5. Das Hamiltonsche Prinzip

5.1 Lagrange'sche Dynamik

Die Newtonsche Mechanik lässt sich auch alternativ zu den Newtonschen Gesetzen durch ein Wirkungsprinzip formulieren. Da sich solche Wirkungsprinzipien in sehr vielen Teildisziplinen der Physik wiederfinden, ist ein gründliches Verständnis dieses Prinzips in der Mechanik besonders nützlich.

Die Historie der Wirkungsprinzipien in der Physik ist sehr reichhaltig. Hier wollen wir uns im Folgenden auf konservative Systeme beschränken für welche sich das Hamiltonsche Prinzip (Hamilton 1834, 1835) formulieren lässt

> Unter allen möglichen Pfaden entlang derer sich ein Dynamisches System innerhalb eines vorgegebenen Zeitintervals verträglich mit den Zwangsbedingungen bewegen kann, wird derjenige Pfad ausgewählt, der das Zeitintegral der Differenz zwischen kinetischer und potentieller Energie minimiert.

Die angesprochene Differenz zwischen kinetischer Energie $T = T(\dot{x}_i)$ und potentieller Energie $U = U(x)$

bezeichnet man als Lagrange-Funktion

$$L = L(x_i, \dot{x}_i) := T - U \qquad (5.1)$$

Das angesprochene Zeitintegral nennt man Wirkung

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \; L(x_i, \dot{x}_i) \; . \qquad (5.2)$$

Mit Hilfe der Variationsrechnung lautet das Hamiltonsche Prinzip folglich

$$0 = \delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \; L \; . \qquad (5.3)$$

Damit ist das Hamiltonsche Prinzip technisch äquivalent zu einer Extremalwertaufgabe ähnlich dem vorhergehenden Abschnitt. Es gilt das "Wörterbuch"

Kapitel 4		Kapitel 5
x	$\Rightarrow$	t
$y_i(x)$	$\rightarrow$	$x_i(t)$
$y_i'(x)$	$\rightarrow$	$\dot{x}_i(t)$
$f(y, y'; x)$	$\rightarrow$	$L(x_i, \dot{x}_i; t)$
$J[y]$	$\rightarrow$	$S[x]$

(5.4)

Die Extremalwert bildende Bahnkurve muss daher das Analog der Euler-Gleichung erfüllen:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0} \tag{5.5}$$

Im Zusammenhang mit dem Hamiltonschen Prinzip nennt man die Gleichung nun Euler-Lagrange-Gleichung

Als erstes Beispiel betrachten wir den harmonischen Oszillator, der nun beschrieben ist durch die Lagrange-Funktion

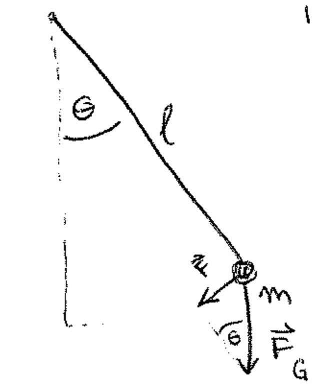
$$L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 \tag{5.6}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -kx \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = -(kx + m\ddot{x}) \, , \tag{5.7}$$

was genau der Newtonschen Bewegungsgleichung entspricht.

Als zweites weniger triviales Beispiel betrachten wir das mathematische Pendel, d.h. einen an einer festen Stange (masselos) reibungsfrei in einer Ebene schwingenden Massepunkt m im homogenen Schwerefeld



Die bei einer endlichen Auslenkung θ auf den Massepunkt wirkende Rückstellkraft entspricht der Tangentialkomponente der Gravitationskraft entlang der Bahnkurve des Massepunkts.

$$|\vec{F}| = |\vec{F}_G| \sin\theta = m g \sin\theta \tag{5.8}$$

Mit der Beschleunigung

$$\ddot{x} = l \ddot{\theta} , \tag{5.9}$$

ergibt sich die Newtonsche Bewegungsgleichung

$$m l \ddot{\theta} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{"Rückstellkraft"}}}{-} m g \sin\theta . \tag{5.10}$$

Im Lagrange-Formalismus benötigen wir die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \tag{5.11}$$

sowie die potentielle Energie

$$U = m \cdot g \cdot h = m \cdot g l (1 - \cos\theta) \tag{5.12}$$

und erhalten die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - m g l (1 - \cos\theta) \tag{5.13}$$

Da wir bei der Ableitung der Euler-Lagrange-Gleichungen zu keiner Zeit die explizite Annahme verwenden mussten, dass die zu suchende Funktion $x_i(t)$ einer kartesischen Koordinate entspricht, wenden wir nun einfach die EL Gleichung auf die Winkelvariable θ an:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \tag{5.14}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = -\left(mgl\sin\theta + ml^2\ddot{\theta}\right) \tag{5.15}$$

was (für $l \neq 0$) mit (5.10) identisch ist.

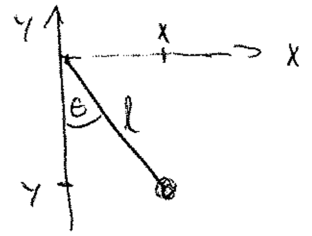
Dieses Resultat ist aus zwei Gründen bemerkenswert:

- die Tatsache, das die Lagrange'sche Dynamik auch durch Winkelvariable formuliert werden kann, deutet an, dass die Methode allgemeiner anwendbar ist, als vielleicht implizit vermutet.

- in beiden Beispielen wurde bei der Anwendung des Hamiltonschen Prinzips der Kraftbegriff verwendet. Benötigt werden lediglich Energiebegriffe. Daher kann man vermuten, dass das Hamiltonsche Prinzip auch in solchen Systemen anwendbar ist, in denen es einen Energiebegriff gibt, ohne notwendigerweise auf den Kraftbegriff der Newtonschen Mechanik zurückgreifen zu müssen.

5.2 Verallgemeinerte Koordinaten

Wie wir am Beispiel des mathematischen Pendels gesehen haben, erlaubt der Lagrange-Formalismus die Verwendung von nicht-kartesischen Koordinaten. In kartesischen Koordinaten benötigen wir zwei Komponenten, z.B. x und y, um den Massepunkt in der Ebene zu positionieren.



Durch die feste Stange der Länge l entsteht eine Zwangsbedingung

$$g(x,y) = x^2+y^2-l^2 = 0 , \tag{5.16}$$

die die Zahl der tatsächlichen Freiheitsgrade auf einen Freiheitsgrad (z.B. den Winkel θ) reduziert. Durch die Angabe dieses einen Freiheitsgrads ist der Zustand des Systems vollständig spezifiziert. Diese Überlegung lässt sich verallgemeinern. Für ein System aus n Massepunkten benötigen wir im 3-dimensionalen Raum $3n$ kartesische Koordinaten um den Zustand des Systems zu einem festen Zeitpunkt zu bestimmen. Wenn nun z.B. manche Massepunkte fest verbunden sind oder anderweitig in ihrer Bewegung eingeschränkt sind, kann dies zu m Zwangsbedingungen führen, so dass die Zahl der tatsächlichen Freiheitsgrade gegeben ist durch

$$s = 3n - m \tag{5.17}$$

Wir benötigen also s unabhängige Variable, um das System zu beschreiben. Dabei muss es sich nicht unbedingt um kartesische Koordinaten handeln. Viele Möglichkeiten wie z.B. Winkel- oder Energie-, ..., Variable sind denkbar.

Am obigen Beispiel wird klar, dass es in der Regel keine eindeutige Wahl dieser s Variablen gibt. Unter Berücksichtigung der Zwangsbedingung (5.16) kann man z.B. die y-Koordinate auch durch $y = y(x) = \sqrt{l^2 - x^2}$ ausdrücken und die Bewegungsgleichung mit der Variablen x formulieren. (was in diesem Beispiel die Bewegungsgleichung komplizierter macht.) Für die geschickte Wahl der s Koordinaten gibt es also kein Rezept, sondern es bedarf einer gewissen physikalischen Einsicht in das System.

Diese verallgemeinerten Koordinaten bezeichnen wir i.A. mit den Buchstaben

$$q_1, q_2, \dots q_s \qquad (5.18)$$

Die Kartesischen Koordinaten lassen sich dann unter Berücksichtigung der Zwangsbedingung aus den verallgemeinerten Koordinaten rekonstruieren.

$$x_{\alpha i} = x_{\alpha i}(q_1, q_2, \dots, q_s) \equiv x_{\alpha i}(q_j) \qquad (5.19)$$

mit $\alpha = 1, \dots, m$ und $i = 1, 2, 3$ ($j = 1, \dots, s$).

Beim mathematischen Pendel finden wir z.B mit

$q = \theta$:

$$\begin{aligned} x &= l \sin\theta &&= l \sin q \\ y &= -l \cos\theta &&= -l \cos q \end{aligned} \qquad (5.20)$$

Im Allgemeinen hängen dann die kartesischen Geschwindigkeiten sowohl von den verallgemeinerten Geschwindigkeiten als auch Koordinaten ab

$$\dot{x}_{\alpha i} = \dot{x}_{\alpha i}(q_j, \dot{q}_j) \qquad (5.21)$$

z.B. $\dot{x} \overset{(5.20)}{=} l \cos q \cdot \dot{q}$ beim mathematischen Pendel. Möglich sind in (5.21) auch explizite Abhängigkeiten von der Zeit

$(5.19)\&$

$$x_{\alpha i}(q_j, t) \quad \text{und} \quad x_{\alpha i}(q_j, \dot{q}_j, t) \,, \tag{5.22}$$

falls z.B. die q_j's z.T. "mitbewegte" Koordinaten sind.

Der Raum aller möglichen Zustände eines Systems zu einer gegebenen Zeit wird durch die S Variablen q_j aufgespannt. Diesen Raum nennen wir <u>Konfigurationsraum</u>. Die Bewegung eines solchen Systems wird dann durch eine Kurve im Konfigurationsraum $q_j(t)$ beschrieben, die man i.A. mit "Pfad" bezeichnet. Dieser Pfad sollte nicht mit der Bahnkurve $x_{\alpha i}(t)$ im Ortsraum verwechselt werden. Durch jeden Punkt $q_j(t)$ im Konfigurationsraum können i.A. mehrere mögliche Pfade existieren. Z.B. kann ein System an einem Punkt q_j mit jeweils verschiedenen (verallgemeinerten) Anfangsgeschwindigkeiten starten.

5.3 Euler-Lagrange-Gleichungen für generalisierte Koordinaten

Das nützliche an der Verwendung generalisierter (verallgemeinerter) Koordinaten ist, das die Zwangsbedingungen per constructionem automatisch berücksichtigt werden.
Daher lasst sich das Hamiltonsche Prinzip, das auf Seite 89 noch explizit auf mögliche Zwangsbedingungen bezug nimmt, im Konfigurationsraum leichter formulieren:

> Unter allen möglichen Pfaden entlang derer sich ein System innerhalb eines vorgegebenen Zeitintervals zwischen zwei Punkten im Konfigurationsraum bewegen kann, wird derjenige Pfad ausgewählt, der die Wirkung minimiert.

Wenn wir die Lagrange-Funktion durch die verallgemeinerten Koordinaten ausdrücken

$$L = T(q_i, \dot{q}_i; t) - U(q_j; t) = L(q_j, \dot{q}_j; t), \quad (5.23)$$

lautet das Wirkungsprinzip

$$0 = \delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_j, \dot{q}_j; t)\, dt = 0 \quad (5.24)$$

Nach den Regeln der Variationsrechnung führt dies auf die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad , j = 1,2,\ldots,S \qquad (5.25)$$

für Pfade im Konfigurationsraum.

In der Literatur werden diese Gleichungen oft "Lagrange-Gleichungen zweiter Art" genannt (die 1. Art folgt weiter unten)

Wichtig ist die Gültigkeitsbedingungen für (5.25) festzuhalten

1. Die zur Dynamik der q_j-Variablen beitragenden Kräfte müssen aus einem Potential ableitbar sein
   (dies muss nicht für die Kräfte gelten, die zu den Zwangsbedingungen führen)

2. Die Zwangsbedingungen müssen Beziehungen zwischen den Koordinaten herstellen und können von der Zeit abhängen. Mit anderen Worten, die Zwangsbedingungen müssen vom Typ

$$g_k = g_k(x_{\alpha i}, t) = 0 \quad , k = 1,2,\ldots m \qquad (5.26)$$

sein.

Falls die Zwangsbedingungen vom Typ (5.26) sind, heißen sie <u>holonom</u>

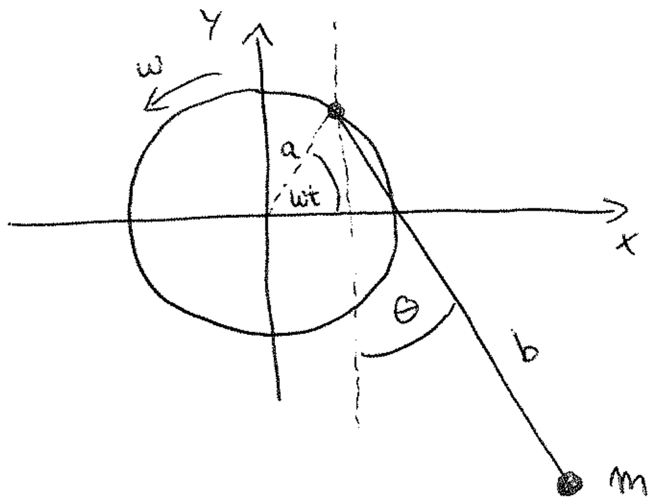
Falls die Zwangsbedingungen nicht explizit von der Zeit abhängen, heißen sie <u>skleronom</u>

$$g_k = g_k(x_{\alpha i}) = 0 \quad . \tag{5.27}$$

Zeitabhängige Zwangsbedingungen nennt man <u>rheonom</u>.

Die bisher getroffene Einschränkung auf konservative Kräfte erfüllt beide Bedingungen. Für die Anwendung des Hamiltonschen Prinzips ist diese Einschränkung aber nicht notwendigerweise erforderlich. Erweiterungen auf nichtkonservative Kräfte ebenso wie auf bestimmte nicht-holonome Zwangsbedingungen sind möglich.

Beispiel: als Beispiel für rheonom-holonome Zwangsbedingungen betrachten wir ein mathematisches Pendel, dass an einer rotierenden Scheibe aufgehängt ist:



Die Scheibe rotiert mit Kreisfrequenz ω.

Die Position des Massepunktes m in der x,y-Ebene hat die Koordinaten

$$x = a \cos \omega t + b \sin \theta$$
$$y = a \sin \omega t - b \cos \theta \qquad (5.27.1)$$

Daraus ergeben sich die Geschwindigkeiten

$$\dot{x} = -a\omega \sin \omega t + b\dot{\theta} \cos \theta$$
$$\dot{y} = a\omega \cos \omega t + b\dot{\theta} \sin \theta, \qquad (5.27.2)$$

Sowie die Beschleunigungen

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} &= -a\omega^2 \cos\omega t + b\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2 \sin\theta\right) \\
\ddot{y} &= -a\omega^2 \sin\omega t + b\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2 \cos\theta\right)
\end{aligned}
\qquad (5.27.3)
$$

Die kinetische Energie ist offensichtlich

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) \qquad (5.27.4)$$

und die potentielle Energie mit Normierung $U(y=0)=0$ ist

$$U = m g y \, . \qquad (5.27.5)$$

Die Zwangsbedingung, die x und y (θ-unabhängig) verknüpft, ist

$$g(x,y;t) = (x - a\cos\omega t)^2 + (y - a\sin\omega t)^2 - b^2 = 0 \qquad (5.27.6)$$

Wir könnten nun (5.27.6) benutzen, um x oder y nach der jeweils anderen Koordinate aufzulösen. Aus den obigen Überlegungen geht allerdings hervor, dass die Variable θ als generalisierte Koordinate unmittelbar geeignet ist, um $x(t)$ und $y(t)$ über (5.27.1) direkt zu rekonstruieren.

Die Lagrange-Funktion lautet in dieser Variablen

$$L = \frac{m}{2}\left(a^2\omega^2 + b^2\dot\theta^2 + 2b\dot\theta a\omega \sin(\theta - \omega t)\right) - mg\,(a \sin \omega t - b\cos\theta) \qquad (5.27.7)$$

Die Lagrange-Gleichung 2. Art benötigt

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\theta} = m b^2\ddot\theta + m b a\omega\,(\dot\theta - \omega)\cos(\theta - \omega t)$$

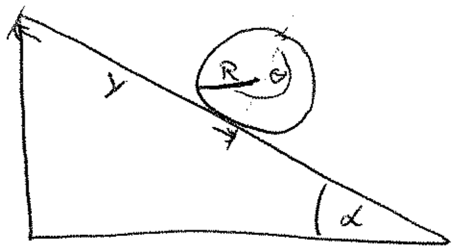
$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = m b\dot\theta a\omega\cos(\theta - \omega t) - mgb\sin\theta \qquad (5.27.8)$$

und führt auf die Bewegungsgleichung

$$\ddot\theta = \frac{\omega^2 a}{b}\cos(\theta - \omega t) - \frac{g}{b}\sin\theta. \qquad (5.27.9)$$

Für $\omega \to 0$ entspricht dies der in (5.15) gefundenen Bewegungsgleichung des mathematischen Pendels. Die Diskussion der Lösungen wollen wir hier nicht weiter verfolgen.

Beispiel: hangabwärts rollender Zylinder



Wir betrachten einen schlupffrei rollenden Zylinder im homogenen Gravitationsfeld auf einer schiefen Ebene.

Die kinetische Energie des Zylinders setzt sich zusammen aus der kinetischen Energie seiner Schwerpunktsbewegung*

$$T_S = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 \tag{5.28}$$

und seiner Rotationsbewegung

$$T_R = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 , \tag{5.29}$$

wobei M die Masse des Zylinders, und $I = \frac{1}{2} M R^2$ sein Trägheitsmoment* ist:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \tag{5.30}$$

---

* Die Begriffe "Schwerpunkt" und "Trägheitsmoment" werden später präzisiert.

Die Potentielle Energie ist

$$U = Mg\,(l-y)\,\sin\alpha\,, \tag{5.31}$$

wobei wir die Länge l so gewählt haben, dass $U=0$ für $l=y$.

Wir erhalten die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 - Mg\,(l-y)\,\sin\alpha \tag{5.32}$$

Die Eigenschaft des schlupffreien Rollens führt auf eine Zwangsbedingung (vgl. (4.49))

$$g(y,\theta) = y - R\theta = 0\,. \tag{5.33}$$

Wir können nun (5.33) benutzen, um $y = y(\theta)$ als verallgemeinerte Koordinate aufzufassen.

Insbesondere gilt

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{y}}{R}\,. \tag{5.34}$$

Damit erhalten wir die Lagrangefunktion

$$L = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{4} M \cancel{R^2} \frac{\dot{y}^2}{\cancel{R^2}} - Mg(l-y)\sin\alpha$$

$$= \frac{3}{4} M \dot{y}^2 - Mg(l-y)\sin\alpha \qquad (5.35)$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung führt uns auf

$$0 = \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = Mg\sin\alpha - \frac{3}{2} M \ddot{y}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\ddot{y} = \frac{2g\sin\alpha}{3}}} \, . \qquad (5.36)$$

Es ist instruktiv, dieses Resultat mit dem Fall zu vergleichen, dass der Zylinder reibungsfrei die schiefe Ebene herabrutscht. In diesem Fall hätten wir

$$\ddot{y} = g\sin\alpha \qquad (5.37)$$

gefunden. D.h. die Zwangsbedingung des schlupffreien Rollens reduziert die Beschleunigung um einen Faktor $\frac{2}{3}$.

Weitere Beispiele folgen in den Übungen.