# 9. Bewegung starrer Körper

Unter einem starren Körper versteht man eine Ansammlung von Massepunkten, deren relativen Abstände zueinander starr fixiert sind. Damit ist auch der Schwerpunkt relativ zu allen Massepunkten fixiert. Somit besitzt der starre Körper 6 Freiheitsgrade. Diese kann man z.B. als die 3 Koordinaten des Schwerpunkts und weitere 3 Winkel, die Drehungen um den Schwerpunkt parametrisieren, verstehen. Alternativ zum Schwerpunkt kann man auch andere ausgezeichnete Punkte des Körpers betrachten (z.B. Kreiselspitze, etc.).

Für die Beschreibung der Dynamik eines starren Körpers ist es zweckmäßig, zwei Koordinatensysteme zu verwenden. Zum einen natürlich ein Inertialsystem $\hat{e}_i'$, zum zweiten ein körperfestes Bezugssystem $\hat{e}_i$, in dem alle Massepunkte des starren Körpers konstante zeitunabhängige Koordinaten haben.

NB: anstelle einer diskreten Beschreibung eines starren Körpers durch Massepunkte $m_i$, kann man auch zu einer kontinuierlichen Beschreibung durch eine Massedichteverteilung $\rho(x)$ übergehen.

## 9.1 Euler-Winkel

~~Wa~~

Ist ein Punkt des starren Körpers im Inertialsystem fest fixiert (z.B. Schwerpunkt oder Kreiselspitze, etc), so kann man die Bezugssysteme $\hat{e}'_i$ und $\hat{e}_i$ so wählen, das die Ursprünge (im diesem Punkt) festgehalten sind. Damit hat der starre Körper noch 3 Freiheitsgrade. Zwischen $\vec{x}'$ im Inertialsystem und $\vec{x}$ im körperfesten System besteht dann der Zusammenhang

$$\vec{x}' = R\,\vec{x} \tag{9.1}$$

mit $R^T R = \mathbb{1}$ einer orthogonalen Matrix. Die Matrixelemente von $R$ lassen sich durch die drei Euler-Winkel $(\vartheta, \varphi, \psi)$ parametrisieren. Wir wählen hier eine Konvention, bei der $\vartheta$ und $\varphi$ den Polarwinkel und Azimutalwinkel der Position einer Drehachse in Kugelkoordinaten beschreiben und $\psi$ dann den Drehwinkel um diese Achse angibt. D.h.

$$0 \leq \vartheta \leq \pi\,, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\,, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi \tag{9.2}$$

Die beschriebene Interpretation liefert zugleich eine

Konstruktionsvorschrift für die Drehmatrix $R$.

Wir stellen uns zunächst eine Drehachse in 3-Richtung vor, die wir in Richtung der Winkelkoordinaten $(\vartheta, \varphi)$ ausrichten.

Dazu drehen wir sie zunächst um den Azimutalwinkel $\varphi$ um sich selbst. Die zugehörige Drehmatrix lautet

$$D_3(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (9.3)$$

(die Drehachse zeigt danach natürlich immer noch in die gleiche Richtung)

Dann "kippen" wir die Drehachse um den Polarwinkel $\vartheta$ um die nach (9.3) neu entstandene 1-Achse:

$$D_1(\vartheta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \qquad (9.4)$$

(Die durch diese "Kipp-Achse" beschriebene Gerade heißt auch "Knotenlinie". Dies ist die Linie, in der sich die $(\hat{e}'_1, \hat{e}'_2)$ und die $(\hat{e}_1, \hat{e}_2)$ Ebene schneiden.)

Schließlich drehen wir das System um die gekippte Drehachse um den Winkel $\psi$:

$$D_3(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (9.5)$$

In der Literatur wird oft die Konvention gewählt, bei der im mathematisch negativen Sinn gedreht wird. Das entspricht genau den transponierten Drehmatrizen, d.h.

$$\vec{x} = D_3^T(\psi)\, D_1^T(\vartheta)\, D_3^T(\varphi)\, \vec{x}\,'$$

bzw $$\vec{x}\,' = D_3(\varphi)\, D_1(\vartheta)\, D_3(\psi)\, \vec{x}\,. \qquad (9.6)$$

Damit ergibt sich

$$R = R\,(\varphi, \vartheta, \psi) = D_3(\varphi) D_1(\vartheta) D_3(\psi) \qquad (9.7)$$

Die volle Drehmatrix lautet dann (in der $\hat{e}_i$ Basis)

$$R(\varphi,\vartheta,\psi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\vartheta\sin\psi & -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\vartheta\cos\psi & \sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\cos\vartheta\sin\psi & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\vartheta\cos\psi & -\cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\vartheta\sin\psi & \sin\vartheta\cos\psi & \cos\vartheta \end{pmatrix} \qquad (9.8)$$

Durch Zeitableitung und entsprechende Matrixmultiplikation (vgl. (8.19)) lässt sich die vektorielle Winkelgeschwindigkeit im körperfesten System $\hat{e}_i$ berechnen:

$$(R^T \dot{R})_{ij} = -\varepsilon_{ijk}\,\omega_k \overset{\boxed{\text{ÜA}}}{\Longrightarrow} \vec{\omega} = \dot{\vartheta}\begin{pmatrix} \cos\psi \\ -\sin\psi \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\varphi}\begin{pmatrix} \sin\vartheta\sin\psi \\ \sin\vartheta\cos\psi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} + \dot{\psi}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (9.9)$$

## 9.2 Trägheitstensor und Drehimpuls

Für einen starren Körper bestehend aus N Massepunkten $m_i$ mit körperfesten Koordinaten $\vec{x}_i = \text{const.}$ lautet die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\dot{\vec{x}}_i'\right)^T \left(\dot{\vec{x}}_i'\right) \tag{9.10}$$

Mit

$$\dot{\vec{x}}_i' = R\,(\underbrace{\dot{\vec{x}}_i}_{=0} + \vec{\omega} \times \vec{x}_i)$$

$$= R\,(\vec{\omega} \times \vec{x}_i) \tag{9.11}$$

folgt daraus

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \, (\vec{\omega} \times \vec{x}_i)^T \underbrace{R^T R}_{=\mathbb{1}} (\vec{\omega} \times \vec{x}_i) = \frac{1}{2} \sum_i m_i \, (\vec{\omega} \times \vec{x}_i)^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \left( \vec{\omega}^2 \vec{x}_i^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{x}_i)^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \omega_j \left( \sum_{i=1}^{N} m_i \left( \vec{x}_i^2 \delta_{jk} - x_{i,j} \, x_{i,k} \right) \right) \omega_k \tag{9.12}$$

wobei $j,k = 1,2,3$ Vektorindizes sind und $i = 1, \ldots N$ die Massepunkte nummeriert.

In (9.12) ist es nützlich zwischen der momentanen Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}(t)$ als dynamische Eigenschaft und der Größe

$$\Theta_{jk} := \sum_{i=1}^{N} m_i \left( \vec{x}_i^{\,2} \delta_{jk} - x_{i,j} x_{i,k} \right), \tag{9.13}$$

dem Trägheitstensor zu unterscheiden. Der Trägheitstensor hängt von der Verteilung der Massepunkte $m_i$ im körperfesten System ab, ist damit zeitlich konstant, und kann als reine Eigenschaft des starren Körpers (und nicht seines Bewegungszustands) verstanden werden.

Allerdings ist die Form des Trägheitstensors von den Details der Wahl des körperfesten Koordinatensystems abhängig. Aus einem gegebenen körperfesten System lässt sich z.B. durch eine zeitunabhängige Drehung der Koordinatenachsen ein neues körperfestes System $\hat{e}_i^*$ erzeugen. Sei $S \in SO(3)$, $S = const$, so ist

$$\hat{e}_i^* := S^T_{ij} \hat{e}_j \tag{9.14}$$

eine neue orthonormierte Basis $\hat{e}_i^* \cdot \hat{e}_j^* = \delta_{ij}$. Die Koordinaten $\vec{x}_i^*$ der Massepunkte $m_i$ in der neuen Basis sind dann mit den alten Koordinaten $\vec{x}_i$ verknüpft über $\quad (\hat{e}_j = S_{jk} \hat{e}_k^*)$

$$\vec{x}_i = S \cdot \vec{x}_i^* \tag{9.15}$$

Wegen der Orthogonalität gilt

$$S_{jl} S_{km} \delta_{lm} = \delta_{jk} \,. \tag{9.16}$$

Das Skalarprodukt der Ortsvektoren ist natürlich invariant

$$\vec{x}^2 = S_{jl} x_l^* \; S_{jm} x_m^* = \delta_{lm} x_l^* x_m^* = (\vec{x}^*)^2 \tag{9.17}$$

Damit lässt sich der Trägheitstensor in der Basis $\hat{e}_i^*$ konstruieren:

$$\Theta_{jk} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left( \vec{x}_i^2 \, \delta_{jk} - x_{i,j} \, x_{i,k} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \left( (\vec{x}^*)^2 \delta_{lm} S_{jl} S_{km} - S_{jl} S_{km} \, x_{i,l}^* \, x_{i,m}^* \right)$$

$$= S_{jl} S_{km} \; \Theta_{lm}^* \tag{9.18}$$

Der Trägheitstensor transformiert sich also bezüglich jedes Euklidschen Index wie ein Vektor. Da er zwei solche Indizes hat, nennt man ihn auch einen Tensor zweiter Stufe.

NB: eine Größe $T_{j_1 \dots j_n}$, $1 \leq j_k \leq d$, heißt Tensor $n$-ter Stufe, wenn sich $T_{j_1 \dots j_n}$ bei einem Basiswechsel $x_j = S_{jk} x_k^*$ mit zeitunabhängigen $S \in SO(3)$ transformiert wie

$$T_{j_1 \dots j_n} = S_{j_1 k_1} S_{j_2 k_2} \dots S_{j_n k_n} T^*_{k_1 \dots k_n} . \qquad (9.19)$$

D.h. die Größe transformiert sich bezüglich jedes ihrer Indizes wie ein Vektor. Entsprechend ist ein Vektor ein "Tensor erster Stufe" und ein Skalar ein "Tensor nullter Stufe".

Per Constructionem ist der Trägheitstensor symmetrisch:

$$\Theta_{jk} \equiv \Theta_{kj} \quad \text{bzw} \quad \Theta^T \equiv \Theta \qquad (9.20)$$

und reell $\Theta_{jk} \in \mathbb{R}$ für alle $j, k$.

In Matrix-Schreibweise lautet das Transformationsverhalten (9.18):

$$\boxed{\Theta = S \Theta^* S^T} \Rightarrow \Theta_{jk} = S_{jl} \Theta^*_{lm} S_{mk} \qquad (9.21)$$

Ein zentrales Theorem der linearen Algebra besagt, dass reelle, symmetrische Matrizen durch eine orthogonale Transformation vom Typ (9.21) diagonalisiert werden können. Physikalisch bedeutet dies, das es eine Koordinatentransformation gibt, so dass

$$\Theta^* = S^T \Theta S = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3). \tag{9.22}$$

---

Zusammenfassung aus der Linearen Algebra:

Sei $A = A^T$ eine reelle, symmetrische Matrix.

1. Dann heißt $\lambda$ Eigenwert der Matrix $A$, wenn es einen Vektor $\vec{y} \neq \vec{0}$ gibt, für den

$$A\vec{y} = \lambda\vec{y} \tag{9.23}$$

Der Vektor $\vec{y}$ heißt Eigenvektor von $A$.

2. Die Eigenwerte $\lambda$ sind reell und bestimmt durch das charakteristische Polynom $\det(A - \lambda\mathbb{1}) = 0$.

3. Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

4. Die Eigenvektoren können so gewählt werden, dass sie ein vollständiges Orthonormalsystem bilden.

Bezogen auf den Trägheitstensor bezeichnet man die Eigenwerte $\Theta_{1,2,3}$ als Hauptträgheitsmomente.
Die Eigenvektoren nennt man Hauptträgheitsachsen.
Seien $\hat{n}_{1,2,3}$ die Hauptträgheitsachsen. Dann lautet die kinetische Energie bei einer Drehung um die Drehachse $\vec{\omega} = \omega \cdot \hat{n}_1$ mit $|\hat{n}_1| = 1$

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 \hat{n}_1 \Theta \hat{n}_1 = \frac{1}{2} \omega^2 \Theta_1 \underbrace{\hat{n}_1^2}_{=1} = \frac{1}{2} \Theta_1 \omega^2 \tag{9.24}$$

Analog für $\hat{n}_2, \Theta_2$ ; $\hat{n}_3, \Theta_3$.

Sei $\hat{n}$ ein beliebiger Einheitsvektor $\hat{n}^2 = 1$. Dann ist das Trägheitsmoment um die Achse $\hat{n}$ definiert als

$$\hat{n}^T \Theta \hat{n} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left( \vec{x}_i^2 - (\vec{x}_i \cdot \hat{n}) \right) = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{x}_{i\perp}^2 , \tag{9.25}$$

wobei $\vec{x}_{i\perp}$ der Anteil von $\vec{x}_i$ senkrecht zur Drehachse $\hat{n}$ ist.
In einer beliebigen Körperfesten Basis, in der $\Theta$ nicht diagonal ist, sind die Diagonalelemente $\Theta_{jk}$ die Trägheitsmomente bei Drehungen um die Koordinaten-achsen. Die Nicht-Diagonalelemente $\Theta_{jk}$, $j \neq k$, heißen Deviationsmomente.

Die Gleichung

$$\vec{y}^T \Theta \vec{y} = y_j y_k \Theta_{jk} = 1 \qquad (9.26)$$

definiert das "Trägheitsellipsoid" im Raum aller $\vec{y} \in \mathbb{R}^d$. Dass es sich bei der Menge aller $\vec{y}$, die (9.26) erfüllen, um ein Ellipsoid handelt, wird im Koordinaten-system deutlich, bei dem die Basisvektoren den Haupt-achsen entsprechen:

$$\vec{y}^T \Theta \vec{y} = \Theta_1 y_1^2 + \Theta_2 y_2^2 + \Theta_3 y_3^2 = 1 . \qquad (9.27)$$

Alle oben diskutierten Eigenschaften gelten ebenso für den Trägheitstensor einer kontinuierlichen Massenverteilung mit Massendichte $\varrho(\vec{x})$:

$$\Theta_{jk} := \int d^d\vec{x}\ \varrho(\vec{x}) \left( \vec{x}^2 \delta_{jk} - x_j x_k \right) \qquad (9.28)$$

Beispiele für den Trägheitstensor

(1) Wir betrachten zwei Massepunkte, die durch eine masselose Stange verbunden sind (Länge $l$)
$m_2$ befinde sich im Ursprung $\vec{x}_2 = 0$,

$m_1$ bewege sich lediglich in der $(x_1, x_2)$-Ebene.

Dann ist $\left( \vec{x}_1 = l \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} , \vec{x}_1^{\,2} = l^2 \right)$

$$\Theta = m_1 \left( l^2 \mathbb{1} - l^2 \begin{pmatrix} \cos^2\varphi & \cos\varphi \sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi\cos\varphi & \sin^2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= m_1 l^2 \begin{pmatrix} \sin^2\varphi & -\cos\varphi\sin\varphi & 0 \\ -\cos\varphi\sin\varphi & \cos^2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (9.29)$$

Die Eigenwerte von $\Theta$ bestimmen sich aus dem charakteristischen Polynom

$$0 = \det\left(\Theta - \lambda \mathbb{1}\right) = \left(m_1 l^2 - \lambda\right) \cdot \left[ \left(\sin^2\varphi - \frac{\lambda}{m_1 l^2}\right)\left(\cos^2\varphi - \frac{\lambda}{m_1 l^2}\right) - \cos^2\varphi \sin^2\varphi \right] m_1^2 l^4$$

$$= \left(m_1 l^2 - \lambda\right)\left(\lambda^2 - \lambda m_1 l^2\right) \qquad (9.30)$$

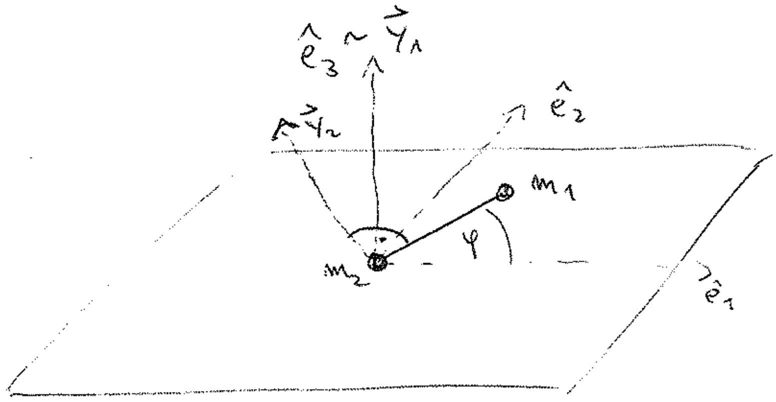
$$= \left(m_1 l^2 - \lambda\right) \cdot \left(\lambda - m_1 l^2\right) \cdot \lambda \; .$$

Die drei Lösungen lauten

$$\lambda_1 = \lambda_2 = m_1 l^2 \quad , \quad \lambda_3 = 0 \; . \qquad (9.31)$$

Durch direktes Nachrechnen verifiziert man, dass die Eigenvektoren gegeben sind durch

$$\vec{Y}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \vec{Y}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} , \vec{Y}_3 = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} . \qquad (9.32)$$




Es ist anschaulich einsichtig, dass die beiden Hauptträgheitsachsen mit nicht-verschwindendem Eigenwert senkrecht zur Verbindungslinie zwischen $m_1$ und $m_2$ liegen.

Für Drehungen um diese Verbindungslinie $\sim \vec{y}_3$ verschwindet das Trägheitsmoment, da die (idealisierten) Massepunkte keine Ausdehnung besitzen.

(12) Für eine homogene Kugel mit Dichte $\rho$ und Radius $R$ verschwinden die Deviationsmomente, $\vec{x} = r \begin{pmatrix} \sin\vartheta \cos\varphi \\ \sin\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$

z.B

$$\Theta_{12} = \rho \int_0^R dr\, r^2 \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \left( r^2 \sin^2\vartheta \cos\varphi \sin\varphi \right) = 0 \tag{9.33}$$

Wegen der sphärischen Symmetrie müssen alle Hauptträgheitsmomente gleich sein,

$$3\Theta_{11} = \Theta_{11} + \Theta_{22} + \Theta_{33}$$

$$= \varrho \int_0^R dr\, r^2 \underbrace{\int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta}_{=2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \left(3r^2 \underbrace{- x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}_{=-r^2}\right)$$

$$= 8\pi\varrho \int_0^R dr\, r^4 = \frac{8\pi\varrho}{5} R^5 \tag{9.34}$$

Mit

$$\varrho = \frac{M}{\text{Volumen}} = \frac{M}{\frac{4\pi}{3} R^3} = \frac{3M}{4\pi R^3} \tag{9.35}$$

folgt

$$\underline{\underline{\Theta_{11}}} = \Theta_{22} = \Theta_{33} = \underline{\underline{\frac{2}{5} M R^2}} \quad . \tag{9.36}$$

(NB: Auch ohne die expliziten Symmetrieannahmen kann man dieses Ergebnis direkt verifizieren.)

Der Drehimpuls im Inertialsystem lautet

$$\vec{L}' = \sum_{i=1}^{N} m_i \, (\vec{x}_i{}' \times \dot{\vec{x}}_i{}') \tag{9.37}$$

Über den Zusammenhang $\vec{x}' = R\vec{x}$ und $\dot{\vec{x}}' = R(\vec{\omega} \times \vec{x})$

folgt

$$\vec{L}' = \sum_{i=1}^{N} m_i \, (R\vec{x}_i) \times [R(\vec{\omega} \times \vec{x}_i)] \, . \tag{9.38}$$

Da beide Vektoren im Kreuzprodukt um die gleiche Drehmatrix gedreht werden, kann man das Kreuzprodukt auch im ungedrehten System ausführen und anschließend das Ergebnis drehen:

$$\underline{\underline{\vec{L}'}} = \sum_{i=1}^{N} m_i \, R[\underline{\underline{\vec{x}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{x}_i)}}] \tag{9.39}$$

Daraus lässt sich der Drehimpuls im körperfesten System extrahieren:

$$\underline{\underline{\vec{L}}} = R^T \vec{L}' = \sum_{i=1}^{N} m_i \, [\vec{x}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{x}_i)]$$

$$= \sum_i m_i \left[\vec{x}_i^{\,2} \vec{\omega} - \vec{x}_i (\vec{x}_i \cdot \vec{\omega})\right] = \underline{\underline{\Theta \vec{\omega}}} \tag{9.40}$$

Dieser Zusammenhang besagt, dass $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$ gilt, wenn die Drehachse $\vec{\omega}$ einer der Hauptträgheitsachsen des Körpers entspricht. Ansonsten sind $\vec{\omega}$ und $\vec{L}$ i.A. nicht parallel.

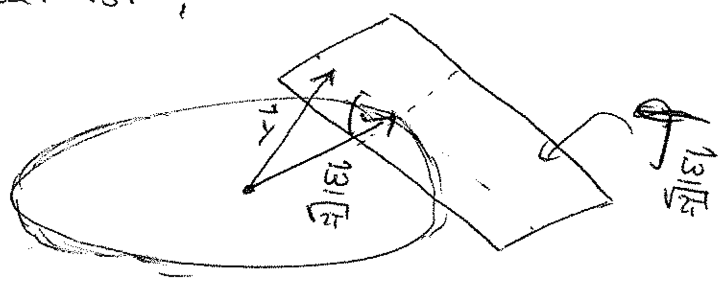
Eine allgemeine Eigenschaft der Richtung von $\vec{L}$ lässt sich aus folgender Überlegung extrahieren.

Wegen $2T = \vec{\omega}^T \Theta \omega$ ist $\frac{1}{\sqrt{2T}} \vec{\omega}$ ein Punkt auf dem Trägheitsellipsoid (vgl. (9.26)).

Die Tangentialebene an das Trägheitsellipsoid in diesem Punkt ist

$$\mathcal{T}_{\vec{\omega}/\sqrt{2T}} = \left\{ \vec{y} \;\middle|\; \vec{y}^T \Theta \frac{\vec{\omega}}{\sqrt{2T}} = 1 \right\}, \qquad (9.41)$$

d.h. die Menge aller Vektoren $\vec{y}$, deren Projektion auf $\frac{\vec{\omega}}{\sqrt{2T}}$ konstant ist,




Der Drehimpuls $\vec{L} = \Theta \vec{\omega}$ steht also senkrecht auf der Tangentialebene an das Trägheitsellipsoid im Punkt $\frac{\vec{\omega}}{\sqrt{2T}}$.

Bislang haben wir die Wahl des Ursprungs der Koordinaten-systeme völlig offen gelassen. Es liegt nahe zu vermuten, dass die Wahl des Schwerpunkts als Ursprung des körperfesten Systems günstig sein kann. Beginnen wir mit einem beliebigen körperfesten System $\vec{x}$, in dem der Schwerpunkt den Ortsvektor $\vec{X}$ hat. Seien $\vec{x}^*$ die Koordinaten im Schwerpunktssystem, d.h.

$$\vec{x} = \vec{X} + \vec{x}^*, \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{x}_i^* = 0 \tag{9.42}$$

dann gilt für den Trägheitstensor

$$\begin{aligned}
\Theta_{jk} &= \sum_{i=1}^{N} m_i \left( \vec{x}_i^2 \delta_{jk} - x_{i,j} x_{i,k} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{N} m_i \left[ (\vec{x}_i^* + \vec{X})^2 \delta_{jk} - (x_{i,j}^* + X_j)(x_{i,k}^* + X_k) \right] \\
&= \sum_i m_i \left( \vec{x}_i^{*2} \delta_{jk} - x_{i,j}^* x_{i,k}^* \right) + M \left( \vec{X}^2 \delta_{jk} - X_j X_k \right) \\
&\quad + 2 \delta_{jk} \vec{X} \cdot \sum_i m_i \vec{x}_i^* - X_j \sum_i m_i x_{i,k}^* - X_k \sum_i m_i x_{i,j}^* ,
\end{aligned} \tag{9.43}$$

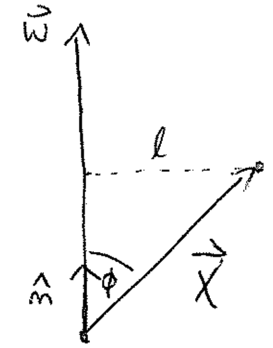
wobei $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ die Gesamtmasse ist. Aufgrund der Definition des Schwerpunkts, (9.42), verschwinden alle 3 Terme der zweiten Zeile in (9.43).

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \Theta_{jk} &= \sum_{i=1}^{N} m_i \left( \vec{x}_i^{*2} \delta_{jk} - x_{i,j}^* x_{i,k}^* \right) + M \left( \vec{X}^2 \delta_{jk} - X_j X_k \right) \\
&= \Theta_{jk}^* + M \left( \vec{X}^2 \delta_{jk} - X_j X_k \right) .
\end{aligned} \tag{9.44}$$

Sei $\hat{n}$ nun ein Einheitsvektor, der in Richtung der Drehachse zeige, dann gilt

$$\ell^2 = \vec{X}^2 - (\vec{X}\cdot\hat{n})^2 \quad , \qquad (9.45)$$

wobei $\ell$ den Abstand der Drehachse vom Schwerpunkt bezeichnet:



$$|\vec{X}| \cos\phi = \vec{X}\cdot\hat{n}$$

$$\ell^2 \overset{(9.43)}{=} |\vec{X}|^2 \sin^2\phi$$

Damit gilt für das Trägheitsmoment bei Rotation um $\hat{n}$:

$$\hat{n}^T \Theta \hat{n} \overset{(9.44)}{=} \hat{n}^T \Theta^* \hat{n} + M\ell^2 , \qquad (9.46)$$

Satz von Steiner

d.h. dieses Trägheitsmoment ist gleich dem um $M\ell^2$ vermehrten Trägheitsmoment $\Theta^*$ im Schwerpunktsystem.