2. Newtonsche Mechanik

2.1 Newtonsche Gestze

Die Diskussion der Newtonschen Gesetze in der Literatur ist sehr vielfältig. Das mag daran liegen, dass es in der Tat verschiedene aber jeweils konsistente Betrachtungsweisen gibt, was an Newtons Axiomen Definition und was tatsächlich ein physikalisches Gesetz ist. Wir werden uns hier auf eine konsistente Sichtweise beschränken.

Wir beginnen mit dem

Lex Prima (Trägheitsgesetz):

> Jeder Körper beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.

Das erste Newtonsche Gesetz benutzt zwar schon den Begriff der Kraft, definiert diese aber nicht. Zudem besagt es nicht bezüglich welches Systems der Zustand der Ruhe oder Bewegung gemessen werden soll.

Wir interpretieren daher das Lex Prima als eine Definition von speziellen Systemen, den Inertialsystemen, die dadurch charakterisiert sind, das Körper ohne Krafteinwirkung in ihnen ruhen oder sich gleichförmig geradlinig bewegen. Alle folgenden Gesetze werden also bezogen auf Inertialsysteme (in allen anderen Systemen, z.B. rotierenden Systemen, können die Gesetze eine andere Form haben).

Aus dem Lex Prima folgt noch eine weitere Invarianzeigenschaft der klassischen Mechanik: hat man ein Inertialsystem gefunden, erhält man weitere Inertialsysteme durch all jene Systeme, die sich relativ zum ersten gleichförmig geradlinig bewegen. Denn auch in diesen (relativ zum ersten) bewegten Systemen sind kräftefreie Körper in Ruhe oder bewegen sich gleichförmig geradlinig. Dies ist das klassische Relativitätsprinzip. Daraus folgt eine 3-parametrige Schaar von Symmetrietransformationen, den

"Galilei-Boosts"

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \vec{v} \cdot t \,, \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \text{const} \,, \tag{2.1}$$

wobei $\vec{v}$ die vektorielle Relativgeschwindigkeit zwischen den Systemen ist.

Lex Secunda (Bewegungsgesetz):

Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.

Für die "Änderung der Bewegung" (Newton: mutatio motus) benötigen wir zunächst eine geeignete Bestimmungsgröße. Newton definiert dafür (an anderer Stelle) die Änderung des Impulses $\vec{p}$, wobei für einen Massepunkt mit Masse m gilt:

$$\vec{p} = m\,\vec{v} \,. \tag{2.2}$$

Hierbei ist die Geschwindigkeit $\vec{v} = \vec{v}(t)$ gegeben durch die Zeitableitung der Bahnkurve $\vec{r}(t)$:

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} . \qquad (2.3)$$

Lex Secunda spricht man von einer <u>Proportionalität</u> zwischen der Änderung des Impulses, also $\frac{d}{dt}\vec{p}(t)$ und der Kraft $\vec{F}$ (im vektoriellen Sinne). Da der Kraftbegriff hier zum erstenmal in einem Quantitativen Zusammenhang auftritt, interpretieren wir das Lex Secunda als <u>Definition</u> der Kraft. Wegen dieses Definitionscharakters dürfen wir die irrelevante Proportionalitätskonstante $= 1$ setzen und erhalten

$$\frac{d}{dt}\vec{p}(t) = \vec{F} \qquad (2.4a)$$

bzw. für einen Massepunkt

$$m\ddot{\vec{r}} = m\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}(t) = \vec{F} \qquad (2.4b)$$

Obwohl in dieser Lesart die ersten beiden Gesetze nur Definitionen sind, werden wir in der Praxis (2.4a) oft als Gesetz praktisch verwenden. Ist nämlich die Kraft $\vec{F}$ gegeben, so bestimmt sie zusammen mit den Anfangsbedingungen für die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ die gesamte Bewegung.

Im Gegensatz zum Definitionscharakter der ersten beiden Newtonschen Gesetze ist das dritte Gesetz wirklich ein physikalisches Gesetz:

Lex Tertia (Reaktionsgesetz)*:

Die Kräfte zweier Körper aufeinander ~~sind~~ sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung (actio = reactio)

---

* Die nun folgende Verwendung des Lex Tertia ist eigentlich auf Zentralkräfte beschränkt. Nicht-zentralkräfte wie z.B. die Geschwindigkeitsabhängige Lorentzkraft, bedürfen einer separaten Diskussion.

Aus dem Lex Tertia können wir eine praktisch verwendbare Definition der Masse ableiten. Für die Kräfte, die zwei isolierte Körper aufeinander ausüben gilt

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \qquad (2.5)$$

und damit gemäß Lex Secunda

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt} \qquad (2.6a)$$

Für Massepunkte folgt

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = -m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} \qquad (2.6b)$$

Definieren wir nun die Beschleunigung als

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad (2.7)$$

gilt $m_1\vec{a}_1 = -m_2\vec{a}_2$, bzw. für die Beträge $a_i = |\vec{a}_i|$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1} \qquad (2.8)$$

Nach Wahl einer Einheitsmasse, z.B. m_2, können wir aus der Messung der Beschleunigungen (mit Maßstäben und Uhren) die Masse m_1 bestimmen.

Verwenden wir nun den Massepunkt m_2, um durch Vermessung seiner Bewegung unter einer unbekannten Kraft $\vec{F}$ diese Kraft zu bestimmen, so können wir nun aus (2.8) m_1 bestimmen und mit Lex secunda ~~d~~ die Bahnkurve von m_1 voraussagen.

Eine übliche Methode Massen zu bestimmen ist das Wiegen. Diese Methode benützt die Tatsache, dass das Gewicht eines Körpers im einem Gravitationsfeld genau der Schwerkraft entspricht, die auf den Körper wirkt. Lex Secunda schreibt sich dann

$$\vec{F}_G = m\,\vec{g}\,, \tag{2.9}$$

wobei $\vec{g}$ die durch die Gravitation verursachte Erdbeschleunigung ist (die sich mit Maßstäben und Uhren messen lässt.)

Wichtig ist, hier festzuhalten, dass es keinen offensichtlichen Grund in der klassischen Mechanik gibt, warum die Proportionalitätskonstante m zwischen $\vec{F}_G$ und $\vec{g}$ genau der trägen Masse m entspricht, mit ~~dem~~ der sich ein Massepunkt der Bewegungsänderung unter einer äußeren (nicht-gravitativen) Kraft gemäß $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ "widersetzt".

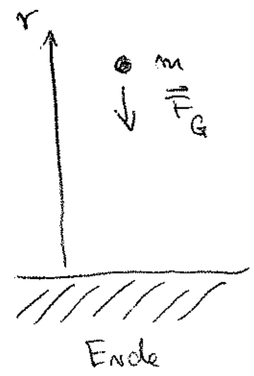
Diese Proportionalitätskonstante, auch schwere Masse genannt, könnte – im Prinzip – einen anderen Wert im Rahmen der klassischen Mechanik annehmen.

Die Gleichheit von schwerer und träger Masse ist experimentell bereits früh überprüft worden und heute auf $1:10^{12}$ genau bestätigt.

Im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie (ART) wird die exakte Gleichheit zum Prinzip erhoben (Äquivalenzprinzip).

Beispiel: freier Fall aus geringer Höhe (1-dimensional)

Wir betrachten die vertikale Bewegung eines Massepunkts unter dem Einfluss der Schwerkraft $\vec{F}_G = m\vec{g}$



Für geringe Höhen im Vergleich zum Erdradius, $r \ll R_E$, gilt näherungsweise

$$\vec{g} = -g\,\hat{e}_r \quad \text{mit} \quad g \simeq 9.81\,\frac{m}{s^2} = \text{const}. \tag{2.10}$$

Die Bewegungsgleichung im $\hat{e}_r$-Richtung lautet

$$m\ddot{r} = -mg \quad \Rightarrow \ddot{r} = -g = \text{const} \tag{2.11}$$

1. Integration

$$v = \dot{r} = -gt + C_1 \tag{2.12}$$

Die Integrationskonstante C_1 hat offensichtlich die Bedeutung einer Anfangsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t=0$,

$$v(t=0) = C_1 \equiv v_0 \tag{2.13}$$

2. Integration

$$r = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + C_2 \tag{2.14}$$

Die zweite Integrationskonstante ist offenbar die Anfangshöhe zum Zeitpunkt $t=0$

$$h = r(t=0) = C_2 \,. \tag{2.15}$$

Wird z.B. der Massepunkt bei $t=0$ in der Höhe h losgelassen ($v_0=0$), lautet die Lösung

$$r(t) = h - \frac{g}{2}t^2 \tag{2.16}$$

Die Fallzeit bis $r=0$ beträgt

$$t_{Fall} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \,. \tag{2.17}$$

Die Geschwindigkeit bei Aufschlag ist

$$v_{Fall} = -g\, t_{Fall} = -\sqrt{2gh} \,. \tag{2.18}$$

(Das Minuszeichen bedeutet, dass die Geschwindigkeit hin zu abnehmenden r-Werten gerichtet ist.)

[Ein Sprung vom 10 Meter-Turm dauert $t_{Fall} \approx 1{,}4$ Sekunden. Die Geschwindigkeit an der Wasseroberfläche ist dann $v_{Fall} \simeq -14\ \frac{m}{s}$ ($\simeq -50$ km/h)]

Allgemein halten wir fest: da die Bewegungsgleichung eine Differenzialgleichung 2. Ordnung ist,

Werden zu ihrer vollständigen Lösung 2 Integrations-
Konstanten benötigt; in diesem Fall: Anfangsort
und Anfangsgeschwindigkeit.

Weitere Beispiele folgen in den Übungen.