

9.3 Eulersche Gleichungen und klassische Kreisel

Bislang haben wir rein kinematische Eigenschaften des starren Körpers diskutiert. Die dynamischen Eigenschaften werden analog zum 2. Newtonschen Gesetz für Massepunkte durch die Eulerschen Gleichungen beschrieben, die natürlich aus dem 2. Newtonschen Gesetz folgen

9.3.1 Eulersche Gleichungen

Auf den i -ten Massepunkt wirke im raumfesten Koordinatensystem (Inertialsystem) die äußere Kraft \vec{F}_i' . Dann ist das Drehmoment gegeben durch

$$\vec{M}' = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i' \times \vec{F}_i') \quad (9.47)$$

und es gilt für den Drehimpuls:

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{M}', \quad (9.48)$$

was im Inertialsystem die Dynamik des starren Körpers beschreibt. Wir wollen diese Dynamik nun im körperfesten System formulieren.

Es gelten die Zusammenhänge

$$\vec{L}' = R \vec{L} \quad , \quad \vec{M}' = R \vec{M} \quad , \quad \vec{L} \stackrel{(9.40)}{=} \Theta \vec{\omega} \quad (9.49)$$

und somit

$$\begin{aligned} R\vec{M}' &= \frac{d}{dt} (R\vec{L}) = R\dot{\vec{L}} + \dot{R}\vec{L} = R(\dot{\vec{L}} + R^T \dot{R} \vec{L}) \\ &= R(\dot{\vec{L}} + \vec{\omega} \times \vec{L}) \end{aligned} \quad (9.50)$$

Nach Multiplikation mit R^T folgt

$$\underline{\underline{\vec{M}}} = \underline{\underline{\dot{\vec{L}}}} + \underline{\underline{\vec{\omega} \times \vec{L}}} = \underline{\underline{\Theta \dot{\vec{\omega}}}} + \underline{\underline{\vec{\omega} \times \Theta \vec{\omega}}} \quad (9.51)$$

Dies sind die Eulerschen Gleichungen. Wählt man das körperfeste System so, dass die Koordinatenachsen den Hauptträgheitsachsen entsprechen, gilt komponentenweise:

$$\begin{aligned} M_1 &= \Theta_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \omega_3 (\Theta_3 - \Theta_2) \\ M_2 &= \Theta_2 \dot{\omega}_2 + \omega_1 \omega_3 (\Theta_1 - \Theta_3) \\ M_3 &= \Theta_3 \dot{\omega}_3 + \omega_1 \omega_2 (\Theta_2 - \Theta_1) \end{aligned} \quad (9.52)$$

Im Folgenden betrachten wir die Euler-Gleichungen für wichtige (einfache) Spezialfälle

9.3.2 Kräftefreies Symmetrisches Kreisel

Für einen starren Körper, der rotationssymmetrisch um eine Achse ist, z.B. die 3-Achse, folgt, dass die Trägheitsmomente senkrecht zu dieser Achse identisch sein müssen, d.h. $\Theta_1 = \Theta_2$.

Für den Fall einer kräftefreien Bewegung ($\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{M} = 0$) folgt aus den Eulerschen Gleichungen:

$$(\Theta_1 - \Theta_3) \omega_2 \omega_3 - \Theta_1 \dot{\omega}_1 = 0$$

$$(\Theta_3 - \Theta_1) \omega_3 \omega_1 - \Theta_1 \dot{\omega}_2 = 0 \quad (9.53)$$

$$\Theta_3 \dot{\omega}_3 = 0$$

Wir nehmen des Weiteren (o.B.d.A.) an, dass der Ursprung des Koordinatensystems im Schwerpunkt liegt. Für den Fall, dass die Rotationsachse $\vec{\omega}$ entlang einer der Hauptachsen des Körpers liegt, d.h. $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ \omega_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$, reduzieren sich

die Eulerschen Gleichungen auf entweder

$$\theta_1 \dot{\omega}_1 = 0 \quad , \quad \theta_2 \dot{\omega}_2 = 0 \quad \text{oder} \quad \theta_3 \dot{\omega}_3 = 0$$

und die Lösungen sind trivialerweise Rotationen mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um diese Hauptachsen.

Betrachten wir also den allgemeineren Fall, in dem zu gegebener Zeit mindestens zwei Komponenten $\omega_i \neq 0$.

Für die Rotation um die 3-Achse gilt:

$$\theta_3 \dot{\omega}_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_3 = \text{const.} \quad (9.54)$$

mit einem Wert ω_3 , der durch die Anfangsbedingungen fixiert ist. Die beiden anderen Eulerschen Gleichungen lauten dann

$$\dot{\omega}_1 = - \left[\frac{\theta_3 - \theta_1}{\theta_1} \omega_3 \right] \omega_2 \quad (9.55)$$

$$\dot{\omega}_2 = \left[\frac{\theta_3 - \theta_1}{\theta_1} \omega_3 \right] \omega_1 \quad ;$$

mit der Definition

$$\underline{\Omega} = \frac{\theta_3 - \theta_1}{\theta_1} \omega_3 \stackrel{(9.54)}{=} \text{const.} \quad (9.56)$$

erhalten wir

$$\dot{\omega}_1 + \Omega \omega_2 = 0 \quad (9.57)$$

$$\dot{\omega}_2 - \Omega \omega_1 = 0$$

Wir führen an dieser Stelle eine komplexe Hilfsvariable ein,

$$\eta := \omega_1 + i \omega_2, \quad (9.58)$$

die die Differentialgleichung

$$\dot{\eta} - i \Omega \eta \stackrel{(9.57)}{=} 0 \quad (9.59)$$

erfüllt. Die Gleichung wird durch

$$\eta(t) = A e^{i \Omega t}$$

und somit

$$\omega_1(t) = A \cos \Omega t$$

$$\omega_2(t) = A \sin \Omega t$$

(9.60)

gelöst. (Entsprechend phasenverschobene Funktionen

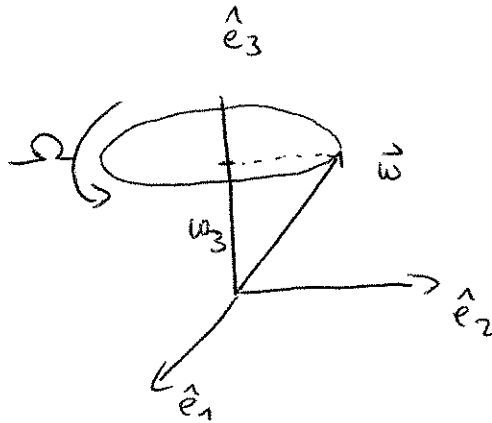
$\eta = A e^{i \Omega t + \delta}$ sind natürlich ebenfalls Lösungen).

Mit $\omega_3 = \text{const}$ gilt ebenfalls

$$|\vec{\omega}| = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2} = \sqrt{A^2 + \omega_3^2} = \text{const.} \quad (9.61)$$

Damit beschreibt die Drehachse $\vec{\omega}(t)$ eine

Kreisbahn parallel zur \hat{e}_1, \hat{e}_2 Ebene, die mit "Winkelgeschwindigkeit" bzw. Präzessionsgeschwindigkeit Ω durchlaufen wird.



Im körperfesten System schneidet also $\vec{\omega}$ eine Kugel aus, die rotations-symmetrisch um die Symmetrieachse liegt.

Da wir eine kräftefreie Bewegung betrachten, ist der Drehimpuls im Inertialsystem \hat{e}_i zeitlich erhalten, das bedeutet allerdings, dass wir einen zeitlich veränderlichen Drehimpuls im körperfesten System erwarten.

Eine weitere Erhaltungsgröße im kräftefreien Fall ist die kinetische Energie. Im körperfesten Schwerpunktsystem beschreibt diese rein die Rotationsenergie und ist gegeben durch

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \underbrace{I}_{=\vec{L}} \vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L} = \text{const.} \quad (9.62)$$

Dies bedeutet, dass der Winkel zwischen $\vec{\omega}$ und \vec{L} immer konstant bleibt (aus der Erhaltung des Drehimpulses im Inertialsystem $\vec{L}' = \text{const} \Rightarrow \vec{L}'^2 = \text{const}$, folgt mit $\vec{L}' = R \vec{L}$, dass auch der Betrag von \vec{L} im körperfesten System konstant bleibt, $\vec{L}^2 = \text{const}$.)

Da $\vec{\omega}$ im körperfesten System um die \hat{e}_3 -Achse präzediert, steht $\vec{\omega}$ senkrecht auf der durch \hat{e}_3 und $\vec{\omega}$ aufgespannten Ebene, was sich anhand der Lösung (9.54 & 9.60) direkt verifizieren lässt. Aus (9.62) folgt dann

$$0 = \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \cdot \vec{L}) = \dot{\vec{\omega}} \cdot \vec{L} + \vec{\omega} \cdot \dot{\vec{L}} \quad (9.63)$$

Zudem folgt aus der Euler-Gleichung für den kräftefreien Fall $0 = \underbrace{\dot{\vec{L}}}_{(9.54)} + \vec{\omega} \times \vec{L}$, dass

$$0 = \vec{\omega} \cdot \dot{\vec{L}} + \underbrace{\vec{\omega} \cdot \vec{\omega} \times \vec{L}}_{=0} = \vec{\omega} \cdot \dot{\vec{L}} \quad (9.64)$$

$$(9.63) \Rightarrow \underline{\underline{\dot{\vec{\omega}} \cdot \vec{L} = 0}}$$

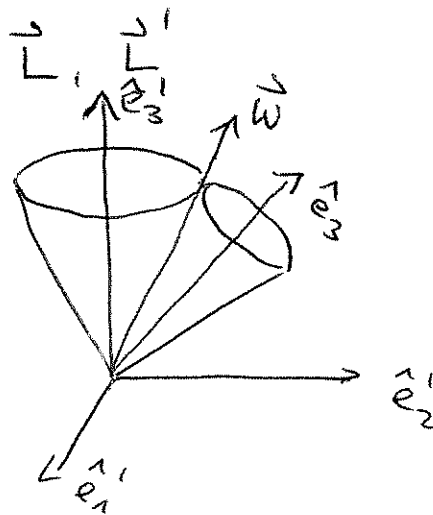
Dies bedeutet das \vec{L} ebenfalls in der Ebene 216
 liegen muss, die durch \vec{w} und \hat{e}_3 aufgespannt
 wird. Da \vec{w} um \hat{e}_3 präzediert, präzediert
 ebenfalls $\vec{L}(t)$ mit Präzessionswinkelgeschwindigkeit

$$\Omega = \frac{\theta_3 - \theta_1}{\theta_1} \omega_3 \quad (9.65)$$

um die \hat{e}_3 -Achse.

Wir können diese Präzession auch vom
 Inertialsystem aus interpretieren. Da in diesem
 $\vec{L}' = \text{const}$ ist, können wir die \hat{e}_3' -Achse
 entlang \vec{L}' wählen. Der Zusammenhang $\vec{L}' = R \vec{L}$
 impliziert nun, dass die Hauptträgheitsachse \hat{e}_3
 des körperfesten Systems vom Inertialsystem aus
 betrachtet um die \hat{e}_3' -Achse mit Ω
 präzediert. Entsprechend präzediert \vec{w} so, dass
 \hat{e}_3' , \hat{e}_3 und \vec{w} immer in einer Ebene liegen.
 Diese Situation lässt sich im Bild vom

Zwei aneinander abrollenden Kegel verdeutlichen



Vernachlässigt man die von Sonne, Mond und anderen Planeten auf die Erde ausgeübten Drehmomente, kann die Erde näherungsweise als kräftefreier Kreisel betrachtet werden. Zudem ist die Erde keine perfekte Kugel, sondern wegen der Abplattung an den Polen ein symmetrischer Kreisel mit

$$\frac{\Theta_3 - \Theta_1}{\Theta_1} \approx \frac{1}{300} \quad (9.66)$$

Mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_3 \approx \omega = \frac{2\pi}{\text{Tag}}$$

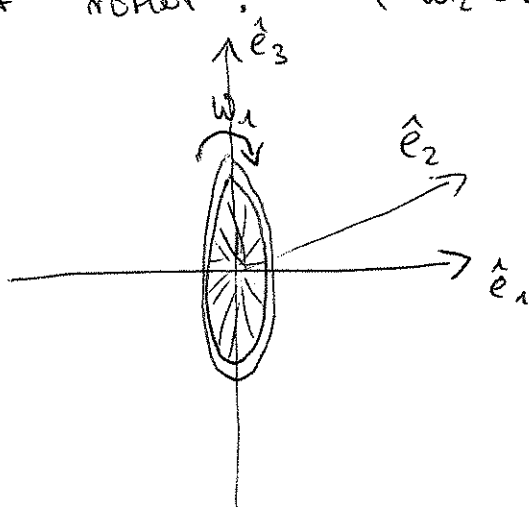
folgt eine Präzessionswinkelgeschwindigkeit von $\Omega \approx \frac{2\pi}{300 \text{ Tage}}$.

In der Tat ist die Drehachse nicht identisch mit der Hauptträgheitsachse, was bedeutet, dass die Drehachse nicht fest mit der Erde verbunden ist. Sie wandert um den Geographischen Nordpol innerhalb eines Radius von $\approx 4,50\text{ m}$ (mit starken Schwankungen herum). Die tatsächliche Periode beträgt im Durchschnitt ≈ 427 Tage für die Präzessionsbewegung. Der Unterschied zu den oben geschätzten 300 Tagen wird der Tatsache zugeschrieben, dass die Erde kein starrer Körper ist, sondern elastische Eigenschaften hat.

9.3.2 Symmetrischer Kreisel im Gravitationsfeld

Die Änderung seiner Drehachse, mit der ein Kreisel auf ein einwirkendes Drehmoment antwortet, ist typischerweise nicht im Einklang mit der naiven Intuition.

Betrachten wir z.B. einen um die 1-Achse symmetrischen Kreisel, d.h. $\Theta_2 = \Theta_3$, der um die Symmetrieachse mit $\omega_1 = \text{const}$ rotiert, ($\omega_2 = \omega_3 = 0$)



Wenn wir nun eine Kraft auf eine Seite der Drehachse in \hat{e}_2 -Richtung ausüben, entspricht dies einem Drehmoment in \hat{e}_3 -Richtung, d.h. $M_3 \neq 0$.
Gemäß

$$M_3 = \Theta_3 \dot{\omega}_3 + \underbrace{\omega_1 \omega_2}_{=0} (\Theta_2 - \Theta_1) = \Theta_3 \dot{\omega}_3 \quad (9.67)$$

führt dies (wie erwartet) zu einer Drehbewegung

um die 3-Achse $\omega_3 \neq 0$. Für die 2-Komponente bedeutet dies

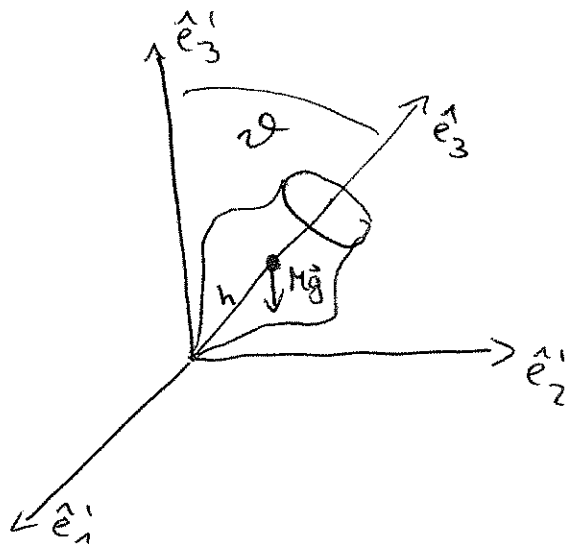
$$0 = M_2 = \Theta_2 \dot{\omega}_2 + \omega_1 \omega_3 (\Theta_1 - \Theta_3) \quad (9.68)$$

Der zweite Term verschwindet nun nicht mehr. Obwohl kein Drehmoment M_2 angelegt wird, erzwingt diese Euler-Gleichung ebenfalls eine Änderung der Drehachse mit endlicher ω_2 -Komponente. Es ergibt sich also eine (man un erwartete) Drehbewegung um die 2-Achse.

Dieses grundlegende in den Euler-Gleichungen enthaltene Mechanismus wird in Kreiselspitzzeugen (und Instrumenten wie z.B. Gyroskope) ausgenutzt und kommt auch im symmetrischen Kreisel im Gravitationsfeld zum tragen:

Konkret betrachten wir einen symmetrischen Kreisel mit $\Theta_1 = \Theta_2$, der an einem Aufpunkt (i.A. \neq Schwerpunkt) festgehalten wird und sich im Gravitationsfeld befindet. Zur Beschreibung wählen wir ein Inertialsystem und ein körperfestes System,

die ihren gemeinsamen Ursprung in diesem Aufpunkt haben.



Die Schwerkraft wirkt in negative $3'$ -Richtung und greift am Schwerpunkt mit dem Betrag Mg an, wobei M die Gesamtmasse des Kreisel ist. Sei h der Abstand des Schwerpunkts vom Aufpunkt.

Die kinetische Energie ist (Betrachtung im körperfesten Hauptachsen system):

$$T = \frac{1}{2} \Theta_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} \Theta_3 \omega_3^2. \quad (9.69)$$

Im Folgenden verwenden wir das Resultat aus (9.9), das die Konstruktion vom $\vec{\omega}$ durch Euler-Winkel im körperfesten System beschreibt:

$$\vec{\omega} = \dot{\vartheta} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\varphi} \begin{pmatrix} \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} + \dot{\psi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (9.70)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
 \omega_1^2 &= (\dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta} \cos \varphi)^2 \\
 &= \dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi + 2\dot{\psi} \dot{\vartheta} \sin \vartheta \sin \varphi \cos \varphi + \dot{\vartheta}^2 \cos^2 \varphi \\
 \omega_2^2 &= (\dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi - \dot{\vartheta} \sin \varphi)^2 \\
 &= \dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi - 2\dot{\psi} \dot{\vartheta} \sin \vartheta \sin \varphi \cos \varphi + \dot{\vartheta}^2 \sin^2 \varphi
 \end{aligned} \tag{9.71}$$

so dass

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2 \tag{9.72}$$

Außerdem gilt nach (9.70):

$$\omega_3^2 = (\dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi})^2 \tag{9.73}$$

Die kinetische Energie lautet folglich

$$T = \frac{1}{2} \Theta_1 (\dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{2} \Theta_3 (\dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi})^2 \tag{9.74}$$

Die potentielle Energie zur Gravitationskraft ist

$$U = Mgh \cos \vartheta, \tag{9.75}$$

so dass die Lagrange-Funktion lautet:

$$L = \frac{1}{2} \Theta_1 (\dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{2} \Theta_3 (\dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi})^2 - Mgh \cos \vartheta. \tag{9.76}$$

Offenbar sind φ und ψ beides zyklische Koordinaten, da L nur von $\dot{\varphi}$ und $\dot{\psi}$ abhängt. Die zugehörigen kanonisch konjugierten Impulse sind daher Erhaltungsgrößen:

$$P_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = (\Theta_1 \sin^2 \vartheta + \Theta_3 \cos^2 \vartheta) \dot{\varphi} + \Theta_3 \dot{\psi} \cos \vartheta = \text{const.}$$

$$P_{\psi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \Theta_3 (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta) = \text{const.} \quad (9.77)$$

$$= \Theta_3 \omega_3$$

Da die zyklischen Koordinaten Winkel sind, entsprechen die kanonischen Impulse erhaltenen Drehimpulsen entlang der Achsen, bezüglich derer φ und ψ Drehwinkel sind. Dies sind die \hat{e}_3' -Achse im Inertialsystem (für φ) bzw. die \hat{e}_3 -Achse im körperfesten System (für ψ).

Dies ist einsichtig, da die Gravitationskraft ein Drehmoment entlang der Knotenlinie (vgl. Kommentar unter (9.4)) erzeugt, welche senkrecht auf \hat{e}_3 und \hat{e}_3' steht.

Die Gleichungen (9.77) können nach $\ddot{\psi}$ und $\dot{\psi}$ aufgelöst werden. Aus der zweiten folgt z.B.

$$\dot{\psi} = \frac{P_4 - \theta_3 \dot{\psi} \cos \vartheta}{\theta_3} \quad (9.78)$$

Einsetzen in die erste Gleichung liefert

$$\ddot{\psi} = \frac{P_4 - P_4 \cos \vartheta}{\theta_1 \sin^2 \vartheta} \quad (9.79)$$

und damit aus (9.78)

$$\Rightarrow \dot{\psi} = \frac{P_4}{\theta_3} - \frac{(P_4 - P_4 \cos \vartheta) \cos \vartheta}{\theta_1 \sin^2 \vartheta} \quad (9.80)$$

Da das System konservativ ist, gilt des Weiteren die Energieerhaltung:

$$E = \frac{1}{2} \theta_1 (\dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{2} \theta_3 \omega_3^2 + Mgh \cos \vartheta = \text{const} \quad (9.81)$$

Da wegen (9.77), $P_4 = \theta_3 \omega_3$, der zweite Term separat eine Konstante ist, betrachten wir die Erhaltungsgröße

$$E' = E - \frac{1}{2} \theta_3 \omega_3^2 = \frac{1}{2} \theta_1 (\dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + Mgh \cos \vartheta = \text{const.} \quad (9.82)$$

Mit (9.79) können wir in E' die Abhängigkeit von $\dot{\psi}$ eliminieren:

$$E' = \frac{1}{2} \Theta_1 \dot{\vartheta}^2 + V(\vartheta) \quad (9.83)$$

mit

$$V(\vartheta) := \frac{(p_\psi - p_\psi \cos \vartheta)^2}{2\Theta_1 \sin^2 \vartheta} + Mgh \cos \vartheta \quad (9.84)$$

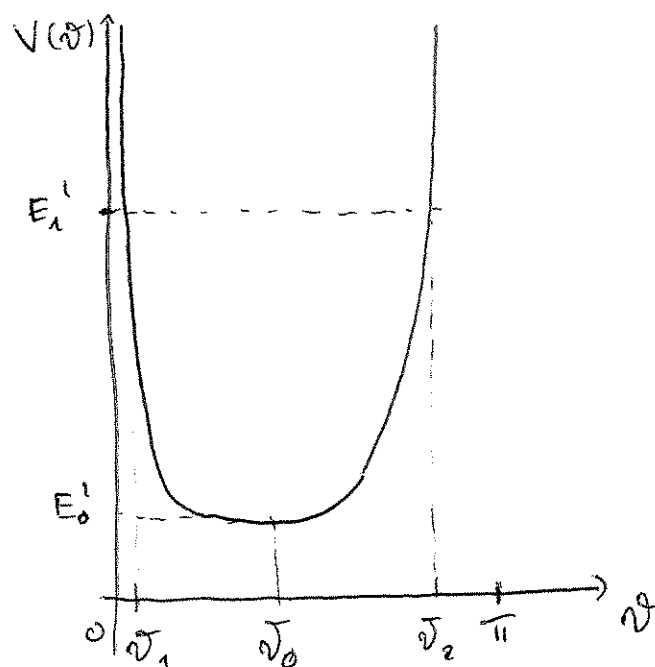
als effektivem Potential für die Bewegung in ϑ .

Der "Kippwinkel" ϑ der Rotationsachse zur Senkrechten ist zunächst grundsätzlich auf $0 \leq \vartheta \leq \pi$

beschränkt. Für endliche $p_\psi, p_\psi = \text{const.}$ (bestimmt

durch Anfangsbedingungen) hat $V(\vartheta)$ typischerweise

folgende Form



Das Term $\sim \frac{1}{\sin^2 \vartheta}$ erzeugt Potentialbarrieren bei $\vartheta=0$ und $\vartheta=\pi$.

Für (durch Anfangsbedingungen) gegebenes $E' = \text{const}$, z.B.

$E' = E_1' < \infty$ ist die Bewegung des Kippwinkels auf ein endliches Intervall

$$0 < \vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2 < \pi$$

beschränkt. Die Winkel ϑ_1 und ϑ_2 spielen die Rolle von Umkehrpunkten analog zum 2-Körper-Problem.

Für eine minimale Energiekonstante $E' = E_0'$ wird das Potentialminimum bei einem Winkel ϑ_0 eingenommen.

D.h. für dieses E_0' kann der Kippwinkel für die gesamte Bewegung nur einen festen Wert $\vartheta = \vartheta_0$ annehmen. Die verbliebende Bewegungsfreiheit des Kreisel in diesem Fall ist eine Präzession um die \hat{e}_3' -Achse. Der Winkel ϑ_0 lässt sich analytisch untersuchen:

$$0 = \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \Big|_{\vartheta = \vartheta_0} = \frac{-\cos \vartheta_0 (P_4 - P_4 \cos \vartheta_0)^2 + P_4 \sin^2 \vartheta_0 (P_4 - P_4 \cos \vartheta_0)}{\Theta_1 \sin^3 \vartheta_0} - Mgh \sin \vartheta_0 \quad (9.85)$$

Mit der Definition

$$\beta = P_4 - P_4 \cos \vartheta_0 \quad (9.86)$$

folgt:

$$\beta^2 \cos \vartheta_0 - \beta P_4 \sin^2 \vartheta_0 + Mgh \Theta_1 \sin^4 \vartheta_0 = 0 \quad (9.87)$$

Diese quadratische Gleichung in β hat die Lösungen

$$\beta_{\pm} = \frac{P_4 \sin^2 \vartheta_0}{2 \cos \vartheta_0} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4Mgh \Theta_1 \cos \vartheta_0}{P_4^2}} \right) \quad (9.88)$$

Da β eine reelle Größe sein muss, muss für den Fall, dass $\vartheta_0 < \frac{\pi}{2}$ ist, gelten

$$P_4^2 \geq 4Mgh \Theta_1 \cos \vartheta_0 \quad (9.89)$$

Mit (9.77) $P_4 = \Theta_3 \omega_3$, folgt

$$\omega_3 \geq \frac{2}{\Theta_3} \sqrt{Mgh \Theta_1 \cos \vartheta_0}. \quad (9.90)$$

Daraus können wir schließen, dass eine mögliche Präzessionsbewegung bei festem ϑ_0 nur möglich ist, falls die Winkelgeschwindigkeit ω_3 größer als ein durch (9.90) gegebenes ist.

Die Präzessionsbewegung wird beschrieben durch $\dot{\Psi}$.

Für den Fall, dass $\dot{\nu} = \dot{\nu}_0$, folgt aus (9.79):

$$\dot{\Psi}_0 = \dot{\Psi} \Big|_{\dot{\nu} = \dot{\nu}_0} = \frac{\beta}{\Theta_1 \sin^2 \vartheta_0} \quad (9.91)$$

Für die beiden verschiedenen Werte von $\beta = \beta_{\pm}$ (9.88) gibt es also zwei verschiedene Präzessionsbewegungen:

$$\dot{\Psi}_{0+} = \frac{\beta_+}{\Theta_1 \sin^2 \vartheta_0} \quad (\text{Schnelle Präzession}) \quad (9.92)$$

$$\dot{\Psi}_{0-} = \frac{\beta_-}{\Theta_1 \sin^2 \vartheta_0} \quad (\text{Langsame Präzession})$$

Im Falle eines "schnellen Kreisel", d.h. ω_3 bzw. p_4 groß, ist die Wurzel in (9.88) entwickelbar und es folgt für die Präzession

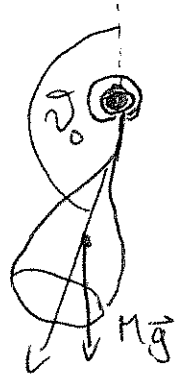
$$\dot{\Psi}_{0+} \approx \frac{\Theta_3 \omega_3}{\Theta_1 \cos \vartheta_0}$$

$$\dot{\Psi}_{0-} \approx \frac{Mgh}{\Theta_3 \omega_3} \quad (9.93)$$

Gewöhnlich beobachtet man die langsame Präzession $\dot{\Psi}_{0-}$.

Diese Ergebnisse haben wir für den Fall $\vartheta_0 < \frac{\pi}{2}$ abgeleitet, d.h. wir haben angenommen, dass der Schwerpunkt über dem Auflagepunkt ist. Mit geeigneter Aufhängung lässt sich auch der Fall $\vartheta_0 > \frac{\pi}{2}$ realisieren.

In diesem Fall ist der Radikant in (9.88) immer positiv, und es gibt folglich keine Einschränkung an ω_3 . Da



die Wurzel dann größer als 1 ist, haben die langsame und schnelle Präzession $\dot{\varphi}_0$ dann unterschiedliche Vorzeichen, insbesondere wechselt $\dot{\varphi}_0$ für $\vartheta_0 > \frac{\pi}{2}$ im Vergleich zu $\vartheta_0 < \frac{\pi}{2}$ das Vorzeichen, d.h. die Präzessionsrichtung.

Für den allgemeinen Fall, in dem $E'_1 > E'_0$, überstreicht ϑ das Intervall $\vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2$, aus (9.79),

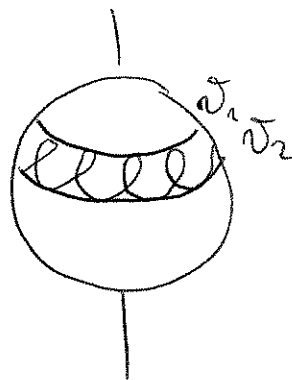
$$\ddot{\varphi} = \frac{P_3 - P_4 \cos 2\vartheta}{\Theta_1 \sin^2 \vartheta} \quad (9.94)$$

wird deutlich, dass $\ddot{\varphi}$ je nach Werten für P_3 und P_4 das Vorzeichen wechseln kann (aber nicht muss).

Falls $\dot{\varphi}$ das Vorzeichen nicht wechselt, präzediert der Kreisel monoton in eine Richtung um die \hat{e}_3 -Achse, und die \hat{e}_3 -Figurenachse oszilliert während der Präzession zwischen $\mathcal{D}_1 < \mathcal{D} < \mathcal{D}_2$. Diese Bewegung wird "Nutation" genannt. Der Pfad der Figurenachse projiziert auf eine den Kreisel umgebende Kugeloberfläche sieht dann folgendermaßen aus:



Für den Fall, dass $\dot{\varphi}$ das Vorzeichen wechselt, müssen $\dot{\varphi}$ bei \mathcal{D}_1 und $\dot{\varphi}$ bei \mathcal{D}_2 unterschiedliches Vorzeichen haben. Die Präzessionsbewegung verläuft also in Schleifen:



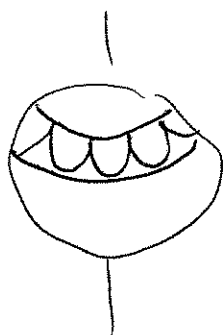
Im Grenzfall, dass p_ψ und p_φ so gewählt sind, dass

$$(p_\psi - p_\varphi \cos\vartheta) \Big|_{\vartheta=\vartheta_1} = 0 \quad (9.95)$$

gilt

$$\dot{\psi}(\vartheta_1) = 0, \quad \dot{\vartheta} \Big|_{\vartheta=\vartheta_1} = 0 \quad (9.96)$$

Die Präzession / Nutation entwickelt also Spitzen ("cusps")



(9.97)

Dieser Grenzfall wird tatsächlich natürlicherweise angenommen, wenn man einen (bereits angetriebenen) Kreis im Schwerfeld loslässt. Das Moment des loslassens entspricht einem Cusp.

9.3.3 Stabilität von kräftefreien Rotationen starrer Körper

Für den Fall von rotierenden starren Körpern, die ohne Krafteinwirkung rotieren, wollen wir die Frage untersuchen, welche Rotationsbewegungen stabil sind. Stabilität bedeutet, dass kleine Störungen der Bewegung wieder zur Bewegung hinführen (mit möglichen kleinen Schwingungen um diese Bewegung)

Wir betrachten einen allgemeinen Körper mit Hauptträgheitsmomenten $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ und beschränken uns auf Rotationen um eine Hauptträgheitsachse. Sei $\partial B dA$

$$\vec{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1 \quad (9.98)$$

Eine kleine Störung dieser Bewegung parametrisieren wir durch

$$\vec{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1 + \lambda \hat{e}_2 + \mu \hat{e}_3 \quad (9.99)$$

mit $\frac{\lambda}{\omega_1}, \frac{\mu}{\omega_1} \ll 1$.

Die Euler-Gleichungen lauten dann

$$\begin{aligned} (\Theta_2 - \Theta_3) \lambda \dot{\mu} - \Theta_1 \dot{\omega}_1 &= 0 \\ (\Theta_3 - \Theta_1) \mu \dot{\omega}_1 - \Theta_2 \dot{\lambda} &= 0 \\ (\Theta_1 - \Theta_2) \lambda \omega_1 - \Theta_3 \dot{\mu} &= 0 \end{aligned} \quad (9.100)$$

Vernachlässigen wir Terme quadratisch in den Störungen λ, μ ,
so besagt die erste Gleichung $E_1 \dot{\omega}_1 = 0 \Rightarrow \omega_1 = \text{const.}$

Daraus folgt

$$\dot{\lambda} = \left(\frac{\theta_3 - \theta_1}{\theta_2} \omega_1 \right) \mu \quad (9.101)$$

$$\dot{\mu} = \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_3} \omega_1 \right) \lambda$$

wobei die Terme in Klammern zeitlich konstant sind.

Differenzieren der ersten Gleichung und einsetzen der zweiten
führt auf

$$\ddot{\lambda} + \frac{(\theta_1 - \theta_3)(\theta_1 - \theta_2)}{\theta_2 \theta_3} \omega_1^2 \lambda = 0 \quad (9.102)$$

ähnlich für μ :

$$\ddot{\mu} + \frac{(\theta_1 - \theta_3)(\theta_1 - \theta_2)}{\theta_2 \theta_3} \omega_1^2 \mu = 0 \quad (9.103)$$

Für

$$\frac{(\theta_1 - \theta_3)(\theta_1 - \theta_2)}{\theta_2 \theta_3} > 0 \quad (9.104)$$

handelt es sich jeweils um harmonische-Oszillator-

Gleichungen mit entsprechend oszillierenden Lösungen

$$\lambda_{1, \mu} \sim -i \cos(\Omega t + \delta) \quad (9.105)$$

$$\text{mit } \Omega = \sqrt{\frac{(\Theta_1 - \Theta_3)(\Theta_1 - \Theta_2)}{\Theta_2 \Theta_3}} \quad (9.106)$$

Die Bedingung (9.104) bedeutet also, dass solche Rotationen unter kleinen Störungen $\lambda_{1, \mu}$ stabil sind und oszillatorische Schwankungen in den Störungen um die ungestörte Bewegung

$\vec{w} = w_1 \hat{e}_1$ ausführen. Die Stabilitätsbedingung (9.104)

ist erfüllt für

$$\textcircled{1} \quad \Theta_1 > \Theta_2, \Theta_3 \quad \text{oder} \quad \textcircled{2} \quad \Theta_1 < \Theta_2, \Theta_3 \quad (9.107)$$

Fall $\textcircled{1}$ beschreibt Rotationen um die Hauptträgheitsachse mit dem größten, bzw. Fall $\textcircled{2}$ mit dem kleinsten, Trägheitsmoment. Diese Rotationsachsen sind stabil.

Bedingung (9.104) ist nicht erfüllt für den Fall

$$\textcircled{3} \quad \Theta_2 < \Theta_1 < \Theta_3 \quad (9.108)$$

In diesem Fall enthalten die Lösungen von (9.102, 103) exponentiell anwachsende Komponenten $\lambda_{1, \mu} \sim e^{|\Omega|t}$, d.h. kleine Störungen führen schnell weg von der anfänglichen Bewegung. Diese Rotationsachse ist instabil. Das Ergebnis lässt sich mit einem Tennisschläger leicht experimentell verifizieren.