

Eichtheorien

Holger Gies

Vorlesungsmotiven

TP1

FSU Jena

0. Physikalische Wurzeln von Eichtheorien

- die Klassifizierung von Baryon-Resonanzen und des Mesonspektrum lieferte einen starken Hinweis auf die Existenz von Quarks als zugrundeliegende Bausteine der Hadronen:

Quantenzahlen: Spin $\frac{1}{2}$

Flavor	u	c	t	$+\frac{2}{3}e$ Ladung
	d	s	b	$-\frac{1}{3}e$

die Entdeckung der Spin $\frac{3}{2}$ - Resonanzen

$$|\Delta^{++}\rangle = |u\uparrow\rangle |u\uparrow\rangle |u\uparrow\rangle$$

$$|\Omega^{-}\rangle = |s\uparrow\rangle |s\uparrow\rangle |s\uparrow\rangle$$

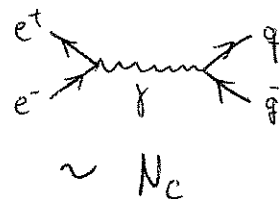
$$|\Delta^{-}\rangle = |d\uparrow\rangle |d\uparrow\rangle |d\uparrow\rangle$$

schien im Widerspruch mit dem Pauli-Prinzip, da die Antisymmetrisierung der RHS = 0 liefert.

$\Rightarrow$ es muß eine weitere Quantenzahl geben, bezüglich der die Wellenfunktion antisymmetrisiert werden kann $\Rightarrow$ "Farbe"

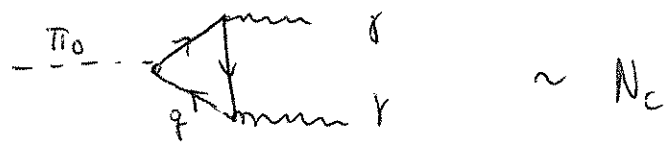
- Verzweigungsverhältnis

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \bar{q}q)}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-)}$$



ist proportional zur Dimension der Darstellung dieser Quantenzahl, also "Zahl der Farben"

— ähnlich : $\pi_0 \rightarrow \gamma + \gamma$



Experiment : $N_c = 3$

$\Rightarrow$ Quark Wellenfunktion $\psi_f^i(x)$, $f = u, d, s, c, b, t$
 $i = 1, 2, 3$

1 Grundlagen für Eichtheorien

Obige Befunde legen nahe, daß zumindest eine globale Symmetrie existieren sollte, bezüglich der Farbtransformationen des Quarks durchgeführt werden können

$$\psi'^i = U^{ji} \psi^j$$

Entscheidend für die Dynamik ist die weitreichende Annahme, dass die Farbtransformationen einer lokalen Symmetriegruppe entsprechen:

$$\psi'^i(x) = U^{ji}(x) \psi^j(x) \quad (1.1)$$

mit $U(x) \in SU(N_c)$

Die lokale Eigenschaft der Symmetrie läßt sich aus obigen kinematischen Überlegungen nicht ablesen. Sie kann nur durch den Vergleich der Dynamik in Theorie und Experiment verifiziert werden

1.1 Elemente der Theorie der Lie-Gruppen und Lie-Algebren

Wir betrachten $N_c \times N_c$ Matrizen U mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} U^\dagger U &= 1 \\ \det U &= 1 \end{aligned} \quad (1.2)$$

also eine Darstellung der $SU(N_c)$.

Die Exponentialabbildung

$$U = e^{iH} \quad (1.3)$$

parametrisiert U mit Hilfe einer hermiteschen

$$\begin{aligned} \text{Matrix } (N_c \times N_c) \quad H = H^\dagger, \text{ so daß } U^\dagger U &= (e^{iH})^\dagger (e^{iH}) = e^{-iH^\dagger} e^{iH} \\ &= e^{-iH} e^{iH} = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \# \text{ reeller Parameter von } U: \quad N_c^2 - 1 \quad (1.4)$$

$\uparrow$
 $\det U = 1$

$\Rightarrow$ Die Gruppe kann durch $N_c^2 - 1$ linear unabhängige $N_c \times N_c$ hermitesche Matrizen erzeugt werden:

$$U = e^{-i\omega^a \tau^a} \quad (1.5)$$

τ^a_{ij} : Generatoren der $SU(N_c)$

$$ij = 1 \dots N_c$$

$$a = 1 \dots N_c^2 - 1$$

Wegen $1 = \det U = \det e^{-i\omega^a \tau^a} = e^{-i\omega^a \text{tr} \tau^a}$

können die τ^a_{ij} spurfrei gewählt werden, $\text{tr} \tau^a = 0$

Für den Kommutator $[\tau^a, \tau^b]$ gilt:

Spurfrei $\text{tr} [\tau^a, \tau^b] = \text{tr} (\tau^a \tau^b - \tau^b \tau^a) \stackrel{\text{cycl.}}{=} 0 \quad (1.6)$

anti-hermitisch $[\tau^a, \tau^b]^\dagger = [\tau^{b\dagger}, \tau^{a\dagger}] = [\tau^b, \tau^a] = -[\tau^a, \tau^b]$

d.h. $[\tau^a, \tau^b] = i h$ mit h hermitisch.

Da h wieder durch τ^a aufgespannt werden kann, muß gelten:

$$[\tau^a, \tau^b] = i f^{abc} \tau^c \quad (1.7)$$

mit den Entwicklungskoeff. $\equiv$ Strukturkonstanten f^{abc} .

Eq. (1.7) definiert die $su(N_c)$ Lie-Algebra

Übliche Normierung der τ^a :

$$\text{tr } \tau^a \tau^b = \frac{1}{2} \delta^{ab} \quad (1.7)$$

Beispiel:

$$N_c = 2: \quad \tau^a = \frac{1}{2} \sigma^a \quad (\text{Pauli Matrizen})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow [\tau^a, \tau^b] &= \frac{1}{4} [\sigma^a, \sigma^b] = \frac{1}{4} \cdot 2i \epsilon^{abc} \sigma^c \\ &= i \epsilon^{abc} \tau^c \end{aligned} \quad (1.8)$$

mit ϵ^{abc} , dem total antisym. Tensor.

$$N_c = 3: \quad N_c^2 - 1 = 8$$

$$\tau^a = \frac{1}{2} \lambda^a$$

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{Gell-Mann Matrizen} \quad (1.9)$$

(Konstruktion direkt verallgemeinerbar auf $N_c > 3$)

$$f^{abc}: \quad \begin{array}{cccccccccc} & 123 & 147 & 156 & 246 & 257 & 345 & 367 & 458 & 678 \\ & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 & \sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 \end{array}$$

$$(1.10)$$

Diese Darstellungen der $\mathfrak{su}(N_c)$ sind per construction irreduzibel : fundamentale Darstellung.

Aus der Jacobi - Identität für den Kommutator

$$[[T^a, T^b], T^c] + [[T^b, T^c], T^a] + [[T^c, T^a], T^b] = 0 \quad (1.11)$$

folgt

$$f^{abd} f^{dce} + f^{bcd} f^{dae} + f^{cad} f^{dbe} = 0$$

$$\Rightarrow (-if^{bad})(if^{edc}) - \underbrace{(-if^{bcd})(-if^{eda})}_{(-if^{ead})(-if^{bdc})} = +i(f^{bed})(if^{dac})$$

$$\Rightarrow [(-if^b) \cdot, (-if^e)]^{ac} = if^{bed}(-if^d)^{ac} \quad (1.12)$$

Es folgt, daß $(T^a)^{bc} = -if^{abc}$ ebenfalls

eine Darstellung der $\mathfrak{su}(N_c)$ Lie - Algebra ist,

und eine entsprechende Darstellung der $SU(N_c)$

Gruppe erzeugt. Die Darstellung ist $a=1, \dots, N_c^2-1$

dimensional und heißt adjungierte Darstellung.

(NB: weitere Gruppen - Theorie - Elemente folgen im Laufe der Vorlesung)

1.2 Eichinvariante Wirkungen

Ein kinetischer Term für die Quarks der Form $\bar{\Psi}_{(x)}^i i \not{D} \Psi_{(x)}^i$ ist nicht eichinvariant, da $(\not{D} = \gamma^\mu \partial_\mu)$

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{(x)}^i i \not{D} \Psi_{(x)}^i &= \bar{\Psi}_{(x)}^j U_{(x)}^{+ji} i \not{D} U_{(x)}^{ik} \Psi_{(x)}^k \\ &= \bar{\Psi}_{(x)}^j i \not{D} \Psi_{(x)}^j + \bar{\Psi}_{(x)}^j U_{(x)}^{+ji} (i \not{D} U_{(x)}^{ik}) \Psi_{(x)}^k \end{aligned}$$

Der Zusatzterm kann kompensiert werden durch
Hinzunahme eines Eichpotentials
matrix-wertigen (1.13)

$$A_\mu^{ij}(x) = A_\mu^a \tau^a_{ij} \quad (1.14)$$

mit einem Transformationsverhalten

$$A_\mu' = U A_\mu U^\dagger - \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^\dagger, \quad (1.15)$$

und einer Kopplung g .

Der Term $\bar{\Psi} i g A \Psi$ transformiert sich daher wie

$$\begin{aligned} i \bar{\Psi}' i g A' \Psi' &= i \bar{\Psi} U^\dagger (i g U A_\mu U^\dagger + (\partial_\mu U) U^\dagger) U \Psi \\ &= i \bar{\Psi} i g A \Psi + \underbrace{\bar{\Psi} U^\dagger (i \not{D} U) \Psi}_{\text{vgl. (1.13)}} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Ein eichinvarianter kinetischer Term mit
kovarianter Ableitung

$$\mathcal{D}_\mu := \partial_\mu - ig A_\mu \quad (1.17)$$

ist daher von der Form

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = \bar{\psi} i \mathcal{D}_\mu \psi \quad (1.18)$$

Die kovariante Ableitung transformiert also
homogen:

$$\mathcal{D}_\mu' = U \mathcal{D}_\mu U^\dagger \quad (1.19)$$

Die lokale Symmetrie erzwingt also ein
Eichfeld mit adjungiertem Index, i.e., mit $N_c^2 - 1$
Komponenten

$$A_\mu^a(x), \quad a=1 \dots N_c^2 - 1 \quad \text{"Gluonen"}$$

Analog zur Elektrodynamik läßt sich eine
Gluon Feldstärke $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a \tau^a$ aus dem

Kommutator zweier kovarianter Ableitungen
konstruieren

$$[D_\mu, D_\nu] = -ig F_{\mu\nu}$$

$$\stackrel{(\text{ÜA})}{\Rightarrow} F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (1.20)$$

Damit läßt sich ein kinetischer Term für die Gluonen bilden, weil $F'_{\mu\nu} = U F_{\mu\nu} U^\dagger$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{gluon}} &= - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \\ &= - \frac{1}{2} \text{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= - \frac{1}{2} \text{tr} U^\dagger U F_{\mu\nu} U^\dagger U F^{\mu\nu} \\ &\stackrel{\text{cyc.}}{=} - \frac{1}{2} \text{tr} (U F_{\mu\nu} U^\dagger) (U F^{\mu\nu} U^\dagger) \equiv \underline{\underline{- \frac{1}{2} \text{tr} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu}}} \quad (1.21) \end{aligned}$$

Mit den Bausteinen $\psi, \bar{\psi}, D_\mu, F_{\mu\nu}$ lassen sich natürlich noch beliebig viele weitere eichinvariante Wirkungen konstruieren. Die obigen stellen in gewisser Hinsicht eine minimale (nichttriviale) Kombination dar.

Unter Hinzunahme eines Massenterms für die Quarks mit Masse (bzw. Massenmatrix) m , ergibt sich die Wirkung der klassischen Chromodynamik

$$S_{QCD} = \int d^4x \mathcal{L}_{QCD}.$$

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \bar{\psi} i \not{D} \psi - m \bar{\psi} \psi. \quad (1.22)$$

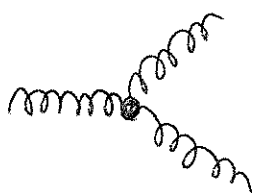
Bereits der erste Term beschreibt alleine schon eine wechselwirkende Theorie,

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a}, \quad (1.23)$$

Yang-Mills -Theorie, bzw. Quedynamik.

Die quadratischen Terme in der Feldstärke (1.20) führen zu Wechselwirkungstermen

$$\mathcal{L}_{int} \sim \dots g (\partial_\mu A_\nu) A^\mu A^\nu + \dots g^2 (A_\mu A_\nu)^2.$$



NB: Warum $SU(N_c)$ und nicht $U(N_c)$ Eichtheorie?

Läßt man die Forderung $\det U = 1$ fallen, kann U einen weiteren Phasenfreiheitsgrad haben, der von dem Generator

$$(\tau^0)_{ij} = \frac{1}{2N_c} \mathbb{I}_{ij}$$

erzeugt wird. Wegen $[\tau^0, \tau^a] = 0$, gilt $f^{0ab} = 0$ und daher

$$\begin{aligned} \text{tr } F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \sum_{a=0}^{N_c^2-1} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{N_c^2-1} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^0 F^{0\mu\nu} \end{aligned}$$

$$\text{mit } F_{\mu\nu}^0 = \partial_\mu A_\nu^0 - \partial_\nu A_\mu^0.$$

Das zugehörige neue Gluon A^0 ist also nicht selbst-wechselwirkend und daher ähnlich einem Photon. Bei (perturbativer) Quantisierung zerlegt sich also eine $U(N_c)$ Eichtheorie in eine $SU(N_c)$ Eichtheorie und eine abelsche $U(1)$ Eichtheorie (vgl. gruppentheoretische lokale Isomorphie $U(N_c) \cong U(1) \times SU(N_c)$.)

1.3 Klassische YM Theorie vs. Experiment

Klassische Bewegungsgleichung, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_r^a} = \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_r^a)}$

$$\boxed{\text{DA}} \quad D_r^{ab} F^{brv} \equiv (\partial_r \delta^{ab} + g f^{acb} A_r^c) F^{brv} = j^{av} \quad (1.24)$$

wobei $j^{av} = \bar{\psi} g \gamma^\nu T^a \psi$ abgeleitet aus $\mathcal{L}_{\text{QCD}}$

oder ein allgemeinerer Quellterm $\mathcal{L}_{\text{source}} = - j^{av} A_v^a$

sein kann.

In (1.21) haben wir die kovariante Ableitung in adjungierter Darstellung eingeführt:

$$D_r^{ab} = \partial_r \delta^{ab} + g f^{acb} A_r^c = (\partial_r - i g T^c A_r^c)^{ab}, \quad (1.25)$$

$$(T^c)^{ab} = -i f^{cab}, \text{ vgl. (1.12).}$$

Betrachten wir als Beispiel ein statisches
Quark - Antiquark - Paar

$$j^a = Q \cdot n^a \left(\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_1) - \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}_2) \right) \quad (1.26)$$

$\uparrow$ Ladung $\uparrow$ Einheitsvektor im adj Farbraum $\uparrow$ $q, \bar{q}$ Position im Ortsraum $n^2 = 1$

Die Bewegungsgleichung wird gelöst durch
ein pseudo-abelsches Feld,

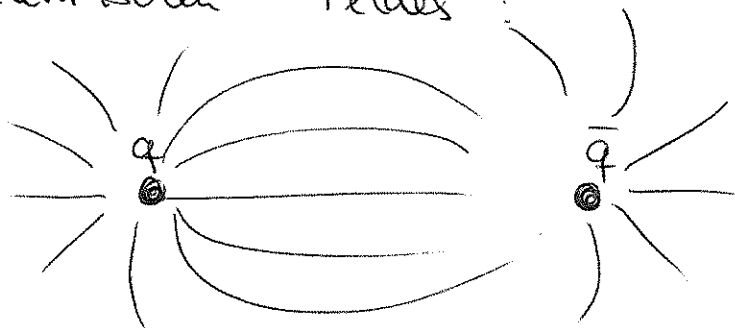
$$A_\mu^a = n^a a_\mu, \quad F_{\mu\nu}^a = n^a f_{\mu\nu}, \quad (1.27)$$

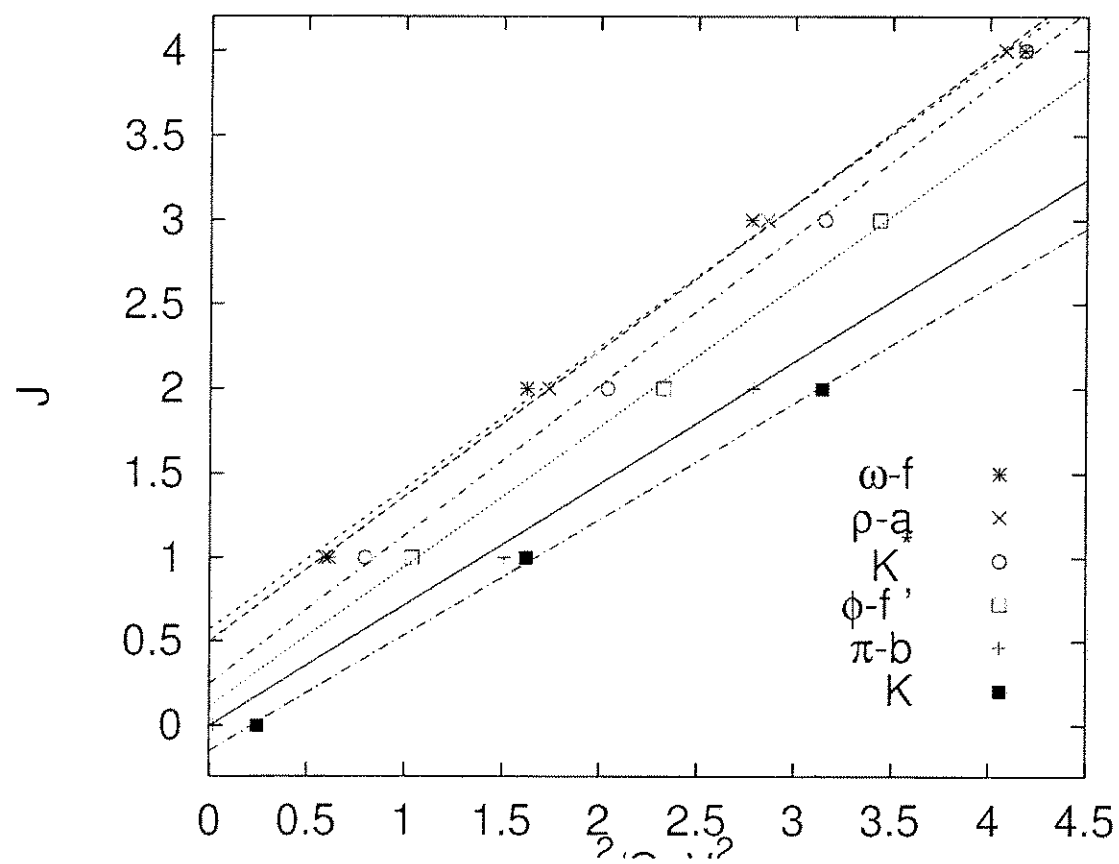
denn mit $f^{abc} n^b n^c = 0$ folgt

$$\underline{\underline{\partial_\mu f^{\mu\nu} = j^{\nu a} n^a}}, \quad (1.28)$$

vgl. Elektrostatik.

Die Lösung ist offensichtlich eine Feldverteilung
mit Dipolstruktur in der n^a -Komponente des
chromoelektrischen Feldes:





$\Rightarrow$ statisches Potential $\hat{=}$ Coulomb-Potential

$$V(r) \sim \frac{1}{r}$$

Dies ist im Widerspruch zum Experiment.

Betrachtet man z.B. mesonische Anregungen

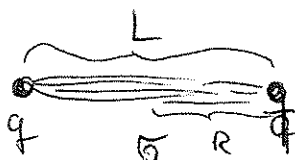
mit höherem Spin J in Abh. von ihrem

Massenquadrat m^2 , so liegen diese

auf einer Geraden, $J \sim m^2$, "Regge Trajektorie".

Dieser Umstand kann durch folgende Annahmen beschrieben werden: (Stringmodell)

- ein Meson ist ein linearartiges Objekt mit konstanter Energie pro Länge σ



- bei höheren Spinanregungen rotieren die Quark-Enden mit nahezu Lichtgeschwindigkeit

Die Energie des Systems ist also

$$\begin{aligned}
 m \equiv E &= 2 \int_0^R \frac{\sigma \, dr}{\sqrt{1 - v^2(r)}} = 2 \int_0^R \frac{\sigma \, dr}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}} \\
 &= \pi \sigma R . \quad (1.29)
 \end{aligned}$$

Drehimpuls:

$$\begin{aligned}
 J &= 2 \int_0^R \frac{\sigma \, \pi v(r) \, dr}{\sqrt{1 - v^2(r)}} = \frac{2}{R} \int_0^R \frac{\sigma \, r^2 \, dr}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}} \\
 &= \frac{1}{2} \pi \sigma R^2
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{J = \frac{m^2}{2\pi\sigma}}} \quad (1.30)$$

Dieses Modell zeigt einen linearen Zusammenhang wie im Experiment gefunden.

Experimentell findet man für die

Steigung der Regge - Trajektorien

$$\alpha' = \frac{1}{2\pi\sigma} \approx 0.9 \text{ GeV}^{-2}$$

$\Rightarrow$ String tension

$$\begin{aligned} \sigma &\approx 0.18 \text{ GeV}^2 \approx 0.9 \text{ GeV/fm} \\ &\approx (430 \text{ MeV})^2 \end{aligned}$$

Das der linienartigen Feldverteilung zugehörige Potential ist also linear in r

$$V(r) \sim r, \text{ vgl. (1.29) (1.31)}$$

Der linienartige Einschluß des Farbfeldes und der Quarks nennt man "Confinement".

$\Rightarrow$ klassische Chromodynamik ist also nicht ausreichend zur Beschreibung dieses Potentials.

$\Rightarrow$ Quanteneffekte verändern QCD Vakuumstruktur qualitativ (nicht nur quantitativ!)