4. Methoden der Variationsrechnung

In den folgenden Abschnitten werden wir die Newtonschen Bewegungsgleichungen in eine konzeptionell allgemeinere Form bringen. Die resultierenden Lagrange-Gleichungen werden sich als auf viele Bereiche der theoretischen Physik verallgemeinerbar erweisen. Diese Gleichungen folgen wiederum aus einem einfachen Wirkungsprinzip, dem Hamiltonschen Prinzip. Die für diesen Themenkomplex notwendige mathematische Methode ist die Variationsrechnung, die wir zunächst losgelöst von der Physik kennenlernen wollen.

Eine typische Fragestellung ist z.B. diejenige nach einer kürzesten Distanz zwischen Punkten (ggf. unter bestimmten Bedingungen), oder der kürzesten Zeit für die Bewegung zwischen zwei Punkten. Ein einfaches bekanntes Beispiel für die Themenstellung ist das Fermatsche Prinzip für den optischen Weg eines Lichtstrahls, der denjenigen Pfad nimmt, der die kürzeste Zeit benötigt.

4.1 Extremwertbildung für ein Funktional

Eine typische Problemstellung für die Variationsrechnung lautet folgendermaßen: wir betrachten ein Integral vom Typ

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y'; x)\, dx \quad , \qquad (4.1)$$

wobei f eine Funktion ist, die zunächst von einer unabhängigen Variable x abhängt. Ein Teil dieser Abhängigkeit kann in Form einer Abhängigkeit von einer Funktion und ihrer Ableitung

$$y(x) \quad , \quad y'(x) = \frac{dy(x)}{dx} \qquad (4.2)$$

vorliegen (z.B. $f(y, y'; x) = y^2(x) + (y'(x))^2 + c \cdot x$).

Für gegebenes $f(y, y'; x)$ ist J eine Zahl, deren Wert wir in Abhängigkeit von der Form von $y(x)$ studieren wollen. Somit hängt J nicht lediglich von einer Variablen, sondern von einer Funktion ab, und wir schreiben

$$J = J[y] \qquad (4.3)$$

für das Funktional J, welches von $y = y(x)$ abhängt.

In der Variationsrechnung suchen wir nun nach einem Extremum (entweder Minimum oder Maximum) von $J[y]$.
D.h. wir suchen diejenige Funktion $y(x)$, die J extremal werden lässt. Diese Extremalwert bildende Funktion $y(x)$ soll also die Eigenschaft haben, dass jede "benachbarte" Funktion J von seinem Extremwert entfernt unabhängig davon wie nahe sie an $y(x)$ liegt.
Im Folgenden wollen wir den Extremalwert von J unter der Einschränkung suchen, dass

$$y(x_1) \quad \text{und} \quad y(x_2)$$

fest vorgegeben sind. Sei nun die tatsächlich Extremalwert bildende Funktion gegeben durch $y(x)$.
Dann lässt sich eine 1-parametrige Schaar von variierten Funktionen schreiben als

$$y(\alpha, x) = y(x) + \alpha\, \eta(x) \tag{4.4}$$

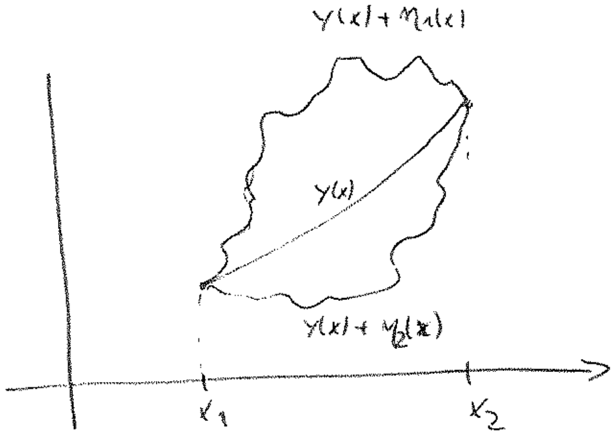
wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein beliebiger Variationsparameter ist, und $\eta(x)$ eine <u>beliebige</u> differenzierbare Funktion sei, die an den Randpunkten verschwinde:

$$\eta(x_1) = 0 = \eta(x_2). \tag{4.5}$$

Die Extremalbedingung an $J[y]$ lässt sich nun als Stationaritätsbedingung an α formulieren:

$$\left.\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = 0 \,, \tag{4.6}$$

was für alle zulässigen Funktionen $\eta(x)$ gelten muss.



Wir berechnen nun die Ableitung in (4.6) explizit:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{x_1}^{x_2} f(y, y'; x)\, dx \,. \tag{4.7}$$

Da die Integralgrenzen x_1, x_2 fixiert sind, folgt

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right) dx \,. \tag{4.8}$$

Mit (4.4) folgt

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \eta(x) \quad , \quad \frac{\partial y'}{\partial \alpha} = \frac{d\eta}{dx} = \eta'(x) \tag{4.9}$$

und somit

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} \overset{(4.8)}{=} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d\eta(x)}{dx} \right) dx \tag{4.10}$$

Mit partieller Integration folgt für den zweiten Term

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx}\eta \, dx = \left[\frac{\partial f}{\partial y'} \eta \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) \, dx \tag{4.11}$$

Da $\eta(x_{1,2}) = 0$, verschwindet der Randterm und es folgt

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} \overset{(4.10)}{=} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \eta(x) - \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) \right) dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) \, dx \, . \tag{4.12}$$

Implizit ist die rechte Seite noch von α abhängig, da $\frac{\partial f}{\partial y}$ und $\frac{\partial f}{\partial y'}$ an der Stelle $y = y(\alpha, x)$ und $y' = y'(\alpha, x)$ ausgewertet werden müssen. Diese Abhängigkeit verschwindet jedoch, da nach Voraussetzung (4.6) $\alpha = 0$ gesetzt werden soll:

$$\Rightarrow \quad 0 = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \eta(x) \, dx \tag{4.13}$$

Im Allgemeinen kann man aus dem Verschwinden eines Integrals nicht auf das Verschwinden des

Integranden schließen. Im vorliegenden Fall jedoch, soll (4.13) für jedes beliebige $\eta(x)$ mit (4.5) gelten.

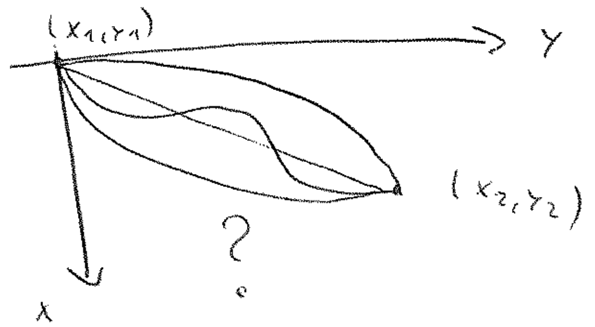
Dies kann nur gelten, wenn

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0} \qquad (4.14)$$

Euler - Gleichung

Die Euler-Gleichung liefert eine notwendige Bedingung an $y(x)$, damit $J[y]$ einen Extremalwert annimmt.

Beispiel: Beim Brachistochrone-Problem wird derjenige Pfad gesucht, auf dem ein (reibungsfreier) Massepunkt im homogenen Gravitationsfeld von einem Startpunkt (x_1, y_1) in Ruhe startend zu einem niedrigeren Punkt (x_2, y_2) in kürzester Zeit gelangt.



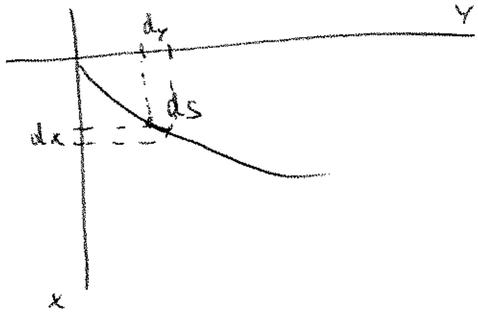
Wir wählen oBdA den Startpunkt (x_1, y_1) als Ursprung des Koordinatensystems. Die x-Achse zeige "nach unten", sodass $x>0$ die gefallene Höhe beschreibt. Das Kraftfeld ist konservativ. Die Gesamtenergie ist erhalten $T+U = \text{const.}$ Wir wählen das Potential so, dass $U(x_1) = U(x=0) = 0$, d.h.

$$U(x) = -mgx. \qquad (4.15)$$

Da das Teilchen sich anfänglich in Ruhe befindet, gilt zu Anfang $T=0$ und damit $E = T+U = 0$. Unter Einfluss der Schwerkraft beschleunigt nun das Teilchen, d.h. $T>0$; verliert dabei aber potentielle Energie, d.h. $U<0$. Mit $T = \frac{1}{2}mv^2$ gilt nach gefallener Höhe x für die Geschwindigkeit,

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgx \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gx} \qquad (4.16)$$

Für ein Pfadelement ds gilt



$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$
$$= dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \qquad (4.17)$$

Damit ergibt sich die Zeit für das Durchlaufen der Bahnkurve aus

$$t = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \frac{ds}{v} = \int_{x_1=0}^{x_2} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gx}}\, dx \qquad (4.18)$$

Um t zu minimieren, identifizieren wir $t \sim J$ (in oben genannter Nomenklatur) und bis auf einen konstanten Faktor

$$f = \left(\frac{1+y'^2}{x}\right)^{1/2} \qquad (4.19)$$

Da $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ vereinfacht sich die Euler-Gleichung auf

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0 . \qquad (4.20)$$

Damit folgt $\frac{\partial f}{\partial y'} = \text{const.}$ Diese Konstante nennen wir

$$\frac{1}{\sqrt{2a}} := \frac{\partial f}{\partial y'} \qquad (4.21)$$

Die Ableitung liefert

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \cdot y' \qquad (4.22)$$

Wir quadrieren beide Seiten im (4.21) und erhalten

$$\frac{1}{2a} = \frac{y'^2}{x(1+y'^2)}, \tag{4.23}$$

was sich schreiben lässt als $\left(y'^2 = \frac{x}{2a-x} = \frac{x^2}{2ax-x^2} \right)$

$$y = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}} \tag{4.24}$$

Mit dem Variablenwechsel

$$\begin{aligned} x &= a(1-\cos\theta) \\ dx &= a \sin\theta \, d\theta \end{aligned} \tag{4.25}$$

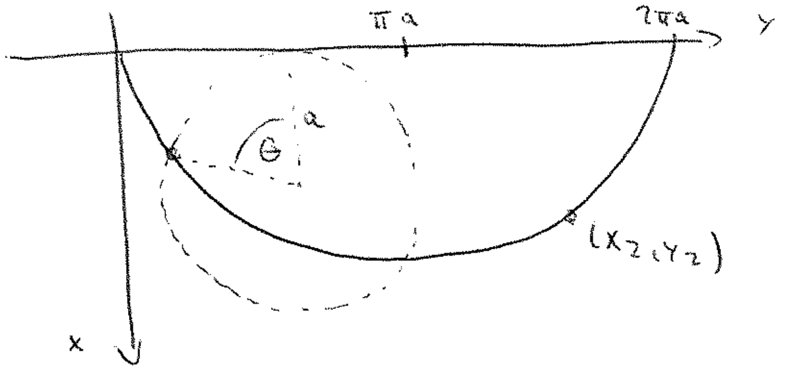
schreibt sich das Integral $\left(\frac{1}{\sqrt{(2ax-x^2)}} = \left(2a^2(1-\cos\theta) - a^2(1-\cos\theta)^2\right)^{-1/2} = \left(a^2(1-\cos^2\theta)\right)^{-1/2} = \frac{1}{a}\frac{1}{\sin\theta} \right)$

$$\begin{aligned} y &= \int a(1-\cos\theta)\,d\theta \\ &= a(\theta - \sin\theta) + \text{const}, \end{aligned} \tag{4.26}$$

wobei die Konstante für die Anfangsbedingung $y(\theta=0)=0$ verschwindet. Das Resultat

$$\begin{aligned} x &\overset{(4.25)}{=} a(1-\cos\theta) \\ y &= a(\theta - \sin\theta) \end{aligned} \tag{4.27}$$

parametrisiert eine <u>Zykloide</u>, d.h. die Bahnkurve eines Massepunkts auf einem Rad beim Abrollen des Rades



Die Konstante a entspricht dabei dem Radius des Rades.

Diese Bahnkurve entspricht der Lösung des Problems: Die Brachistochrone entspricht einer Zykloide mit angepasstem Radius a, so dass der Punkt (x_2, y_2) auf der Zykloide liegt.

(NB: Die Variationsrechnung besagt zunächst nur, dass die Zykloide die Bahnzeit t extremal macht. Es könnte sich zunächst noch um ein Maximum oder ein Minimum handeln. Das es tatsächlich ein Minimum ist lässt sich durch Vergleich mit anderen Bahnkurven (z.B gerade Linie) plausibel machen.)

Verallgemeinerung der Euler-Gleichung auf mehrere variable Funktionen

Für den Fall, dass ein Funktional J von mehreren unabhängigen Funktionen abhängt

$$J = J[y_1, y_2, y_3, \dots] , \tag{4.28}$$

d.h.

$$f = f(y_1, y_1', y_2, y_2', y_3, y_3', \dots ; x) \tag{4.29}$$

lässt sich die Euler-Gleichung leicht verallgemeinern. Dazu fassen wir die Funktionen $y_1 \dots y_n$ in einem n-Tupel zusammen und schreiben

$$f = f(y_i, y_i' ; x) \qquad i = 1, \dots n \tag{4.30}$$

In Analogie zu (4.4) schreiben wir für die variierte Funktion

$$y_i(\alpha, x) = y_i(x) + \alpha \eta_i(x) . \tag{4.31}$$

Die Ableitung nach α wirkt dann entsprechend auf jede Komponente y_i bzw y_i', und wir erhalten analog zu (4.12):

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_i'} \right) \eta_i(x)\, dx \tag{4.32}$$

Da diese Ableitung am Extremum wieder für beliebige $\eta_i(x)$ gelten muss, folgt für jedes x und jedes i separat

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_i'} = 0 \quad , i = 1, \ldots, n \qquad (4.33)$$

4.2 Die Euler-Gleichung mit Zwangsbedingungen

Wir betrachten nun den Fall, dass wir diejenige Funktion finden wollen, die J extremal macht, aber gleichzeitig eine Neben- oder Zwangsbedingung erfüllt; man denke z.B. an einen extremalen Pfad, der zudem in einer bestimmten Fläche, die wir durch die Koordinaten y und z parametrisieren wollen, liegen soll.

Allgemein beschreiben wir diese Fläche mit Hilfe einer Zwangsbedingung

$$g\,(y, z\,;x) = 0 \qquad (4.34)$$

z.B. die Bewegung innerhalb bzw. auf einer Kugeloberfläche erfüllt die Zwangsbedingung

z.B. $$g = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0, \qquad (4.35)$$

wobei r der Radius der Kugeloberfläche ist.

Für einen gegebenen Wert der Koordinate x müssen $y(x)$ und $z(x)$ die Bedingung (4.35) erfüllen.

Wir betrachten also nun ein Variationsproblem der Form

$$J[y,z] = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', z, z'; x)\, dx \tag{4.36}$$

Die entsprechend nach einem Parameter α differenzierte Größe lautet dann

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial z'} \right) \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right] dx \tag{4.37}$$

Der wichtige Unterschied zu den vorliegenden Betrachtungen ist nun, dass die Variationen $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ und $\frac{\partial z}{\partial \alpha}$ nicht mehr unabhängig voneinander sind; eine Variation in der y-Koordinate verlangt ein entsprechendes "Nachjustiren" in der z-Koordinate, damit die Zwangsbedingung (4.34) erfüllt bleibt. Die Ausdrücke in (..)-Klammern in (4.37) verschwinden also nicht mehr separat.

Die Ableitung der Zwangsbedingung nach α

liefert

$$\frac{dg}{d\alpha} = \left(\frac{\partial g}{\partial x} \underbrace{\frac{\partial x}{\partial \alpha}}_{=0} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right) = 0$$

$$= \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \alpha} \,. \qquad (4.38)$$

Mit

$$\begin{aligned} y(\alpha, x) &= y(x) + \alpha\, \eta_y(x) \\ z(\alpha, x) &= z(x) + \alpha\, \eta_z(x) \end{aligned} \qquad (4.39)$$

folgt

$$\frac{\partial g}{\partial y} \eta_y(x) = - \frac{\partial g}{\partial z} \eta_z(x) \,. \qquad (4.40)$$

Damit lässt sich die Abhängigkeit der Variationen quantifizieren

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \eta_z = - \left(\frac{\partial g / \partial y}{\partial g / \partial z} \right) \eta_y \qquad (4.41)$$

und aus (4.37) folgt

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) - \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial z'} \right) \left(\frac{\partial g / \partial y}{\partial g / \partial z} \right) \right] \eta_y(x)\, dx$$

$$(4.42)$$

Die Variation $\eta_y(x)$ ist nun nicht mehr eingeschränkt und es folgt entsprechend

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^{-1} = \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial z'}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^{-1}. \qquad (4.43)$$

Letztenendes sind mit $y(x)$ und $z(x)$ beide Seiten lediglich eine Funktion von x, die wir im Folgenden $-\lambda(x)$ nennen wollen. Damit ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} + \lambda(x)\frac{\partial g}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial z'} + \lambda(x)\frac{\partial g}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \qquad (4.44)$$

Nun haben wir 3 Funktionen zu bestimmen, $y(x)$, $z(x)$ und $\lambda(x)$. Zusammen mit der Zwangsbedingung (4.34) haben wir mit (4.44) entsprechend auch 3 Bestimmungsgleichungen. Dabei nennt man die zu bestimmende Funktion $\lambda(x)$ einen <u>Lagrange-Multiplikator</u>.

Die Verallgemeinerung des Verfahrens auf mehrere Freiheitsgrade y_i mit $i = 1, 2, \ldots m$

und mehrere Zwangsbedingungen

$$g_j(y_i;x) = 0 \quad , j = 1, 2, \ldots, n \,, \qquad (4.45)$$

folgt unmittelbar:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_i'} + \sum_j \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial y_i} = 0 \,. \qquad (4.46)$$

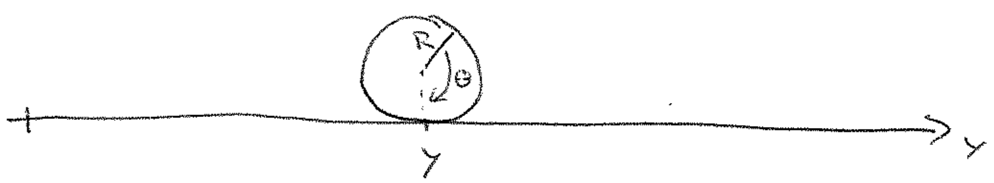
Damit haben wir $\underset{(4.46)}{\underset{\uparrow}{m}} + \underset{(4.45)}{\underset{\uparrow}{n}}$ Gleichungen für $\underset{\lambda_j(x)}{\underset{\uparrow}{m}} + \underset{y_i(x)}{\underset{\uparrow}{n}}$ Unbekannte Funktionen.

Damit in (4.46) und (4.45) die Zwangsbedingung in gleicher Struktur vorkommt, kann (4.45) auch differenziell formuliert werden

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g_j}{\partial y_i}\, dy_i = 0 \,. \qquad (4.47)$$

<u>Beispiel für Zwangsbedingungen</u>

Ein Rad auf einem Tisch hat zunächst die Freiheitsgrade der Position y und des Rotationswinkels Θ



Wenn das Rad nicht rutscht, besteht zwischen y und θ ein Zusammenhang:

$$y = R\theta , \tag{4.48}$$

wobei R der Radius des Rades ist und θ im Bogenlängen gemessen wird. Die zugehörige Zwangsbedingung kann geschrieben werden als

$$g(y,\theta) = y - R\theta = 0 \tag{4.49}$$

und es folgt

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 1 \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} = -R . \tag{4.50}$$

4.3 Die δ Notation

In der Variationsrechnung ist es zweckmäßig für die 1-parametrige Schar von deformierten Pfaden $y(x,\alpha)$ mit gleichzeitig beliebiger Funktion $\eta(x)$ eine verkürzte Schreibweise einzuführen.

Wir schreiben für

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha}\, d\alpha = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha}\, d\alpha \; dx \qquad (4.51)$$

vereinfacht auch

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y \; dx \qquad (4.52)$$

mit

$$\delta J = \frac{\partial J}{\partial \alpha}\, d\alpha \quad (\text{mit } \eta \text{ beliebig})$$

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial \alpha}\, d\alpha = \eta\, d\alpha \quad (\eta \text{ beliebig}), \qquad (4.53)$$

(wobei nach wie vor gelten soll, dass $\eta(x_1) = 0 = \eta(x_2)$.)

Damit können wir $\delta y(x)$ auch als beliebige infinitesimale Deformation von $y(x)$ verstehen. Die Extremalbedingung von J lautet dann

$$\delta J = \delta \int_{x_1}^{x_2} dx \; f(y, y', x) = 0 \qquad (4.54)$$