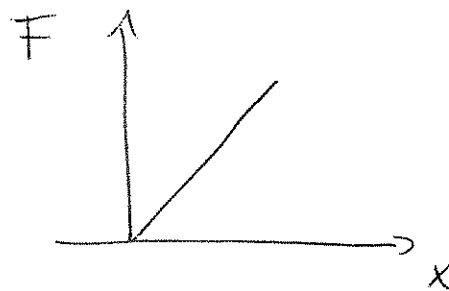
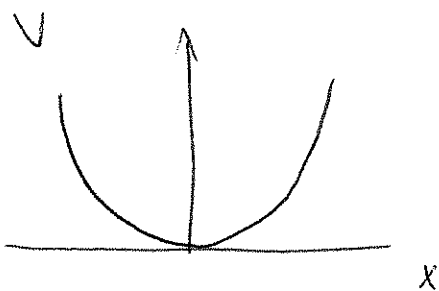


5 Harmonischer Oszillator

Der harmonische Oszillator ist das wichtigste Beispiel der Quantenmechanik. Er taucht in vielen Teildisziplinen der modernen Physik immer wieder auf fundamentalem Niveau auf, z.B. in der Quantenfeldtheorie, der Quantenoptik, der Festkörperphysik, etc. Ein elementares Verständnis des harmonischen Oszillators ist daher besonders wichtig.

5.1. Algebraische Lösung des eindimensionalen harmonischen Oszillators

In der stationären Schrödinger-Gleichung ist der eindimensionale harmonische Oszillator definiert durch das harmonische Potential $V = \frac{m}{2} \omega^2 x^2$, welches klassisch zu einer linearen Kraft mit Federkonstanten $k = m \omega^2$ führt.



Klassisch hat das System keine intrinsische

Längenskala. Jede beliebige Auslenkung ist in gleicher Weise möglich.

Der quantenmechanische Hamilton-Operator lautet

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \quad (5.1)$$

und führt zur stationären Schrödinger-Gleichung im Ortsraum:

$$E \psi_E(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \psi_E''(x) + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \psi_E(x). \quad (5.2)$$

Aus Masse m , Kreisfrequenz ω und der Naturkonstanten \hbar lässt sich nun eine Längenskala bilden,

$$x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \quad (5.3)$$

die für den quantenmechanischen harmonischen Oszillator charakteristisch ist. In makroskopischen Einheiten ergeben sich jedoch sehr kleine Zahlen,

$$\frac{x_0}{[1\text{m}]} \approx 10^{-17} \left(\frac{[\hbar \text{kg}]}{m} \right)^{1/2} \left(\frac{[1\text{Hz}]}{\omega} \right)^{1/2}. \quad (5.4)$$

Die Schrödinger-Gleichung ließe sich nun mit Standardmethoden für Differentialgleichungen dieses Typs (z.B. Potenzreihenentwicklung) im Ortsraum lösen. Die besondere Struktur des harmonischen Oszillators wird jedoch besonders bei der operatoralgebraischen Lösung deutlich. Dazu führen wir die folgenden Leiteroperatoren ein:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{x_0} + \frac{i x_0}{\hbar} p \right) \quad (\text{Absteigeoperator}) \quad (5.5)$$

$$a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{x_0} - \frac{i x_0}{\hbar} p \right) \quad (\text{Aufsteigeoperator})$$

(NB: diese nennt man auch $\overset{\uparrow}{a^+}$ Erzeuger und $\overset{\uparrow}{a}$ Vernichter)

Der Grund für die Namensgebung wird gleich deutlich.

a und a^+ sind weder hermitesch noch kompatibel miteinander, denn

$$\begin{aligned} \underline{\underline{[a, a^+]}} &= \frac{1}{2} \left[\frac{x}{x_0} + \frac{i x_0}{\hbar} p, \frac{x}{x_0} - \frac{i x_0}{\hbar} p \right] \quad (5.6) \\ &= \frac{1}{2} \left(\left[\frac{x}{x_0}, -\frac{i x_0}{\hbar} p \right] + \left[\frac{x_0}{\hbar} p, \frac{x}{x_0} \right] \right) = \frac{-i}{2\hbar} \left(\underbrace{[x, p]}_{i\hbar} - \underbrace{[p, x]}_{-i\hbar} \right) = \underline{\underline{1}} \end{aligned}$$

Da a und a^\dagger jeweils mit sich selbst vertauschen, erhalten wir die Vertauschungsregeln der Leitoperatoralgebra

$$\underline{[a, a] = 0 = [a^\dagger, a^\dagger] \quad , \quad [a, a^\dagger] = 1.} \quad (5.7)$$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} a^\dagger a &= \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x_0} - i \frac{x_0}{\hbar} p \right) \left(\frac{x}{x_0} + i \frac{x_0}{\hbar} p \right) = \frac{1}{2} \frac{x^2}{x_0^2} + \frac{1}{2} \frac{x_0^2}{\hbar^2} p^2 + \frac{i}{2\hbar} [x, p] \\ &= \frac{m\omega}{2\hbar} x^2 + \frac{1}{2m\omega\hbar} p^2 - \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

so dass der Hamilton-Operator durch $a^\dagger a$ ausgedrückt werden kann

$$\underline{H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) =: \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2} \right).} \quad (5.9)$$

Hier haben wir den Besetzungszahlenoperator N eingeführt. Er ist hermitesch

$$N^\dagger = (a^\dagger a)^\dagger = a^\dagger (a^\dagger)^\dagger = a^\dagger a = N,$$

und nicht-negativ:

$$\langle \psi | N | \psi \rangle = \langle \psi | a^\dagger a | \psi \rangle = \langle \phi | \phi \rangle \geq 0. \quad (5.10)$$

mit $|\phi\rangle = a|\psi\rangle$ und $|\psi\rangle$ beliebig.

Die Eigenwerte und Eigenvektoren von N (und damit auch von H) lassen sich nun algebraisch bestimmen; d.h. nur die Leiteroperatoralgebra, nicht aber die konkrete Darstellung (5.5) wird verwendet.

Sei $|n\rangle$ ein Eigenzustand von N mit Eigenwert n .

$$N|n\rangle = n|n\rangle, \quad n \geq 0. \quad (5.11)$$

Der Eigenwert n wird auch Besetzungszahl genannt. N erfüllt folgende Vertauschungsrelationen:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{[N, a^\dagger]}} &= [a^\dagger a, a^\dagger] = a^\dagger \underbrace{[a, a^\dagger]}_{=1} + \underbrace{[a^\dagger, a^\dagger]}_{=0} a = \underline{\underline{a^\dagger}} \\ \underline{\underline{[N, a]}} &= [a^\dagger a, a] = a^\dagger \underbrace{[a, a]}_{=0} + \underbrace{[a^\dagger, a]}_{=-1} a = \underline{\underline{-a}}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \underline{N(a^\dagger |m\rangle)} &= a^\dagger N |m\rangle + \underbrace{[N, a^\dagger]}_{= a^\dagger} |m\rangle = a^\dagger (N+1) |m\rangle \\ &= \underline{(m+1) a^\dagger |m\rangle} \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \underline{N(a |m\rangle)} &= a N |m\rangle + \underbrace{[N, a]}_{=-a} |m\rangle = a (N-1) |m\rangle \\ &= \underline{(m-1) a |m\rangle}, \end{aligned}$$

d.h. $a^\dagger |m\rangle$ und $a |m\rangle$ sind jeweils auch Eigenvektoren von N mit Eigenwert $(m+1)$ bzw. $(m-1)$.

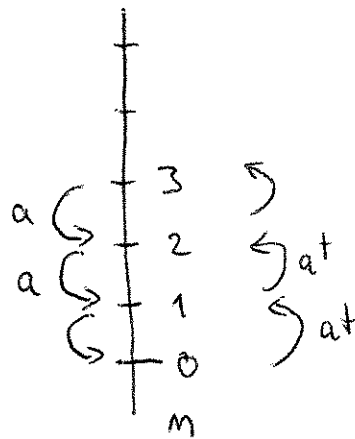
$\left\{ \begin{array}{l} a^\dagger \\ a \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{erhöht} \\ \text{erniedrigt} \end{array} \right\}$ also die Besetzungszahl um eins.

Entsprechendes gilt für Potenzen: $(a^\dagger)^m$ erhöht und $(a)^m$ erniedrigt die Besetzungszahl um m .

Was ist der kleinste Eigenwert (und damit der Grundzustand)?

$$\text{Wegen } \langle m | N |m\rangle = \langle m | a^\dagger a |m\rangle = m \langle m | m\rangle \quad (5.14)$$

ist für $m \neq 0$ der Vektor $a|m\rangle$ ungleich dem Nullvektor, falls $|m\rangle$ auch nicht der Nullvektor ist. Deshalb ist mit $m \neq 0$ auch $m-1$ ein Eigenwert von N . Da die Eigenwerte von N aber nicht-negativ sind, muss $m \in \mathbb{N}_0$ gelten, so dass der kleinste Eigenwert $= 0$ ist.



Der zugehörige Eigenvektor ist der Grundzustand $|0\rangle$, der folglich von a annihiliert wird:

$$N|0\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a|0\rangle = 0. \quad (5.15)$$

Aufbauend auf dem Grundzustand können nun alle weiteren Eigenzustände konstruiert werden,

$$|m\rangle \sim (a^\dagger)^m |0\rangle \quad \text{hat Eigenwert } m \in \mathbb{N}_0. \quad (5.16)$$

Nun habe $|m-1\rangle$ die Norm 1, $\langle m-1|m-1\rangle = 1$.

Sei $|m\rangle = \beta a^\dagger |m-1\rangle$ ebenfalls normiert, so folgt

$$\begin{aligned} 1 = \langle m|m\rangle &= \langle m-1| \underbrace{a^\dagger a}_{=N+1} |m-1\rangle |\beta|^2 = \langle m-1|N+1|m-1\rangle |\beta|^2 \\ &= m \underbrace{\langle m-1|m-1\rangle}_{=1} |\beta|^2. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Ist der Grundzustand $|0\rangle$ auf 1 normiert, sind die angeregten Zustände

$$|m\rangle = \frac{1}{\sqrt{m!}} a^{\dagger m} |0\rangle \quad (5.18)$$

$$\left(= \frac{1}{\sqrt{m}} a^\dagger |m-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{m(m-1)}} a^{\dagger 2} |m-2\rangle = \dots \right)$$

ebenfalls auf 1 normiert.

Da die Zustände aus dem Grundzustand erzeugt werden, kann das Spektrum nur entartet sein (d.h. zwei oder mehrere Eigenvektoren haben den gleichen Eigenwert),

wenn der Grundzustand entartet wäre. Das dies nicht der Fall ist, zeigen wir unten.

Damit haben wir das Eigenwertspektrum und die Eigenwerte von N vollständig gefunden.

Damit ist auch der Hamilton-Operator bereits diagonalisiert, denn

$$H |n\rangle = \hbar\omega(N + \frac{1}{2}) |n\rangle = E_n |n\rangle$$

(5.19)

mit $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$

Die Leiteroperatoren erhöhen bzw. erniedrigen die Energie um $\hbar\omega$. Das Spektrum ist äquidistant.

5.2 Ortsraumdarstellung des harmonischen Oszillators

Die Ortsraumdarstellung der Eigenfunktionen $|n\rangle$ ergibt sich direkt aus der Darstellung der Leiteroperatoren (5.5), die im Ortsraum lautet:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{x_0} + i \frac{x_0}{\hbar} p \right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x'}{x_0} + x_0 \frac{\partial}{\partial x'} \right) \quad (5.20)$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{x_0} - i \frac{x_0}{\hbar} p \right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x'}{x_0} - x_0 \frac{\partial}{\partial x'} \right)$$

mit $p \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$. Im Ortsraum lautet daher die Grundzustandsgleichung (5.15):

$$a|0\rangle = 0 \Rightarrow \langle x'|a|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x'}{x_0} + x_0 \frac{\partial}{\partial x'} \right) \underbrace{\langle x'|0\rangle}_{\equiv \Psi_{E_0}(x')} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x'}{x_0} + x_0 \frac{\partial}{\partial x'} \right) \Psi_{E_0}(x') = 0 \quad (5.21)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist eine Gauß-Funktion

$$\Psi_{E_0}(x') = \left(\frac{1}{\pi x_0^2} \right)^{1/4} e^{-\frac{x'^2}{2x_0^2}} \quad (5.22)$$

Den Vorfaktor haben wir hier bereits durch Normierung festgelegt, denn

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx' |\Psi_{E_0}(x')|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi x_0^2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{-\frac{x'^2}{x_0^2}}}_{= x_0 \sqrt{\pi}} = 1 \quad (5.23)$$

Da die Lösung eindeutig ist, ist damit auch der Grundzustand des harmonischen Oszillators eindeutig. Wir stellen fest, dass die Längenskala x_0 die Breite der Gauß-Kurve festlegt. D.h. x_0 ist ein Maß für die Lokalisierung des Teilchens im Grundzustand.

Mit Hilfe des Aufsteigeoperators lassen sich die Wellenfunktionen im Ortsraum der angeregten Zustände direkt erzeugen:

$$\Psi_{E_n}(x') = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n \Psi_{E_0}(x') = \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{1}{2^{n/2}} \left(\frac{x'}{x_0} - x_0 \frac{\partial}{\partial x'} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{\pi} x_0^2} \right) e^{-\frac{x'^2}{2x_0^2}} \quad (5.24)$$

Z.B. ist das erste angeregte Zustand

$$\Psi_{E_1}(x') = \frac{\sqrt{2}}{x_0} x' \cdot \Psi_{E_0}(x'). \quad (5.25)$$

Da die Gauß-Funktion genau der erzeugenden Funktion der Hermite-Polynome $H_n(x)$ entspricht, sind die höheren angeregten Zustände alle proportional zum Grundzustand multipliziert mit Hermite-Polynomen:

$$\Psi_{E_n}(x') = \left(\frac{1}{\pi x_0^2} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n \left(\frac{x'}{x_0} \right) e^{-\frac{x'^2}{2x_0^2}} \quad (5.26)$$

mit den Hermite-Polynomen

$$H_0(\xi) = 1$$

$$H_1(\xi) = 2\xi$$

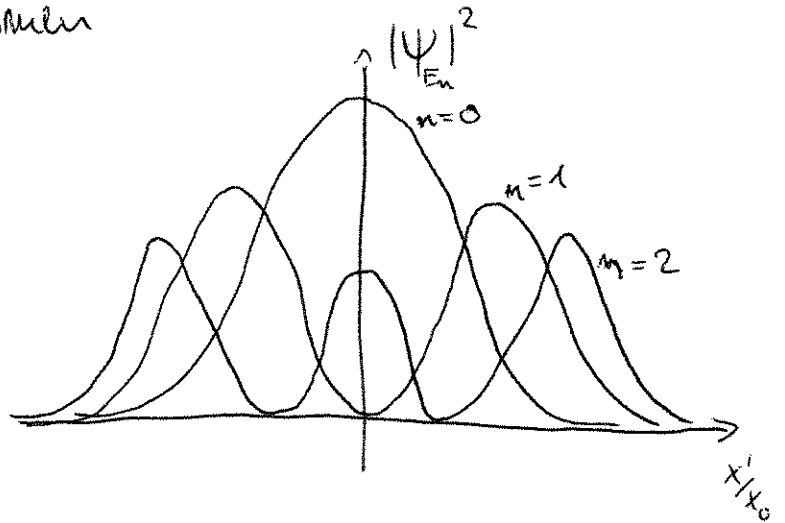
$$H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2$$

$$H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi$$

$$H_4(\xi) = 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12$$

$$H_5(\xi) = 32\xi^5 - 160\xi^3 + 120\xi$$

etc.



(5.27)

Nach Konstruktion bilden die $\Psi_{E_n}(x')$ ein vollständiges orthonormiertes Funktionensystem.

$$\begin{aligned} \delta_{nm} &= \langle n | m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \langle n | x' \rangle \langle x' | m \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi_{E_n}^*(x') \Psi_{E_m}(x') \end{aligned} \quad (5.28)$$

Die Lösung des harmonischen Oszillators lässt sich direkt auf höhere Dimensionen verall-

gemeinern. Betrachten wir z.B. den 3-dimensionalen harmonischen Oszillator, so zerfällt der Hamilton-Operator in eine Summe von drei

1D harmonischen Oszillatoren:

$$H_{3D} = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega^2 \vec{x}^2 = \sum_{i=1}^3 H(x_i, p_i) \quad (5.29)$$

$$\text{mit } H(x_i, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2} \omega^2 x^2.$$

Damit faktorisiert die Wellenfunktion:

$$\Psi_E^{3D}(\vec{x}') = \Psi_E(x'_1) \Psi_E(x'_2) \Psi_E(x'_3), \quad (5.30)$$

d.h. die Energieeigenfunktionen sind

$$\Psi_{E_{n_1 n_2 n_3}}(\vec{x}') = \Psi_{E_{n_1}}(x'_1) \Psi_{E_{n_2}}(x'_2) \Psi_{E_{n_3}}(x'_3) \quad (5.31)$$

mit Energieeigenwerten

$$E_{n_1 n_2 n_3} = \hbar \omega \sum_{i=1}^3 \left(n_i + \frac{1}{2} \right). \quad (5.32)$$

5.3 Orts- Impulsunsicherheit

Praktische Rechnungen können nun vollständig mit Hilfe der Leiteroperator - algebra durchgeführt werden. Dazu drücken wir Orts- und Impulsoperator durch die Leiteroperatoren aus:

$$X = \frac{x_0}{\sqrt{2}} (a^\dagger + a) \quad , \quad P = \frac{it\hbar}{\sqrt{2} x_0} (a^\dagger - a) . \quad (5.33)$$

Wir wissen bereits, wie a^\dagger auf normierte Energieeigenzustände wirkt:

$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad (5.34)$$

bzw. $a^\dagger |n-1\rangle = \sqrt{n} |n\rangle$

Multiplikation mit a liefert

$$\begin{aligned} \sqrt{n} a |n\rangle &= a a^\dagger |n-1\rangle = \left(\underbrace{a^\dagger a}_N + \underbrace{[a, a^\dagger]}_{=1} \right) |n-1\rangle \\ &= (N+1) |n-1\rangle = n |n-1\rangle , \end{aligned}$$

d.h. die Wirkung von a auf Energieeigenzustände ist

$$a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (5.35)$$

Da Ort und Impuls linear von a und a^\dagger abhängen, sind $\langle n|x|n\rangle$ und $\langle n|p|n\rangle$ Linearkombinationen von $\langle n-1|$ und $\langle n+1|$. Daraus folgt unmittelbar

$$\langle n|x|n\rangle = \langle n|p|n\rangle = 0, \quad (5.36)$$

d.h. im Wahrscheinlichkeitsmittel befindet sich ein QM Teilchen im harmonischen Oszillatorpotential im Ursprung und hat im Mittel verschwindenden Impuls.

Für hohe Energien gehen die stationären Zustände also nicht, wie vielleicht maniv erwartet, in klassische Oszillatorbewegungen über.

Als nächstes betrachten wir

$$x^2 = \frac{x_0^2}{2} (a^\dagger a^\dagger + a a + a^\dagger a + a a^\dagger) \quad (5.37)$$

$$p^2 = -\frac{\hbar^2}{2x_0^2} (a^\dagger a^\dagger + a a - a^\dagger a - a a^\dagger).$$

Wegen (5.34) und (5.35) können zum Erwartungswert bezüglich $|n\rangle$ nur die Terme mit gleich vielen a wie a^\dagger Leiteoperatoren beitragen:

$$\begin{aligned} \langle n|x^2|n\rangle &= \frac{x_0^2}{2} \left(\underbrace{\langle n|a^\dagger a|n\rangle}_{=N} + \underbrace{\langle n|a a^\dagger|n\rangle}_{=N+[a, a^\dagger]} \right) = \frac{x_0^2}{2} \langle n|2N+1|n\rangle \\ &= x_0^2 \left(n + \frac{1}{2} \right), \end{aligned} \quad (5.38)$$

$$\langle n | p^2 | n \rangle = \frac{\hbar^2}{2x_0^2} \quad \langle n | a^\dagger a + a a^\dagger | n \rangle = \frac{\hbar^2}{x_0^2} \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (5.39)$$

Wegen $\langle n | x | n \rangle = \langle n | p | n \rangle = 0$ entsprechen (5.38) und (5.39) gleichzeitig den mittleren Schwankungsquadraten. Damit erhalten wir die Unschärferelation

$$\begin{aligned} \langle (\Delta x)^2 \rangle \langle (\Delta p)^2 \rangle &= \langle n | x^2 | n \rangle \langle n | p^2 | n \rangle = \frac{\hbar^2}{x_0^2} \cdot x_0^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \\ &\geq \frac{\hbar^2}{4} \end{aligned} \quad (5.40)$$

Der Grundzustand $n=0$ erfüllt damit die Unschärferelation minimal, $\langle (\Delta x)^2 \rangle \langle (\Delta p)^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4}$. Da die " $\frac{1}{2}$ " in (5.38) und (5.39) den gleichen Ursprung hat wie die Grundzustandsenergie, sind die Unschärferelation und die Existenz der Grundzustandsenergie direkt miteinander verknüpft.

Mit zunehmendem n sind die Zustände aber zunehmend im Orts- als auch im Impulsraum delokalisiert.

(NB: viele Systeme der modernen Physik lassen sich auf ungekoppelte Systeme von harmonischen Oszillatoren abbilden, so z.B. Atomare Schwingungs-

bewegungen in Molekülen, in Kristallgittern, ebenso wie die quantisierten Anregungen des elektromagnetischen Strahlungsfeldes (beschrieben durch die quellenfreien Maxwell-Gleichungen). In all diesen Systemen erzeugt a^\dagger bzw. vernichtet a eine quantisierte Anregung. Der Besetzungsoperator N zählt dann die Zahl der Phononen (bzw. Photonen) im Kristall (bzw. im Strahlungsfeld). In diesen Systemen können also die höheren Anregungen als höhere Teilchenzahl interpretiert werden.

5.4 Kohärente Zustände

Auf der Suche nach Zuständen, die im klassischen Grenzfall tatsächlich Schwingungsbewegungen im mittleren Ort und Impuls ausführen, versuchen wir im Folgenden Energieeigenfunktionen geeignet zu überlagern. Wichtiges Kriterium dabei ist, dass die resultierenden Wellenpakete nicht zerfließen und die Unschärferelation auch nach langer Zeit noch möglichst minimal erfüllen. Wir wissen, dass letzteres für den

Grundzustand erfüllt ist, Letzteres bleibt gültig, auch wenn wir den Grundzustand verschieben:

$$\Psi_{\xi}(x) := \Psi_{E_0}(x' - x_d) \quad , \quad x_d = \sqrt{2} \xi x_0 \quad , \quad (5.41)$$

d.h. wir messen die Verschiebung um x_d in Einheiten der Längenskala x_0 mit der dimensionslosen Zahl ξ .

Die Verschiebung lässt sich mit dem Translationsoperator erzeugen; dazu fassen wir zunächst $\Psi_{\xi}(x')$ als Projektion eines Kets $|\xi\rangle$ in den Ortsraum auf,

$$\Psi_{\xi}(x') = \langle x' | \xi \rangle \quad . \quad (5.42)$$

Der Zusammenhang mit dem Grundzustand ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} |\xi\rangle &= T(x_d) |0\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} x_d P} |0\rangle \\ &= e^{\xi a^\dagger - \xi a} |0\rangle \end{aligned} \quad (5.43)$$

Wir verwenden nun die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel

$$e^A e^B = e^{A+B + \frac{1}{2}[A,B]} \quad \text{für } [A,B] \sim \mathbb{1} \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow e^{\xi a^\dagger - \xi a} &= e^{-\frac{1}{2} [a^\dagger, -a] \xi^2} e^{\xi a^\dagger} e^{-\xi a} \\ &= e^{-\frac{\xi^2}{2}} e^{\xi a^\dagger} e^{-\xi a}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Weil a den Grundzustand annihiliert, gilt

$$\begin{aligned} e^{-\xi a} |0\rangle &= \left(1 - \xi a + \frac{1}{2} \xi^2 a^2 + \dots \right) |0\rangle \\ &\quad \begin{array}{c} \hookrightarrow 0 \\ \quad \quad \quad \hookrightarrow 0 \end{array} \\ &= |0\rangle \end{aligned} \quad (5.46)$$

und wir erhalten

$$\underline{| \xi \rangle} = e^{-\frac{\xi^2}{2}} \underline{e^{\xi a^\dagger} |0\rangle} \quad (5.47)$$

Dieser Zustand ist Eigenzustand des Absteigeoperators. Um dies zu zeigen, verwenden wir (vgl. Üben 9)

$$\begin{aligned} e^{-\xi a^\dagger} a e^{\xi a^\dagger} &= a - \xi \underbrace{[a^\dagger, a]}_{=-1} + \frac{\xi^2}{2} [a^\dagger, [a^\dagger, a]] + \dots \\ &= a + \xi \end{aligned} \quad (5.48)$$

woraus folgt, dass

$$\begin{aligned}
 a|\xi\rangle &= a e^{-\frac{\xi^2}{2}} e^{\xi a^\dagger} |0\rangle \\
 &= e^{-\frac{\xi^2}{2}} e^{\xi a^\dagger} (a + \xi) |0\rangle = \xi |\xi\rangle.
 \end{aligned}
 \tag{5.49}$$

$\hookrightarrow 0$

$|\xi\rangle$ ist also Eigenketten von a mit Eigenwert ξ .

Im übrigen ist es nützlich, auch komplexe Verschiebungen $\xi \in \mathbb{C}$ zu zulassen. Berücksichtigt man dies, so ergibt sich

$$|\xi\rangle = e^{-\frac{|\xi|^2}{2}} e^{\xi a^\dagger} |0\rangle. \tag{5.50}$$

Entwickeln wir die Exponentialfunktion,

$$\begin{aligned}
 |\xi\rangle &= e^{-\frac{|\xi|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \xi^n \underbrace{(a^\dagger)^n |0\rangle}_{= \sqrt{n!} |n\rangle} \\
 &= e^{-\frac{|\xi|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \xi^n |n\rangle,
 \end{aligned}
 \tag{5.51}$$

so sehen wir, dass diese Zustände eine Überlagerung unendlich vieler Energie-Eigenzustände

sind. Da wir die Zeitentwicklung der Energieeigenzustände kennen, ergibt sich direkt die Zeitentwicklung (mit $|\xi, t=0\rangle \equiv |\xi\rangle$):

$$\begin{aligned}
 \underline{|\xi, t\rangle} &= e^{-\frac{|\xi|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} |n\rangle \\
 &= e^{-\frac{i\omega t}{2}} \left(e^{-\frac{|\xi|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \right) \\
 &= e^{-\frac{i\omega t}{2}} \underline{|\xi(t)\rangle} \quad \text{mit } \xi(t) = e^{-i\omega t} \xi. \quad (5.52)
 \end{aligned}$$

Diese wichtige Beobachtung besagt, dass ein anfänglicher Zustand $|\xi\rangle$ zu allen Zeiten ein solcher Zustand mit oszillierendem Eigenwert $\xi(t) = e^{-i\omega t} \xi$ bleibt. Diese Eigenschaft definiert einen kohärenten Zustand.

Im Ortsraum finden wir damit direkt die zugehörige Wellenfunktion und Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$\Psi_{\xi}(x', t) = \langle x' | \xi(t) \rangle = e^{-\frac{i\omega t}{2}} \Psi_{E_0}(x' - e^{-i\omega t} x_d) \quad (5.53)$$

$$|\Psi_{\xi}(x,t)|^2 = |\Psi_{E_0}(x' - x_d(t))|^2, \quad x_d(t) = x_d \cos(\omega t) \quad (5.54)$$

Im Ortsraum entspricht die Wahrscheinlichkeitsdichte des kohärenten Zustands also einer harmonischen Schwingung des Grundzustandswellenfunktion um den Ursprung.

Zur Berechnung von Erwartungswerten und Unschärfen bezüglich eines kohärenten Zustands ist die Eigenwertgleichung $a|\xi\rangle = \xi|\xi\rangle$ wieder sehr nützlich:

$$\begin{aligned} \langle x \rangle_{\xi} &\equiv \langle \xi | x | \xi \rangle = \frac{x_0}{\sqrt{2}} \langle \xi | a^\dagger + a | \xi \rangle = \frac{x_0}{\sqrt{2}} (\xi^* + \xi) \\ &= \sqrt{2} x_0 \operatorname{Re} \xi, \end{aligned} \quad (5.55)$$

wobei wir $\langle \xi | \xi \rangle = 1$ benutzt haben. Für den mittleren Impuls gilt

$$\langle p \rangle_{\xi} = \frac{i\hbar}{\sqrt{2} x_0} \langle \xi | a^\dagger - a | \xi \rangle = \sqrt{2} \frac{\hbar}{x_0} \operatorname{Im} \xi. \quad (5.56)$$

Für zeitabhängige $\xi(t)$ gilt folglich

$$\begin{aligned} \langle x \rangle_{\xi(t)} &= x_d \cos \omega t \quad \text{und} \quad \langle p \rangle_{\xi(t)} = -m\omega x_d \sin \omega t \\ &= m \dot{\langle x \rangle_{\xi(t)}}. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Die Orts- und Impuls erwartungswerte verhalten sich also genauso wie die Koordinaten und Impulse eines klassischen harmonischen Oszillators.

Analog findet man

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle_{\xi} &= \frac{x_0^2}{2} \langle a^{\dagger 2} + 2a^{\dagger}a + a^2 + 1 \rangle_{\xi} = \frac{x_0^2}{2} + \langle x \rangle_{\xi}^2 \\ \langle p^2 \rangle_{\xi} &= -\frac{\hbar^2}{2x_0^2} \langle a^{\dagger 2} - 2a^{\dagger}a + a^2 - 1 \rangle_{\xi} = \frac{\hbar^2}{2x_0^2} + \langle p \rangle_{\xi}^2 \end{aligned} \quad (5.58)$$

und gleichermaßen für $\xi \rightarrow \xi(t)$, so dass wir für die Varianzen

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \frac{x_0^2}{2}, \quad \langle (\Delta p)^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{2x_0^2}$$

erhalten. Es folgt die Unschärferelation

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle \langle (\Delta p)^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4}, \quad (5.59)$$

d.h. die kohärenten Zustände erfüllen die
Unschärferelation minimal. Kohärente Zustände
sind also nicht-zfließende minimal unsharp
oszillierende Wellenpakete und damit das
quantenmechanische Analogon zum klassischen
harmonischen Oszillator.