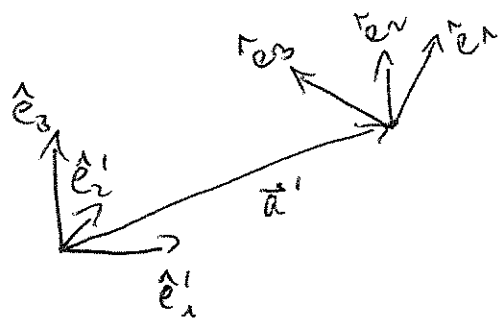


8. Bewegte Bezugssysteme

Obwohl für viele Experimente im (erdfesten) Labor das Laborsystem ein Newtonsches Inertialsystem hinreichend gut approximiert, lassen sich für einige Experimente die Effekte nicht vernachlässigen, in denen sich die Abweichungen des Laborsystems von einem Inertialsystem manifestieren. Ganz allgemein wollen wir uns im Folgenden mit der Newtonschen Physik aus der Sicht von bewegten Bezugssystemen beschäftigen.

8.1 Koordinatentransformationen

Betrachten wir zunächst den Zusammenhang zwischen kartesischen Koordinatensystemen



Gegeben sei ein gestrichenes Bezugssystem mit Basis \hat{e}_i

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij} \quad (8.1)$$

Zu einem festen Zeitpunkt befindet sich der Ursprung

eines (bewegten) Bezugssystems am Ort \vec{a}' , das durch die Basisvektoren \hat{e}_i aufgespannt sei. Auch für diese Basis gilt

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij} \quad (8.2)$$

Im gestrichenen System seien die Komponenten des \hat{e}_i gegeben durch

$$\hat{e}_i = \begin{pmatrix} R_{1i} \\ R_{2i} \\ R_{3i} \end{pmatrix}, \quad \hat{e}'_i = R_{ji} \hat{e}'_j \quad (8.3)$$

Die neun Komponenten R_{ij} haben eine einfache geometrische Bedeutung:

$$\begin{aligned} \hat{e}'_i \cdot \hat{e}'_j &\stackrel{(8.3)}{=} \hat{e}'_i \cdot R_{kj} \hat{e}'_k = R_{kj} \hat{e}'_i \cdot \hat{e}'_k \stackrel{(8.1)}{=} R_{kj} \delta_{ik} = R_{ij} \\ &= \cos(\angle(\hat{e}'_i, \hat{e}'_j)), \end{aligned} \quad (8.4)$$

d.h. die R_{ij} entsprechen dem Cosinus der Winkel zwischen den Basisvektoren. Aus (8.2) folgt die wichtige Relation

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\delta_{ij}}} &= \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j \stackrel{(8.3)}{=} R_{ki} \hat{e}'_k \cdot R_{lj} \hat{e}'_l = R_{ki} R_{lj} \underbrace{\hat{e}'_k \cdot \hat{e}'_l}_{\stackrel{(8.1)}{=} \delta_{kl}} \\ &= \underline{\underline{R_{ki} R_{kj}}} \end{aligned} \quad (8.5)$$

Mit der Definition der Matrix-Transposition

$$(R^T)_{ij} = R_{ji} \quad (8.6)$$

lässt sich (8.5) in Matrixnotation schreiben als

$$R^T R = \mathbb{1}, \quad (8.7)$$

bzw. $R R^T = \mathbb{1}$. Matrizen mit dieser Eigenschaft (d.h. $R^T = R^{-1}$) heißen orthogonal.

Die Matrix R_{ij} hat 9 Komponenten. (8.5) entspricht 6 Gleichungen, d.h. 6 Bedingungen an R_{ij} ; d.h. i.A. sind 3 Matrixelemente der Matrix R unabhängig.

Nach dem Determinantensatz folgt

$$R^T R = \mathbb{1} \quad \Rightarrow \quad 1 = \det R^T R = \det R^T \cdot \det R \\ = (\det R)^2 \quad (8.8)$$

Die Menge der orthogonalen Matrizen zerfällt also in zwei Klassen, solche mit $\det R = 1$ und solche mit $\det R = -1$ (eigentliche und uneigentliche orthogonale Matrizen).

Für den Fall, dass $\hat{e}_i \equiv \hat{e}'_i$, gilt offensichtlich

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} \quad \Rightarrow \quad R^T R = \mathbb{1} \quad (8.9) \\ \Rightarrow \quad \det R = 1.$$

Ein Beispiel für eine uneigentliche orthogonale Matrix ist

$$R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R^T R = \mathbb{1}, \det R = -1. \quad (8.10)$$

Eine uneigentliche orthogonale Matrix führt also ein rechts- in ein linkshändiges Koordinatensystem über (und umgekehrt).

Mathematisch betrachtet bilden die orthogonalen Matrizen eine Gruppe, die sogenannte $O(3)$.

↑ 3×3 Matrizen

D.h. zu jedem $R \in O(3)$ existiert ein inverses Element R^{-1} , so dass $R R^{-1} = \mathbb{1}$. Wegen (8.7) ist R^{-1} gegeben

durch $R^{-1} = R^T$. Es existiert ein "Eins element" $\mathbb{1} \in O(3)$,

so dass $R \cdot \mathbb{1} = R$. Und für zwei Elemente

$R_1, R_2 \in O(3)$ gilt unter der Verknüpfung (die in diesem Fall durch die Matrixmultiplikation gegeben ist), dass

$R_1 \cdot R_2 \in O(3)$ ebenfalls Element der Gruppe ist.

(Letzteres lässt sich mit der Regel $(A \cdot B)^T = B^T A^T$ leicht nachrechnen.)

Die eigentlichen orthogonalen Matrizen mit $\det R = 1$ bilden eine Untergruppe der $O(3)$, die sogenannten speziell orthogonalen Matrizen $SO(3)$. (NB: die uneigentlichen orth. Matrizen können keine Untergruppe bilden, da sie kein Einselement enthalten.)

Die Matrixmultiplikation ist im Allgemeinen nicht kommutativ, d.h.

$$R_1 \cdot R_2 \neq R_2 \cdot R_1. \quad (8.11)$$

Dies gilt i.A. auch für Elemente der $O(3)$ oder $SO(3)$.

Physikalisch entspricht dies der Erfahrungstatsache, dass Drehungen, die entlang verschiedener Achsen hintereinander ausgeführt werden, nicht miteinander vertauschen.

Betrachten wir schließlich die Transformation von Ortsvektoren. Der Ortsvektor \vec{x} im ungestrichen System entspricht im gestrichenen System dem Ortsvektor (vgl. S. 168)

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= \vec{a}' + x_i \hat{e}_i = \vec{a}' + x_i R_{ki} \hat{e}'_k \\ \Rightarrow x'_k &= a'_k + R_{ki} x_i \end{aligned} \quad (8.12)$$

Für einen weiteren Punkt \vec{y} gilt entsprechend

$y'_k = a'_k + R_{ki} y_i$. Der Verbindungsvektor transformiert sich entsprechend wie

$$x'_k - y'_k = R_{ki} (x_i - y_i) \quad (8.13)$$

In der Physik ist es oft üblich, Vektoren als solche Objekte zu definieren, die sich wie (8.13) transformieren. (NB: danach ist ein Ortsvektor streng-

genommen kein Vektor; er wird bisweilen als "gebundener" Vektor bezeichnet.)

8.2 Zeitabhängige Transformationen

Bewegen sich das gestrichene und ungestrichene Koordinatensystem beliebig relativ zueinander, so sind die Koordinaten des Ursprungs a_i' und die Orientierung der Achsen i.A. zeitabhängig,

$$\vec{a}' \in \mathbb{R} \rightarrow \vec{a}'(t) \in \mathbb{R}(t) \quad (8.14)$$

$$\text{d.h.} \quad \vec{x}'(t) = \vec{a}'(t) + R(t) \cdot \vec{x}(t) \quad (8.15)$$

Für die Geschwindigkeit gilt dann

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}' &= \dot{\vec{a}}' + R \cdot \dot{\vec{x}} + \dot{R} \cdot \vec{x} \\ &= \dot{\vec{a}}' + R \cdot \left(\dot{\vec{x}} + R^T \dot{R} \cdot \vec{x} \right). \end{aligned} \quad (8.16)$$

Hier taucht die Matrix $R^T \dot{R}$ auf. Aus $R^T R = \mathbb{1}$

folgt:

$$0 = \dot{\mathbb{1}} = \dot{R}^T R + R^T \dot{R} = (R^T \dot{R})^T + R^T \dot{R} \quad (8.17)$$

Matrizen mit der Eigenschaft $A^T + A = 0$ heißen

schief symmetrisch.

Die Matrix $R^T \dot{R}$ muss also von folgender Form sein: 174

$$R^T \dot{R} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & +\omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.18)$$

wobei die ω_i zunächst unbestimmt sind. Die Vorzeichen in jedem off-diagonal Dreieck sind so gewählt, dass man $R^T \dot{R}$ mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols schreiben kann:

$$(R^T \dot{R})_{ij} = -\epsilon_{ijk} \omega_k, \quad (8.19)$$

Damit lässt sich schreiben

$$\begin{aligned} (R^T \dot{R} \cdot \vec{x})_i &= (R^T \dot{R})_{ij} x_j = -\epsilon_{ijk} \omega_k x_j = \epsilon_{ijk} \omega_j x_k \\ &= (\vec{\omega} \times \vec{x})_i, \end{aligned} \quad (8.20)$$

und (8.16) lautet

$$\dot{\vec{x}}' = \dot{\vec{a}}' + R \cdot (\dot{\vec{x}} + \vec{\omega} \times \vec{x}). \quad (8.21)$$

Analog folgt für die Transformation eines beliebigen Vektors mit $\vec{v}' = R \vec{v}$, dass

$$\dot{\vec{v}}' = R (\dot{\vec{v}} + \vec{\omega} \times \vec{v}). \quad (8.22)$$

Die Bedeutung von $\vec{\omega}$ wird aus einem einfachen Beispiel deutlich. Sei \hat{e}_i gegeben durch

$$\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (8.23)$$

Das umgestrichene Koordinatensystem drehe sich mit Winkelgeschwindigkeit ω um die z -Achse, d.h.

$${}^1\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad {}^1\hat{e}_2 = \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad {}^1\hat{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (8.24)$$

Damit ist

$$R = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R^T = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t & 0 \\ -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.25)$$

und

$$\dot{R} = \omega \begin{pmatrix} -\sin \omega t & -\cos \omega t & 0 \\ \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

so dass

$$R^T \dot{R} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}. \quad (8.26)$$

In diesem einfachen Beispiel entspricht $|\vec{\omega}|$ der Winkelgeschwindigkeit der Drehung, und die Richtung von $\vec{\omega}$ der Richtung der Drehachse.

Im Allgemeinen sind sowohl Richtung als auch Betrag von $\vec{\omega}$ zeitabhängig. Betrachten wir R zum Zeitpunkt t und $t+dt$, so folgt zur Ordnung dt

$$R(t+dt) = R(t) + \dot{R}(t) dt$$

$$= R(t) \cdot (\mathbb{1} + R^T(t) \dot{R}(t) dt)$$

(8.27)

$$\Rightarrow R_{ij}(t+dt) = R_{ik}(t) \cdot (\delta_{kj} - \epsilon_{kjl} \omega_l dt)$$

Analog zum obigen Beispiel gibt $\vec{\omega}(t)$ die momentane Lage der Drehachse zum Zeitpunkt t an. Im Zeitintervall dt findet dann eine Drehung um den Winkel $d\psi = |\omega| dt$ im positiven Drehsinn (Rechte-Hand-Regel) statt.

Den Faktor $(\delta_{kj} - \epsilon_{kjl} \omega_l dt) \cong \mathbb{1} + d\vec{\psi} \times$.

kann man als infinitesimale Drehung interpretieren.

8.3 Scheinkräfte

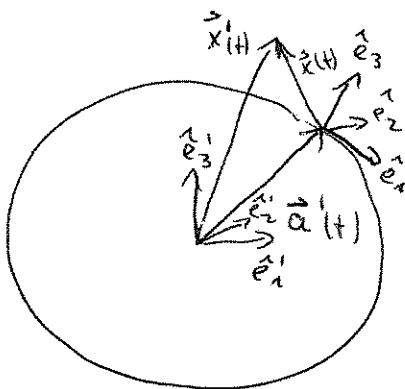
Im Folgenden betrachten wir das gestrichene Bezugssystem als Inertialsystem, in dem die Newtonschen Gesetze gelten, und studieren die Beschreibung der Newtonschen Physik im ungestrichenen System (Labosystem)

$$\vec{x}' = \vec{a}' + R \vec{x} = R(\vec{a} + \vec{x}), \quad (8.28)$$

wobei wir die Hilfsgröße \vec{a} über $\vec{a}' = R \cdot \vec{a}$ eingeführt haben.

Sei z.B. das gestrichene System am Erdmittelpunkt angeheftet (in guter Näherung ein Inertialsystem) und das ungestrichene System ein mit der Erdoberfläche mitrotierendes Labosystem, dann rotiert $\vec{a}'(t)$ im gestrichenen Bezugssystem,

während \vec{a} im Labosystem zeitlich konstant bleibt



$$\vec{a}'(t) = R(t) \cdot \vec{a}, \quad \vec{a} = \text{const.}$$

Im Folgenden beschränken wir uns (8.29) allgemein auf den Fall $\vec{a} = \text{const.}$

Die Bewegung einer Punktmasse bei $\vec{x}'(t)$ wird im Inertialsystem durch die Lagrange-Funktion

$$L = T - V = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}'^2 - V(\vec{x}') \quad (8.30)$$

Wir benötigen

$$\dot{\vec{x}}' \stackrel{(8.28)}{=} \underset{(8.28)}{R} \left(\dot{\vec{x}} + \vec{\omega} \times (\vec{a} + \vec{x}) \right)$$

$$\begin{aligned} \text{und } \dot{\vec{x}}'^2 &\equiv \dot{\vec{x}}'^T \cdot \dot{\vec{x}}' = (\dot{\vec{x}} + \vec{\omega} \times (\vec{a} + \vec{x}))^T \underbrace{R^T \cdot R}_{= \mathbb{1}} (\dot{\vec{x}} + \vec{\omega} \times (\vec{a} + \vec{x})) \\ &= (\dot{\vec{x}} + \vec{\omega} \times (\vec{a} + \vec{x})) \cdot (\dot{\vec{x}} + \vec{\omega} \times (\vec{a} + \vec{x})), \end{aligned} \quad (8.31)$$

und erhalten die Lagrange-Funktion im Laborkoordinaten

$$L = \frac{m}{2} (\dot{\vec{x}} + \vec{\omega} \times (\vec{a} + \vec{x}))^2 - V(\vec{x}), \quad (8.32)$$

wobei wir das Potential $V(\vec{x}') = V(R \cdot (\vec{a} + \vec{x})) =: V(\vec{x})$ als Funktion der Laborkoordinaten auffassen. Wir können die Laborkoordinaten als generalisierte Koordinaten auffassen und die Bewegungsgleichungen im Laborsystem aus den entsprechenden Euler-Lagrange-Gleichungen ableiten. Wir erhalten

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = m (\dot{\vec{x}} + \vec{\omega} \times (\vec{a} + \vec{x})) \quad (8.33)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = m (\dot{\vec{x}} \times \vec{\omega}) + m (\vec{\omega} \times (\vec{a} + \vec{x})) \times \vec{\omega} \stackrel{**}{=} -\vec{\nabla} V$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left[m (\dot{\vec{x}} + \vec{\omega} \times (\vec{a} + \vec{x})) \right] - \left[m (\dot{\vec{x}} \times \vec{\omega}) + m (\vec{\omega} \times (\vec{a} + \vec{x})) \times \vec{\omega} - \vec{\nabla} V \right] = 0 \quad (8.34)$$

bzw.

$$m \ddot{\vec{x}} + m [\dot{\vec{\omega}} \times (\vec{a} + \dot{\vec{x}})] + 2m \vec{\omega} \times \dot{\vec{x}} + m [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x})] + m [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{a})] + \vec{\nabla} V = 0. \quad (8.35)$$

Zusätzlich zur Newtonschen Kraft $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$ treten vier weitere Terme auf, die wir als Scheinkräfte interpretieren können, da alle vier neuen Terme genauso wie $\vec{\nabla} V$ zur Beschleunigung $m \ddot{\vec{x}}$ der Punktmasse beitragen können.

Diese Scheinkräfte lassen sich interpretieren:

(1) $-m [\dot{\vec{\omega}} \times (\vec{a} + \dot{\vec{x}})]$: dieser Term tritt nur auf, wenn die Drehachse sich ändert. Für Laborsysteme auf der Erdoberfläche ist $\dot{\vec{\omega}} \approx 0$ (abgesehen von Präzession und Zdschwankungen).

(2) $-2m (\vec{\omega} \times \dot{\vec{x}}) = 2m (\dot{\vec{x}} \times \vec{\omega}) =: \vec{F}_C$ (Coriolis-Kraft) (8.36)

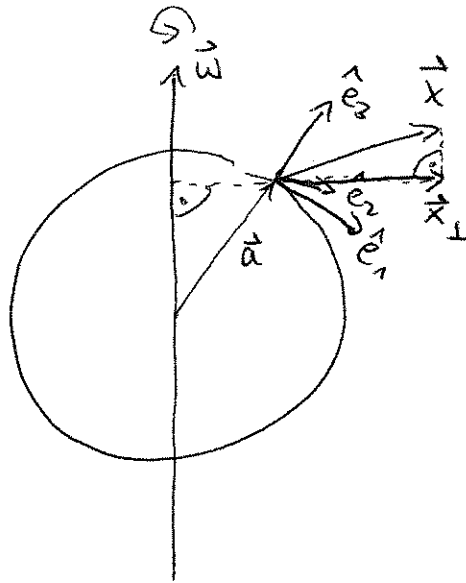
Die Coriolis-Kraft wirkt auf Massepunkte, die sich im Laborsystem bewegen, $\dot{\vec{x}} \neq 0$. Sie steht senkrecht auf $\dot{\vec{x}}$ und ist senkrecht zur Drehachse $\vec{\omega}$.

$$(3) \quad \vec{F}_z := m \left((\vec{\omega} \times \vec{x}) \times \vec{\omega} \right) \quad (\text{Zentrifugalkraft})$$

Vektoridentitäten führen auf

$$\begin{aligned} \vec{F}_z &= m \left(\vec{\omega}^2 \vec{x} - \vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \vec{x}) \right) \\ &= m \omega^2 \left(\vec{x} - \frac{\vec{\omega} (\vec{x} \cdot \vec{\omega})}{\omega^2} \right) =: m \omega^2 \vec{x}_\perp, \end{aligned} \quad (8.37)$$

wobei \vec{x}_\perp der Anteil des Vektors \vec{x} senkrecht zur Drehachse ist.



(4) $m \left((\vec{\omega} \times \vec{a}) \times \vec{\omega} \right)$: ist unabhängig vom \vec{x} . Diese Kraft beschreibt die Zentrifugalkraft auf den Ursprung des Laborsystems. In der Praxis wird sie als Beitrag zur Erdbeschleunigung behandelt

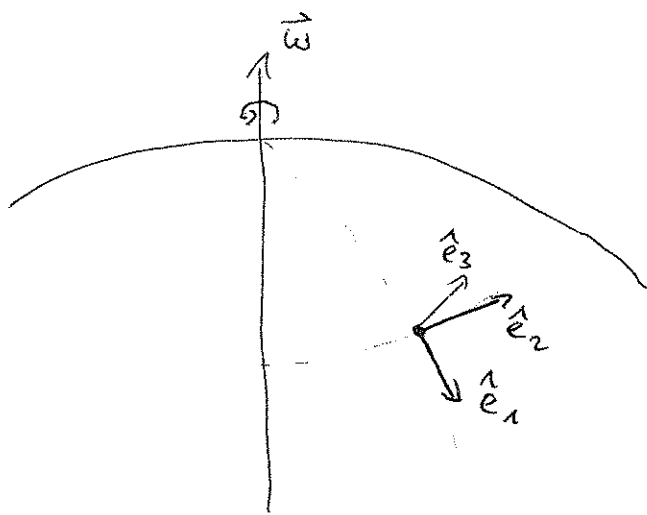
$$\vec{g} \rightarrow \vec{g}_{\text{Grav.}} + (\vec{\omega} \times \vec{a}) \times \vec{\omega}. \quad (8.38)$$

Alle Scheinkräfte haben ihren Ursprung in der Massenträgheit $\sim m \ddot{x}'$. Scheinkräfte zeigen an, dass das gewählte Bezugssystem kein Inertialsystem ist.

Betrachten wir beispielhaft die Coriolis-Kraft

Seien \hat{e}_1 und \hat{e}_2 nach Süden bzw. Osten orientiert, \hat{e}_3 zeige "nach oben", d.h. weg vom Erdmittelpunkt. Der Ursprung des Laborsystems befindet sich bei geografischer

Breite ϑ (\neq Polwinkel, $\vartheta=0$ (Äquator), $\vartheta=\frac{\pi}{2}$ (Nordpol))



Im Laborsystem ist der Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ dann gegeben durch

$$\vec{\omega} = \omega \begin{pmatrix} -\cos \vartheta \\ 0 \\ \sin \vartheta \end{pmatrix} \quad (8.39)$$

Der Drehsinn ist derart, dass das Laborsystem sich in Richtung Osten bewegt.

$\vec{\omega}$ kann in Komponenten horizontal und vertikal zur Erdoberfläche zerlegt werden,

$$\vec{\omega}_H = \begin{pmatrix} -\omega \cos \sigma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\omega}_V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \sin \sigma \end{pmatrix}. \quad (8.40)$$

Entsprechend hat die Coriolis-Kraft zwei Komponenten

$$\vec{F}_c = 2m (\dot{\vec{x}} \times \vec{\omega}_V) + 2m (\dot{\vec{x}} \times \vec{\omega}_H). \quad (8.41)$$

Bei Bewegungen horizontal zur Erdoberfläche ist $\dot{\vec{x}} \perp \hat{e}_z$, d.h. der zweite Term zeigt vertikal zur Erdoberfläche. Der erste Term $\sim \dot{\vec{x}} \times \vec{\omega}_V$ zeigt auf der Nordhalbkugel nach rechts (zur Bewegungsrichtung) und auf der Südhalbkugel nach links. Die Coriolis-Kraft hat Bedeutung für die Bewegung der Luftmassen in der Atmosphäre, für Meeresströme, Flussläufe und für die Ballistik.

8.4 Das reduzierte Dreikörperproblem

Als Anwendung bewegter Bezugssysteme betrachten wir das reduzierte Dreikörperproblem. "Reduziert" bedeutet in diesem Fall, eine Reihe von Annahmen zu machen, unter denen das i. A. schwierige Problem lösbar wird. Trotz der einschränkenden Annahmen hat diese Lösung viele Anwendungen in der Himmelsmechanik.

Wir betrachten eine Testmasse m_3 , die sich in der Nähe von zwei erheblich größeren Massen $m_1, m_2 \gg m_3$ bewegt. (m_1, m_2 seien z.B. die Sonne und ein Planet, m_3 sei ein Asteroid oder eine Raumsonde)

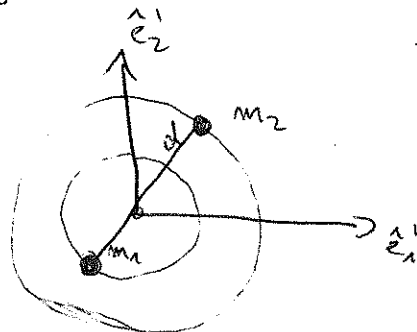
Wir nehmen an, dass sich m_1 und m_2 auf Kreisbahnen um ihren Schwerpunkt bewegen. D.h. m_1 und m_2 folgen der Lösung des Keplerproblems mit Exzentrizität $\epsilon=0$.

Des Weiteren bewege sich m_3 in der Bahnebene von m_1 und m_2 , ohne Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Bahnebene.

Der Begriff Testmasse soll zum Ausdruck bringen, dass die von m_3 ausgehende Gravitationswirkung auf

die gebundene Bewegung von m_1 und m_2 vernachlässigbar ist.

In einem Inertialsystem \hat{e}_i^1 sehen Bahnkurven von m_1, m_2 wie folgt aus



z.B. $m_1 > m_2$

Mit der Definition

$$\mu := \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \quad 1 - \mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (8.42)$$

rotieren die Koordinaten der beiden Massen auf den Bahnkurven

$$\vec{x}_1^1 = \underbrace{(1-\mu)}_{<0} d \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_2^1 = \mu d \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

(8.43)

wobei d der Abstand zwischen m_1 und m_2 ist,

und ω den konstanten Betrag der Winkelgeschwindigkeit

bezeichnet. Nach dem 3. Keplerschen Gesetz ist die Umlaufzeit gegeben durch (vgl. (6.46))

$$T^2 = \frac{4\pi^2 d^3}{G(m_1 + m_2)} \quad (8.44)$$

woraus der Betrag der Winkelgeschwindigkeit folgt:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{d^3}} \quad (8.45)$$

Der zugehörige Vektor der nach der rechten-Hand-Regel senkrecht zu \hat{e}_1, \hat{e}_2 zeigen muss ist

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}. \quad (8.46)$$

Wir führen nun ein mitbewegtes Koordinatensystem \hat{e}_i ein, das definiert ist durch

$$\begin{aligned} \hat{e}_3 &= \hat{e}_3 \\ \hat{e}_1 &= \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_2 = \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (8.47)$$

so dass m_1 und m_2 immer auf der \hat{e}_1 Achse liegen:

$$\vec{x}_1 = (\mu-1)d \hat{e}_1, \quad \vec{x}_2 = \mu d \hat{e}_1 \quad (8.48)$$

In diesem System lässt sich die Bahnkurve von m_3 durch die Koordinaten (x, y) parametrisieren

$$\vec{x}_3 = x \hat{e}_1 + y \hat{e}_2. \quad (8.49)$$

Da $\dot{\vec{\omega}} = 0$ gilt, verschwindet der erste Scheinkraftterm in (8.35). Da die Ursprünge der Koordinatensysteme zusammenfallen, gilt des Weiteren $\vec{a} = 0$, und wir erhalten die Bewegungsgleichung für m_3 :

$$m_3 \ddot{\vec{x}}_3 + 2m_3 \vec{\omega} \times \dot{\vec{x}}_3 + m_3 (\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}_3)) + \vec{\nabla} V(\vec{x}_3) = 0 \quad (8.50)$$

Die potentielle Energie ist gegeben durch

$$V(\vec{x}_3) = - \frac{Gm_1 m_3}{r_1} - \frac{Gm_2 m_3}{r_2} \quad (8.51)$$

mit den Abständen

$$r_1 = \left((x - (n-1)d)^2 + y^2 \right)^{1/2}, \quad r_2 = \left((x - nd)^2 + y^2 \right)^{1/2}. \quad (8.52)$$

Für die Kreuzprodukte in (8.50) erhalten wir

$$\vec{\omega} \times \dot{\vec{x}}_3 = \begin{pmatrix} -\omega \dot{y} \\ \omega \dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}_3) = \begin{pmatrix} -\omega^2 x \\ -\omega^2 y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (8.53)$$

↑
im \hat{e}_i System

was auf folgende Bewegungsgleichungen führt:

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x + \frac{\partial V}{m_3 \partial x} = 0 \quad (8.54)$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y + \frac{1}{m_3} \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

Mit dem effektiven Potential

$$U := \frac{V}{m_3} - \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) \quad (8.55)$$

vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen zu

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \ddot{y} + 2\omega\dot{x} = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad (8.56)$$

Wir multiplizieren die erste mit \dot{x} , die zweite mit \dot{y} ,
und addieren das Resultat. Wir erhalten

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + U \right) = 0 \quad (8.57)$$

Damit erhalten wir die - Jacobi - Konstante

$$C := -2U - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \omega^2 (x^2 + y^2) - 2\frac{V}{m_3} - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \text{const.}, \quad (8.58)$$

das einzig bekannte Integral des reduzierten
Dreikörperproblems.

Wegen $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 > 0$ muss die Bewegung von m_3 die Bedingung

$$C + 2U < 0 \quad (8.59)$$

erfüllen. Dieser physikalisch zulässige Bereich ist durch die sogenannte Hill-Kurve begrenzt, die definiert ist durch

$$\text{Hill-Kurve: } U = -\frac{C}{2} \quad (8.60)$$

Als einfache Annahme suchen wir nach Punkten, an denen m_3 (im bewegten Bezugssystem) ruht, d.h. $\dot{x} = \dot{y} = \ddot{x} = \ddot{y} = 0$.

Diese Punkte müssen gemäß (8.56) $\vec{\nabla} U = 0$ erfüllen. Wir beginnen die Suche mit der Annahme, dass solche Punkte den gleichen Abstand von den Massen m_1 und m_2 haben könnten:

$$r = r_1 = r_2,$$

so dass

$$x = \frac{2\mu - 1}{2} d, \quad r = \sqrt{\frac{d^2}{4} + y^2}. \quad (8.61)$$

Das effektive Potential hat die Ableitung in x -Richtung 189

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{Gm_1}{r_1} - \frac{Gm_2}{r_2} \right) - \omega^2 x \\ &= \frac{Gm_1}{r_1^3} (x - (\mu-1)d) + \frac{Gm_2}{r_2^3} (x - \mu d) - \omega^2 x \quad (8.59) \end{aligned}$$

Mit der Annahme (8.61) finden wir

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{r_1=r_2=r} &= \frac{G(m_1+m_2)}{r^3} \left(\mu(x - (\mu-1)d) + (1-\mu)(x - \mu d) \right) - \omega^2 x \\ &= \left(\frac{G(m_1+m_2)}{r^3} - \omega^2 \right) x \\ &\stackrel{(8.45)}{=} G(m_1+m_2) \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{d^3} \right) x \quad (8.60) \end{aligned}$$

D.h. die Annahme $r_1=r_2=r$ liefert zwei Lösungspunkte

$$\text{mit } r=d, \quad x = \frac{2\mu-1}{2} d, \quad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} d. \quad (8.61)$$

An diesen Orten ist analog zu (8.60) auch

$$\left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{r_1=r_2=r} = \left(\frac{G(m_1+m_2)}{r^3} - \omega^2 \right) y \stackrel{(8.61)}{=} 0 \quad (8.62)$$

Diese Kräftefreien Punkte (im bewegten System)

$$\vec{l}_{4,5} := \frac{d}{2} \begin{pmatrix} 2\mu - 1 \\ \pm \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.63)$$

bilden mit m_1 und m_2 gleichseitige Dreiecke.

Weitere drei Lösungen liegen auf der x -Achse und sind Lösungen eines Polynoms 5. Ordnung.

Alle 5 Punkte heißen Lagrange-Punkte $\vec{l}_1, \dots, \vec{l}_5$

