrachten wir die Gesamtenergie. Da das System wegen

$$\frac{\partial L}{\partial t} \stackrel{(6.11)}{=} 0 \quad (6.16)$$

abgeschlossen ist, ist die Gesamtenergie erhalten (die Voraussetzungen für  $H=E=\text{const.}$  sind erfüllt):

$$T + U = E = \text{const.} \quad (6.17)$$

mit

$$E = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + U(r) \quad (6.18)$$

$$= \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{l^2}{\mu r^2} + U(r). \quad (6.19)$$

Wegen der Drehimpulserhaltung lässt sich die Energie in der Form eines effektiven 1-dimensionalen Problems schreiben. Der Beitrag des Drehimpulses  $\sim \frac{l^2}{r^2}$  hat dabei die Form eines zusätzlichen Potentialterms.

### 6.3 Bewegungsgleichungen

Sobald eine Potentielle Energie  $U(r)$  gewählt ist, kann aus dem Energieerhaltungssatz die gesamte Lösung des Problems bestimmt werden. Dazu lösen wir (6.19) auf nach

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - U(r)) - \frac{l^2}{\mu^2 r^2}} \quad (6.20)$$

Separation der Variablen führt auf

$$\int_{t_0}^t dt = \pm \int_{r_0}^{r(t)} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} (E - U(r)) - \frac{l^2}{\mu^2 r^2}}} \quad (6.21)$$

woraus sich nach Integration durch Bildung der Umkehrfunktion  $r(t)$  bestimmen lässt. Für die (astronomische) Beobachtung ist aber der Abstand als Funktion des Polwinkel  $r(\theta)$  die interessantere Größe. Wegen

$$d\theta = \frac{d\theta}{dt} \frac{dt}{dr} dr = \frac{\dot{\theta}}{\dot{r}} dr = \frac{l}{\mu r^2 \dot{r}} dr \quad (6.22)$$

folgt aus (6.21):

$$\theta(r) = \int \frac{l/r^2 dr}{\sqrt{2\mu (E - U(r)) - \frac{l^2}{2\mu r^2}}} \quad (6.23)$$

Anders als im (6.20/21) müssen wir im (6.23) keine Fallunterscheidung in den Vorzeichen durchführen, da wegen  $l = \mu r^2 \dot{\theta} = \text{const} > 0$   $\theta(t)$  nur monoton in der Zeit zunehmen kann.

Für Potentielle Energien der Form  $U(r) \sim r^m$

kann das Integral (6.23) z.T. durch spezielle Funktionen dargestellt werden (für bestimmte Werte von  $m$  können sich

z.B. elliptische Integrale ergeben). Lediglich für  $m=2, -1$  und  $-3$

lässt sich die Lösung durch elementare Funktionen darstellen.

Dabei ist  $m=2$  der harmonische Oszillator (bzw. äquivalent dazu)

und  $m=-1$  entspricht dem Gravitationspotential, also

dem Kepler-Problem.

Bevor wir uns konkrete Lösungen der Bewegungsgleichung erarbeiten, wollen wir einen qualitativen Blick auf das System werfen. Eine entscheidende Rolle für die verschiedenen Lösungstypen spielt der Ausdruck

$$E - U(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2} \quad (6.24)$$

Den Drehimpulsbeitrag  $\frac{l^2}{2\mu r^2}$  betrachten wir als

effektiven Beitrag zum Potential; wir definieren



ein effektives Potential durch

$$V(r) = U(r) + U_c(r) \quad (6.25)$$

$$\text{mit } U_c(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2},$$

dem "Zentrifugalpotential". Dem effektiven Potential können wir eine effektive radiale Kraft zuordnen,

$$F_c = - \frac{\partial U_c}{\partial r} = \frac{l^2}{\mu r^3} \stackrel{l = \mu r^2 \dot{\phi}}{=} \mu r \dot{\phi}^2, \quad (6.26)$$

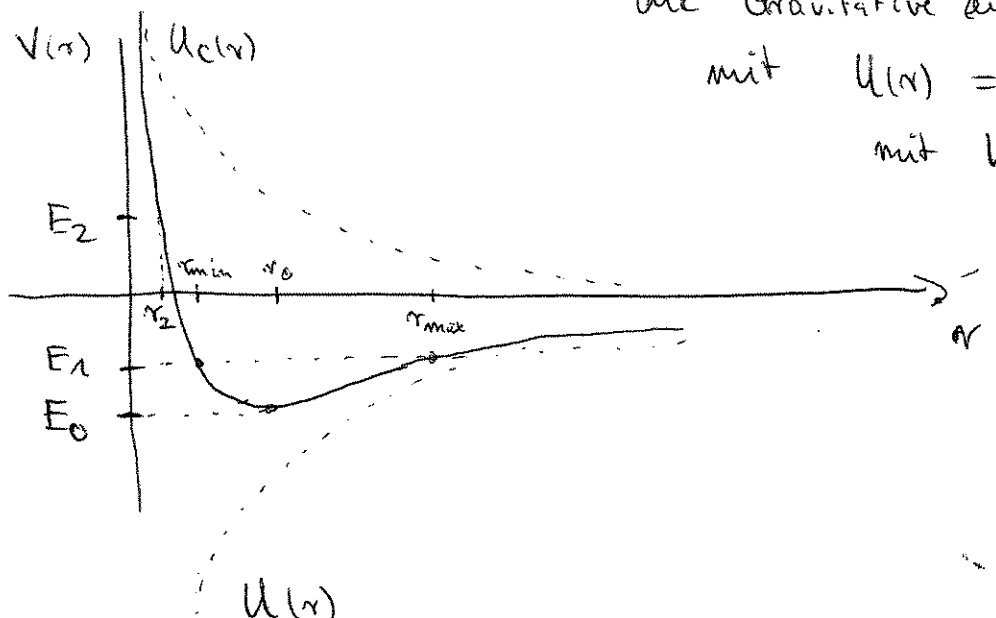
die "Zentrifugalkraft" (vgl.  $F_c = m r \omega^2$ ).

Dabei handelt es sich um keine eigentliche Kraft im Newtonschen Sinne, sondern um eine Hilfsgröße, die sich in der radialen Bewegungsgleichung wie eine radiale Kraft äußert. Für  $l > 0$  lassen sich nun anhand von (6.24) die möglichen Lösungstypen

klassifizieren:  $E - V(r)$ . Wir spezialisieren uns auf die Gravitative Zentralkraft

$$\text{mit } U(r) = -\frac{k}{r} \quad (6.27)$$

$$\text{mit } k = G m_1 m_2$$



Die radiale Geschwindigkeit hatten wir in (6.20) bestimmt:

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu}} \sqrt{E - V(r)} \quad (6.28)$$

Die kleinste sinnvolle Gesamtenergie des Systems ist gemäß Skizze gegeben durch  $E_0 = V(r_0)$ , wobei  $r_0$  das Minimum des effektiven Potentials beschreibt

$$V(r) = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2\mu r}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dr} V(r=r_0) = \frac{k}{r_0^2} - \frac{l^2}{\mu r_0^3} = \frac{k}{r_0^3} \left( r_0 - \frac{l^2}{k\mu} \right)$$

$$\Rightarrow r_0 = \frac{l^2}{k\mu} \quad (\text{historisch: } r_0 =: \alpha) \quad (6.29)$$

Für diese minimale Energie  $E = E_0$ , löst

$$r(t) = r_0 = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu}} \sqrt{\underbrace{E_0 - V(r_0)}_{=0}} = 0$$

die Bewegungsgleichung. Die Bahnkurve hat konstanten Radius, d.h. ihre Zeitentwicklung liegt auf einer Kreisbahn.

(NB: Energien mit  $E < E_0$  entsprechen imaginären Geschwindigkeiten und beschreiben daher keine physikalisch sinnvollen Lösungen.)

Falls die Gesamtenergie  $E = E_2 \geq 0$  ist, ist die Bewegung ungebunden. Das "Teilchen" kann sich auf das Kraftzentrum zu bewegen ("-" Vorzeichen in (6.28)),

bis für einen Punkt  $r_2$  gilt:  $E_2 - V(r_2) = 0$ .

Hier verschwindet die Geschwindigkeit an diesem Umkehrpunkt  $r_2$  und das Teilchen läuft mit positiver Geschwindigkeit ("+" ) nach  $r \rightarrow \infty$ . Für den asymptotischen Fall  $E = 0$  geht die Geschwindigkeit für  $r \rightarrow \infty$  gegen Null.

Für negative Energien  $E_0 < E_1 < 0$  ist die

Bewegung gebunden,  $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$ , und die

Bahnkurve bewegt sich zwischen den Umkehrpunkten  $r_{\min}/r_{\max}$ , an denen die radiale Geschwindigkeit jeweils verschwindet  $\dot{r}|_{r_{\min, \max}} = 0$ . Die Umkehrpunkte heißen

in der Astronomie Apsiden.

## 6.4 Das Kepler-Problem

Für das Gravitationspotential  $U(r) = -\frac{k}{r}$  lässt sich der Ausdruck (6.23)

$$\theta(r) = \int \frac{\frac{l}{r^2} dr}{\sqrt{2\mu} \sqrt{E - U(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2}}} \quad (6.30)$$

elementar integrieren (vgl. Üben). Die Lösung lässt sich in folgender Form darstellen

$$\cos \theta = \frac{\frac{l^2}{\mu k} \frac{1}{r} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}}} \quad (6.31)$$

wobei die Integrationskonstante üblichen Konventionen angepasst wurde (siehe unten). Der Zusammenhang zwischen (6.31) und (6.30) lässt sich durch Ableiten von (6.31) direkt verifizieren.

Wir definieren die Parameter

$$\alpha = \frac{l^2}{\mu k} \quad (= r_0 \text{ vgl. (6.29)}) \quad (6.32)$$

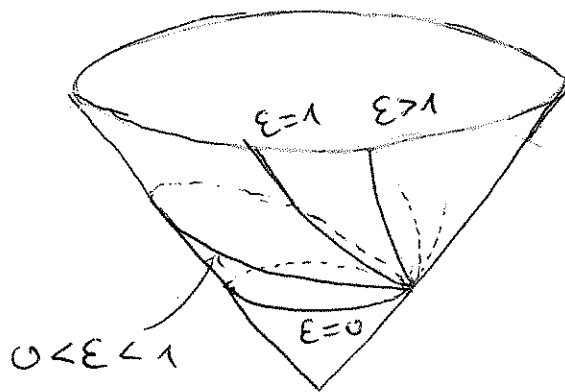
"latus rectum"

$$E = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} \quad \text{"Exzentrizität"} \quad (6.33)$$

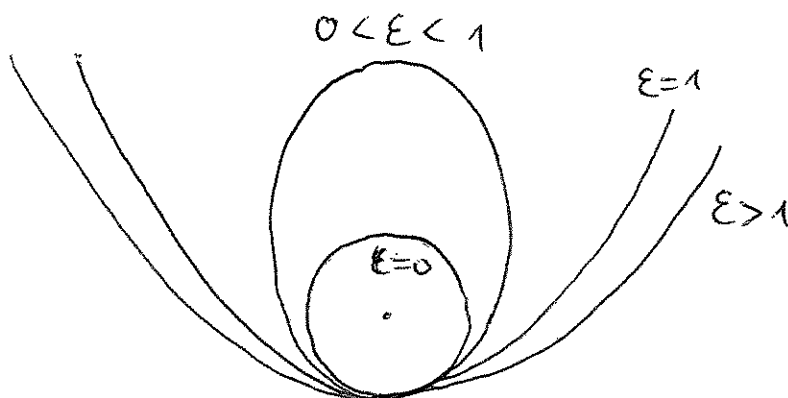
so dass die Bahnkurve (6.31) die einfache Form erhält

$$\frac{\alpha}{r} = 1 + \varepsilon \cos \theta, \quad (6.34)$$

Diese Gleichung beschreibt Kegelschnitte, d.h. Schnittkurven zwischen einem Kegel und einer Ebene



Neben dem Parameter  $\alpha$ , der im Wesentlichen vom Drehimpuls gesteuert wird, wird die Form der Bahnkurve von der Exzentrizität  $\varepsilon$  und damit (für festes  $l$ ) von der Energie gesteuert.





Nach (6.34) ergibt sich für die Apsiden ( $\theta=0$  entspricht  $r_{\min}$ )

$$r_{\min} = \frac{\alpha}{1+\varepsilon} \quad , \quad r_{\max} = \frac{\alpha}{1-\varepsilon} \quad (6.35)$$

Daraus folgt für die große Halbachse

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} (r_{\min} + r_{\max}) = \frac{1}{2} \alpha \left( \frac{1-\varepsilon + 1+\varepsilon}{1-\varepsilon^2} \right) \\ &= \frac{\alpha}{1-\varepsilon^2} = \frac{k}{2|\varepsilon|} \end{aligned} \quad (6.36)$$

Entsprechend kann man die Apsiden durch die große Halbachse ausdrücken.

$$r_{\min} = a(1-\varepsilon) \quad , \quad r_{\max} = a(1+\varepsilon) \quad (6.37)$$

Damit folgt, dass der Focus (in dem das Kraftzentrum liegt) um  $a\varepsilon$  vom Mittelpunkt der Ellipse verschoben ist. Mit elementarer Trigonometrie folgt

für die kleine Halbachse aus der Bewegungsgleichung (6.34)

$$b = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{l}{\sqrt{2\mu|\varepsilon|}} \quad (6.38)$$

Daraus folgt mit (6.36) der Zusammenhang

$$b = \sqrt{\alpha a} \quad (6.39)$$

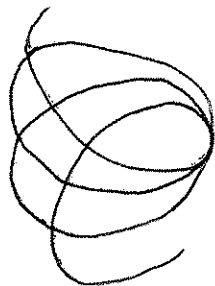
Die Tatsache, dass die Bahnkurve eine Ellipse ist mit dem Kraftzentrum (z.B. Sonne) in einem Focus, entspricht genau dem Inhalt des 1. Keplerschen Gesetzes.

Vom Blickwinkel der allgemeinen Bewegungsgleichung (6.30)

$$\Theta(r) = \int \frac{\frac{L}{r^2} dr}{\sqrt{2\mu} \sqrt{E - U(r) - \frac{L^2}{2\mu r^2}}} \quad (6.46)$$

muss dies als Besonderheit des  $U(r) \sim \frac{1}{r}$ -Potentials gewertet werden; dazu muss nämlich das Integral auf der rechten Seite von  $r_{\min}$  nach  $r_{\max}$  genau  $\pi$  ergeben, damit z.B. nach einem Umlauf in der radialen Bewegung  $r_{\min} \rightarrow r_{\max} \rightarrow r_{\min}$  genau ein Winkelumlauf von  $2\pi$  erreicht ist.

Z.B. erwarten wir daher für leichte Abweichungen vom  $\frac{1}{r}$ -Potential, dass das obige Integral von  $r_{\min}$  bis  $r_{\max}$  nicht genau  $\pi$  ergibt. In diesem Fall schließt der Orbit nicht und wir erwarten Verschiebungen des Perihels





Da in der Tat im Sonnensystem die Anwesenheit weiterer Planeten sowie allgemein relativistische Effekte zu kleinen Abweichungen vom  $\frac{1}{r}$ -Potential führen, werden solche Perihelverschiebungen insbesondere beim Merkur (sonnen-nächster Planet mit großer Exzentrizität) beobachtet. Tatsächlich war die Erklärung der bis dahin unvollständig verstandenen Perihelverschiebung des Merkurs eines der ersten Triumphe von Einsteins allgemeiner Relativitätstheorie.

Beispiel: Eigenschaften der Planetenbahnen im Sonnensystem

	$a$ [A.U.]	Periode [Jahre]	$\epsilon$	Massen [Erdmassen]
Sonne	-	-	-	333 480
Erde	1	1	0.0167	1
Merkur	0.3871	0.2408	0.2056	0.0543
Mars	1.5237	1.8809	0.0934	0.1071
Saturn	9.5388	29.458	0.0557	~95
Pluto	39.518	248.430	0.2486	< 0.1 ~0.002
Halley	18	76	0.967	$\sim 3 \cdot 10^{-11}$

$1 \text{ A.U.} = 1.495 \cdot 10^{11} \text{ m}$  ,  $\text{Erdmasse} = 5.976 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Schließlich wollen wir die Periode  $T$  der elliptischen Bewegung bestimmen. Diese erhalten wir aus der Flächengeschwindigkeit (6.15)

$$dA = \frac{l}{2m} dt \quad (6.41)$$

$$\Rightarrow \int_0^T dt = \frac{2m}{l} \int_0^A dA \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{T = \frac{2m}{l} A}} \quad (6.42)$$

Die Fläche einer Ellipse ist gegeben durch

$$A = \pi a b \stackrel{(6.36)}{=} \pi \frac{k}{2|E|} \frac{l}{\sqrt{2m|E|}} = \frac{\pi k l}{2 \sqrt{m} |E|^{3/2}} \quad (6.43)$$

$$\stackrel{(6.42)}{\Rightarrow} \underline{\underline{T = \pi k \sqrt{\frac{m}{2}} |E|^{-3/2}}}, \quad (6.44)$$

d.h. im Keplerproblem hängt die Periode nur von der Energie, nicht aber vom Drehimpuls ab. Da die Energie über  $a = \frac{(6.36)k}{2|E|}$  direkt mit der großen Halbachse verknüpft ist, lässt sich die Periode auch in der

Form

$$\boxed{T^2 = \frac{4\pi^2 m}{k} a^3} \quad (6.45)$$

schreiben

Dieses Resultat, dass die Quadrate der Perioden proportional zu den Kuben der Halbachsen sind, nennt man 3. Keplersches Gesetz.

Kepler nahm an, dass für alle Planeten die gleiche Proportionalitätskonstante im Gesetz auftaucht. Tatsächlich enthält (6.45) die reduzierte Masse  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  und die Konstanten  $k = G(m_1 + m_2)$ , d.h. es gilt

$$T^2 = \frac{4\pi^2 m_1 m_2}{G m_1 m_2 (m_1 + m_2)} a^3 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3, \quad (6.46)$$

d.h. für jeden Planeten gilt mit  $m_1 + m_2 = m_{\text{Sonne}} + m_{\text{Planet}}$  eine leicht verschiedene Proportionalitätskonstante. Da im Sonnensystem allerdings  $m_{\text{Sonne}} \gg m_{\text{Planet}}$  gilt, ist das 3. Keplersche Gesetz in der Form

$$T^2 \approx \frac{4\pi^2}{G M_{\text{Sonne}}} a^3 \quad (6.47)$$

eine sehr gute Näherung.