Eichtheorien

A. Wipf
Theoretisch-Physikalisches Institut
Friedrich-Schiller-Universität
Max Wien Platz 1

07743 Jena

Heraeus-Ferienkurs
– *Symmetrie und Symmetriebrechung*–

Halle, September 2000

Vorspann

fundamentale Wechselwirkungen: *Eichtheorien*

Elektromag. WW:	Maxwellsche Theorie
elektroschw. WW:	Weinberg-Salam-Model
starke WW:	Quantenchromodynamik
Gravitation:	Einsteinsche Theorie

Minkowski RZ: Ereignis $(ct, \vec{x}) = (x^\mu) = x$

Poincare Transformationen:

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu} x^\nu + a^\mu, \quad dx'^\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu} dx^\nu$$
$$\eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \Longrightarrow$$
$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta, \quad (\eta_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$$

4-Gradient

$$\partial_\mu = (\frac{1}{c}\partial_t, \nabla) \Rightarrow \partial'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu_{\ \mu} \partial_\nu = \Lambda_\mu^{\ \nu} \partial_\nu$$

- dx^μ kontravariant
- ∂_μ kovariant
- $A_\mu B^\mu = \eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu$ Lorentzinvariant.

Symmetrien und Erhaltungssätze

Lagrangeformalismus

L-Funktion: $L = \int d^3x\, \mathcal{L}, \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$

Variationsprinzip (S Lorentzinvariant, reell)

$$\delta S = 0, \quad S = \int dt\, L = \int d^4x\, \mathcal{L}.$$

Bewegungsgleichungen

$$\boxed{\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0}$$

Beispiele für Lagrange-Dichten

- Klein-Gordon Feld $\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi$

$$\Longrightarrow (\Box + m^2)\phi = 0$$

- Dirac-Feld $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi, \quad \bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$

$$\Longrightarrow (i\partial\!\!\!/ - m)\psi = 0$$

Symmetrien

Lösungen $\to$ Lösungen, S invariant

- Poincare-Invarianz:

$$\begin{aligned} \phi'(x') &= \phi(x), \quad \psi'(x') = S\psi(x) \\ x' &= x + a \Longrightarrow \delta\phi = a^\mu \partial_\mu \phi \end{aligned}$$

- Globale $U(1)$-Eichinvarianaz:

$$\begin{gathered} \phi'(x) = g\phi(x), \quad \psi'(x) = g\psi(x) \\ g = e^{i\lambda} \sim 1 + i\lambda \Longrightarrow \delta\phi = i\lambda\phi \end{gathered}$$

Erhaltene Noetherströme

Bewegungsgleichungen $\Rightarrow$

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\, \partial_\mu(\delta\phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi = \partial_\mu(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\delta\phi)$$

Innere Symmetrien: $\delta\mathcal{L} = 0 \Rightarrow$

$$J^\mu = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \phi)}\delta\phi, \qquad \partial_\mu J^\mu = 0.$$

Erhaltene Noetherladungen:

$$\dot{Q} = 0, \quad Q = \int d^3x\; J^0 = \int d^3x\, \pi\, \delta\phi(x)$$

Skalar $\quad J_\mu = i(\partial_\mu\phi^\dagger\phi - \phi^\dagger\partial_\mu\phi), \quad Q = i(\dot\phi^\dagger\phi - \phi^\dagger\dot\phi)$

Dirac $\quad J_\mu = \bar\psi\gamma_\mu\psi, \quad Q = \psi^\dagger\psi$

kanonisch konjugierte Impulsdichte

$$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\phi} \quad , \quad \{\phi(x), \pi(y)\}_{x^0=y^0} = \delta(\vec{x} - \vec{y}) \Rightarrow$$

$$\{\phi(x), Q\} \;=\; \int d^3y\{\phi(x), \pi(y)\delta\phi(y)\} = \delta\phi(x),$$

$\boxed{Q \text{ erzeugt (}t\text{-unabh.) Eichtransformationen}}$

Translationen: S invariant, $\mathcal{L}$ nicht invariant:

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\nu\mathcal{L} = \partial_\mu(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)}\partial_\nu\phi) \Rightarrow \partial_\mu J^\mu = 0$$

Noetherstrom = Energie-Impuls Tensor

$$J^\mu_\nu = T^\mu_\nu, \qquad T_{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)}\partial_\nu\phi - \eta_{\mu\nu}\mathcal{L}.$$

Noetherladung = Energie-Impuls

$$P^\mu = \int d^3x\, T^{0\mu}, \quad P^0 \equiv H = \int d^3x\,(\pi\dot\phi - \mathcal{L})$$

Potentiale und minimale Kopplung

Eichpotentiale:

homogene Maxwellgleichungen

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad , \quad \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad , \qquad \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \varphi.$$

Eichtranformationen mit $\lambda = \lambda(t, \vec{x})$

$$\vec{A}' = \vec{A} - \nabla\lambda, \; \varphi' = \varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial \lambda}{\partial t}, \quad (\vec{E}, \vec{B}) \to (\vec{E}, \vec{B})$$

$(\varphi, \vec{A}) \sim (\varphi', \vec{A}')$ eichäquivalente Potentiale

rel. Formulierung: 4-Vektorpotential

$$\begin{aligned} (A^\mu) &= (A^0, A^1, A^2, A^3) = (\varphi, \vec{A}) \\ (A_\mu) &= (A_0, A_1, A_2, A_3) = (\varphi, -\vec{A}). \end{aligned}$$

Eichtransformationen:

$$\boxed{A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \lambda}$$

Lorenzeichung

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \Longrightarrow \Box A^\mu = J^\mu, \quad (J^\mu) = (\,\rho, \vec{j}\,)\,.$$

$\rightarrow$ Lienard-Wiechert, ...

Kovariante Ableitung ($\hbar = c = 1$)

- Mechanik:

$$E \longrightarrow E - e\varphi, \qquad \vec{p} \longrightarrow \vec{\pi} = \vec{p} - e\vec{A}$$
$$H = \frac{1}{2m}\vec{p}^{\,2} \longrightarrow H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - e\vec{A}\,)^2 + e\varphi$$

$\rightarrow$ Lorentz'schen Bewegungsgleichungen für geladene Punktteilchen

- Quantenmechanik: *Korrespondenzregeln*

$$E \longrightarrow i\partial_t \quad \text{und} \quad \vec{p} \longrightarrow \frac{1}{i}\nabla$$

$\rightarrow$ Schrödinger-, Klein-Gordon- und Diracgleichung in äusseren elm. Feldern.

- Ersetzung- und Korrespondenz ($p^\mu = (E, \vec{p}\,)$)

$$p_\mu \longrightarrow p_\mu - eA_\mu \longrightarrow i(\partial_\mu + ieA_\mu) \equiv iD_\mu.$$

$$\boxed{D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu\text{: \textit{kovariante Ableitung}}}$$

transformiert *kovariant*:

$$\begin{aligned} D_\mu(A') &= \partial_\mu + ieA'_\mu = \partial_\mu + ie(A_\mu - \partial_\mu\lambda) \\ &= e^{ie\lambda}(\partial_\mu + ieA_\mu)e^{-ie\lambda} \end{aligned}$$

$$\boxed{D_\mu(A') = gD_\mu(A)g^{-1}, \;\; g(x) = e^{ie\lambda(x)} \in U(1)}$$

Kommutator

$$[D_\mu, D_\nu] = ie(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \equiv ieF_{\mu\nu}, \tag{1}$$

Antisymmetrische Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \quad F_{\mu\nu}$ eichinvariant:

$$\begin{aligned} ieF_{\mu\nu}(A') &= [D_\mu(A'), D_\nu(A')] \\ &= [gD_\mu(A)g^{-1}, gD_\nu(A)g^{-1}] \\ &= iegF_{\mu\nu}(A)g^{-1} = ieF_{\mu\nu}(A) \end{aligned}$$

$D_\mu\phi$ transformiert genauso wie ϕ!

$$\begin{aligned} A'_\mu &= A_\mu - \partial_\mu\lambda, \quad \phi' = g\phi \Longrightarrow \\ (D_\mu(A)\phi)' &\equiv D_\mu(A')\phi' = g\,D_\mu(A)\phi, \qquad . \end{aligned}$$

Ist $\mathcal{L}(\phi,\partial\phi)$ invariant unter globalen Eichtransformationen, $\phi \to g\phi$, dann ist $\mathcal{L}(\phi, D\phi)$ invariant unter lokalen Eichtransformationen
$\phi(x) \to g(x)\phi(x),\; A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \partial_\mu\lambda(x).$

- *Prinzip der minimalen Kopplung*

$$\boxed{\partial_\mu \longrightarrow D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu}$$

Beispiele eichinvariante für Lagrange-Dichten

- Klein-Gordon Feld $\mathcal{L}_\phi = (D_\mu\phi)^\dagger D^\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi$

$$\Longrightarrow (D^\mu D_\mu + m^2)\phi = 0$$

- Dirac-Feld $\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi$

$$\Longrightarrow (i\not{D} - m)\psi = 0, \quad \not{D} = \gamma^\mu D_\mu$$

Übung: (ϕ, A_μ) bzw. (ψ, A_μ) Lösungen der Klein-Gordon bzw. Diracgleichung. Zeige, daß

$$(\phi', A'_\mu) \quad \text{bzw.} \quad (\psi', A'_\mu), \quad \psi' = g\psi$$

$(g(x) = \exp(ie\lambda(x))$ ebenfalls Lösungen.

Experimente auf der Erde sollen nicht durch Phasenänderungen hinter dem Mond beeinflußt werden $\rightarrow$ Theorie soll invariant unter raumzeitabhängigen Phasentransformationen mit $g(x)$ sein.

Forderung der *lokalen Eichinvarianz* $\rightarrow$ Eichpotential (Zusammenhang, Konnektion)

Spin $0, \frac{1}{2}$: Eichprinzip $\rightarrow$ eindeutige elm. WW.

Noetherstrom:

λ konstant: $\delta\phi = i\lambda\phi$, $\delta A = 0 \Rightarrow \delta\mathcal{L}_M = 0$

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \qquad J^\mu = ie\{\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial(D_\mu\phi)}\phi - h.c.\}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M(\phi, \partial\phi) &\rightarrow \mathcal{L}_M(\phi, D\phi) \\ J^\mu(\phi, \partial\phi) &\rightarrow J^\mu(\phi, D\phi) \end{aligned}$$

J^μ eichinvariant, erhalten

Übung 1: Zeige, daß

$$\boxed{J^\mu = -\frac{\delta S_M}{\delta A_\mu} = -\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\delta A_\mu}}$$

- Durch explizite Rechnung für ein geladenes Skalarfeld, für welches

$$J^\mu = -ie\{(D_\mu\phi)^\dagger\phi - \phi^\dagger D_\mu\phi\}.$$

- Durch Ausnutzung von

$$\mathcal{L}_M(e^{i\lambda}\phi, A_\mu - i\partial_\mu\lambda) = \mathcal{L}_M(\phi, A_\mu)$$

Übung 2: Zeige, daß für ein Diracfeld

$$J^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

Variationsprinzip

$\delta S = 0 \Rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$, gesucht $S = \int d^4x\, \mathcal{L}$,

S lorentzinvariant, eichinvariant, $O(A^2)$.

$\delta F_{\mu\nu} = \delta(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = \partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} \delta \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} &= 2 \int d^4x (\delta F_{\mu\nu}) F^{\mu\nu} \\ &= -4 \int d^4x \, \delta A_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

$$S_{ED} = -\tfrac{1}{4} \int d^4x \, F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \qquad \frac{\delta S_{ED}}{\delta A_\nu} = \partial_\mu F^{\mu\nu}$$

Invariante Lagrangedichte/Wirkung

$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_M(\phi, D\phi), \;\; S = S_{ED} + S_M$

$\delta S = 0 \Rightarrow$ Feldgleichungen

J^μ eichinvariant, erhalten

$$\boxed{\text{Elektrodynamik} = U(1)\text{-Eichtheorie}}$$

- $\partial_\mu \to D_\mu \Longrightarrow$ Dynamik
- Geometrisierung der WW (Faserbündel)
- können konsistent 'quantisiert werden'
- gute bis erstaunliche Übereinstimmung mit Experimenten

Bemerkungen

- n geladene Felder

  $\vec{\phi} \longrightarrow U(g)\vec{\phi}, \;\; U(g) = \mathrm{diag}(e^{ieq_1\lambda}, \ldots, e^{ieq_n\lambda})$

  Darstellung von $U(1) = \{g | g = \exp ie\lambda\}$:

  $$U(1) = \mathbb{1}, \quad U(g\tilde{g}) = U(g)U(\tilde{g})$$

- Ladung e; $q_a \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ irred. Darstellung
- Massenterm $m^2 A_\mu A^\mu$ in $\mathcal{L}$ 'verboten'
- Quantisierung $\rightarrow$ Quantenlektrodynamik
- Eichinvarianz $\rightarrow$ Unitarität der QED

Nicht-abelsche Eichtheorien

$U(1)$-Symmetrie $\longrightarrow$ nicht-abelsche Symmetrie

Symmetriegruppen und ihre Lie-Algebren

(Speziell) unitäre Gruppen:

$$\begin{aligned} U(N) &= \{g \in M_N(\mathbb{C}) | g^\dagger g = \mathbb{1}\}, \text{ dim} = N^2 \\ SU(N) &= \{g \in U(N) | \det g = 1\}, \text{ dim} = N^2 - 1. \end{aligned}$$

Lie Algebra

$$\mathcal{G} = \{iX | g = e^{iX} \sim \mathbb{1} + iX\}$$

$$X_a \in \mathcal{G} \Longrightarrow \alpha X_1 + \beta X_2, \quad [X_1, X_2] \in i\mathcal{G}$$

linearer Raum mit $[.,.]$, Jakobi-Identität

$$[X,[Y,Z]] + [Z,[X,Y]] + [Y,[Z,X]] = 0.$$

Speziell:

$$\begin{aligned} U(N): &\quad \mathbb{1} = e^{iX} e^{-iX^\dagger} \sim \mathbb{1} - i(X - X^\dagger) \\ SU(N): &\quad 1 = \det(e^{iX}) = \exp(i \mathrm{Sp}\, X) \end{aligned}$$

Damit

$$\boxed{su(N) = \{X | X + X^\dagger, \mathrm{Sp}\, X = 0\}}$$

Basis $\{T_a\}$, Strukturkonstanten ${f_{ab}}^c \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{[T_a, T_b] = i \sum {f_{ab}}^c T_c}$$

Rang r: maximaler Satz kommutierender T_a.
$\{H_1, \ldots, H_r\} \subset \{T_a\} \to$ *Cartan-Unteralgebra*
$\mathrm{Rang}(SU(N)) = N - 1$

• *Die Symmetriegruppe* $SU(2)$

$$SU(2) \;=\; \{g|g = \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad a\bar{a} + b\bar{b} = 1\}$$

$$su(2): \qquad T_a = \tfrac{1}{2}\sigma_a, \quad \mathrm{Sp}\, T_a T_b = \tfrac{1}{2}\delta_{ab}$$

Strukturkonstanten:

$$[\,T_a, T_b\,] = i\epsilon_{abc} T_c \Longrightarrow f_{ab}{}^c = \epsilon_{abc}.$$

• *Die Symmetriegruppe* $SU(3)$

$$T_a = \frac{1}{2}\lambda_a, \quad a = 1, \ldots, 8, \quad H_1 = T_3, H_2 = T_8$$

Gell-mann Matrizen

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \; \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \; \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathrm{Sp}\, T_a T_b = \tfrac{1}{2}\delta_{ab}, \qquad [T_a, T_b] = i f_{ab}{}^c T_c$$

abc	123	147	156	246	257	345	367	458	678
${f_{ab}}^c$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Darstellungen

$$U : G \ni g \longrightarrow U(g) \in L(V), \text{ unitär,}$$
$$U(g\tilde{g}) = U(g)U(\tilde{g}), \quad U(e) = \mathbb{1}$$
$$\Rightarrow\ U(g^{-1}) = U^{-1}(g) = U^{\dagger}(g)$$

hier: definierende und adjungierte Darstellung

- definierende Darstellung:

$$g \longrightarrow U(g) = g \in L(\mathbb{C}^N)$$

- komplex konjugierte Darstellung:

$$g \longrightarrow U(g) = \bar{g} \in L(\mathbb{C}^N)$$

- adjungierte Darstellung:

$$g \longrightarrow Ad(g), \quad Ad(g)X = gXg^{-1}, \quad V = \mathcal{G}.$$

Übung: Zeige, daß Ad eine Darstellung ist und daß $Ad(SU(2)) = SO(3)$

Induzierte Darstellung $U \to U_*$:

$$U(e^{iX}) = e^{iU_*(X)}.$$

$$\begin{aligned} U_*(\alpha X + \beta Y) &= \alpha U_*(X) + \beta U_*(Y) \\ U_*(gXg^{-1}) &= U(g) U_*(X) U(g)^{-1} \\ U_*([X, Y]) &= [U_*(X), U_*(Y)] \end{aligned}$$

Es folgt

$$\boxed{[U_*(T_a), U_*(T_b)] = i f_{ab}{}^c U_*(T_c).}$$

Eichtheorien $\to$ Invarianten:

- fundamentale Darstellung: $V = \mathbb{C}^N$

$$\text{Skalarprodukt}: \quad (x, y) = \textstyle\sum_1^N \bar{x}_i y_i$$
$$g \in U(N) \Rightarrow (gx, gy) = (x, y)$$

- adjungierte Darstellung: $V = \mathcal{G}$

$$\text{Skalarpodukt}: \quad (X, Y) = \mathrm{Sp}\, XY$$
$$(Ad(g)X, Ad(g)Y) = \mathrm{Sp}\,(gXYg^{-1}) = (X, Y)$$

'Treuheit' der adjungierten Darstellung:

$$Ad(g) = Ad(\tilde{g}) \Leftrightarrow gXg^{-1} = \tilde{g}X\tilde{g}^{-1} \quad \forall X$$

Zentrum von G:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z} &= \{z|zg = gz \quad \forall g \in G\} \subset G \\ &\Rightarrow zXz^{-1} = X \quad \forall X \\ &\Rightarrow \tilde{g} = gz, \quad z \in \mathcal{Z}.\end{aligned}$$

$$\mathcal{Z}(SU(2)) = \{\pm\mathbb{1}\},\ \mathcal{Z}(SU(N)) = Z_N$$

$$\boxed{Ad(G) = G/\mathcal{Z}, \quad \text{z.B.} \quad SO(3) = SU(2)/Z_2}$$

Wichtig für Farbeinschluß in QCD.

Darstellungen der Liealgebra

$\{H_i,\ i = 1, \dots r\} \in$ Cartan Unteralgebra

Auf- und Absteigeoperatoren

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^r \quad \text{Wurzel}$$

α, β Wurzeln $\to$ $-\alpha, -\beta, \sigma_\alpha(\beta)$ Wurzeln

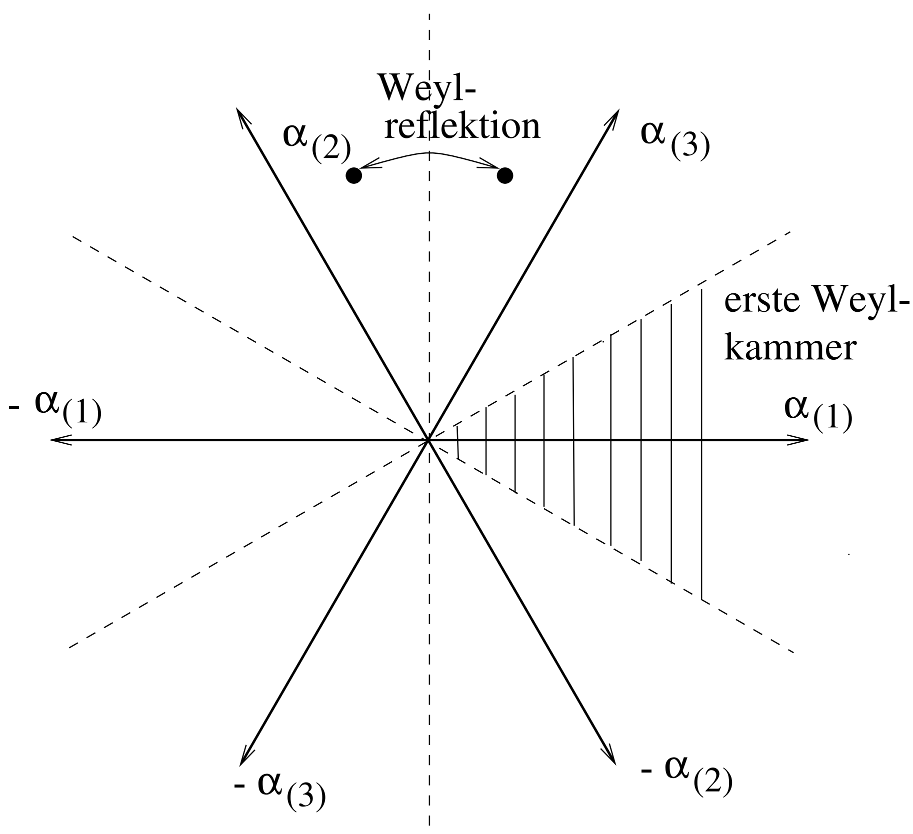
$$N(N-1) \text{ Wurzeln }, \quad \frac{2(\alpha,\beta)}{\alpha^2} \in \mathbb{Z}$$

Einfache Wurzeln:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{r} n_i \alpha_{(i)}, \quad n_i \geq 0 \quad \text{oder} \quad n_i \leq 0$$

$\rightarrow$ positive und negative Wurzeln

$$SU(3): \qquad H_1 = \lambda_3,\ H_2 = \lambda_8$$
$$\alpha_{(1)} = (2,0), \qquad E_{\alpha_{(1)}} = T_1 + iT_2$$
$$\alpha_{(2)} = (-1,\sqrt{3}), \quad E_{\alpha_{(2)}} = T_7 + iT_7$$
$$\alpha_{(3)} = \alpha_{(1)} + \alpha_{(2)}$$



Gewichte einer Darstellung

$[U_*(H_i), U_*(H_j)] = 0$ simultan diagonalisierbar

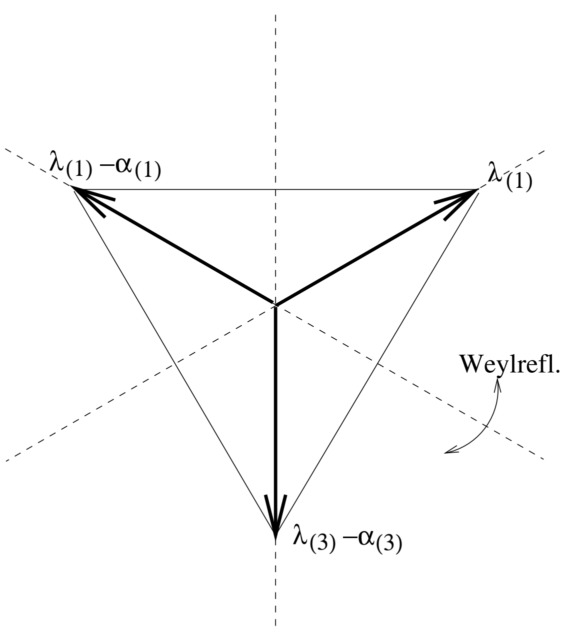
$U_*(H_i)|\mu\rangle = \mu_i|\mu\rangle, \quad |\mu\rangle \in V$ Gewichtsvektor

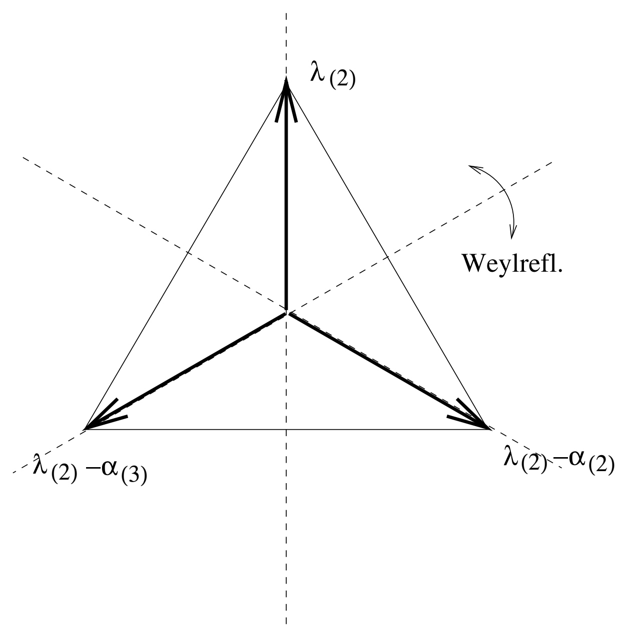
höchstes Gewicht $\mu_{\text{max}} \in \mathbb{R}^r \Leftrightarrow$ irr. Darstellung

$$E_\alpha|\mu_{max}\rangle = 0, \qquad \alpha > 0.$$

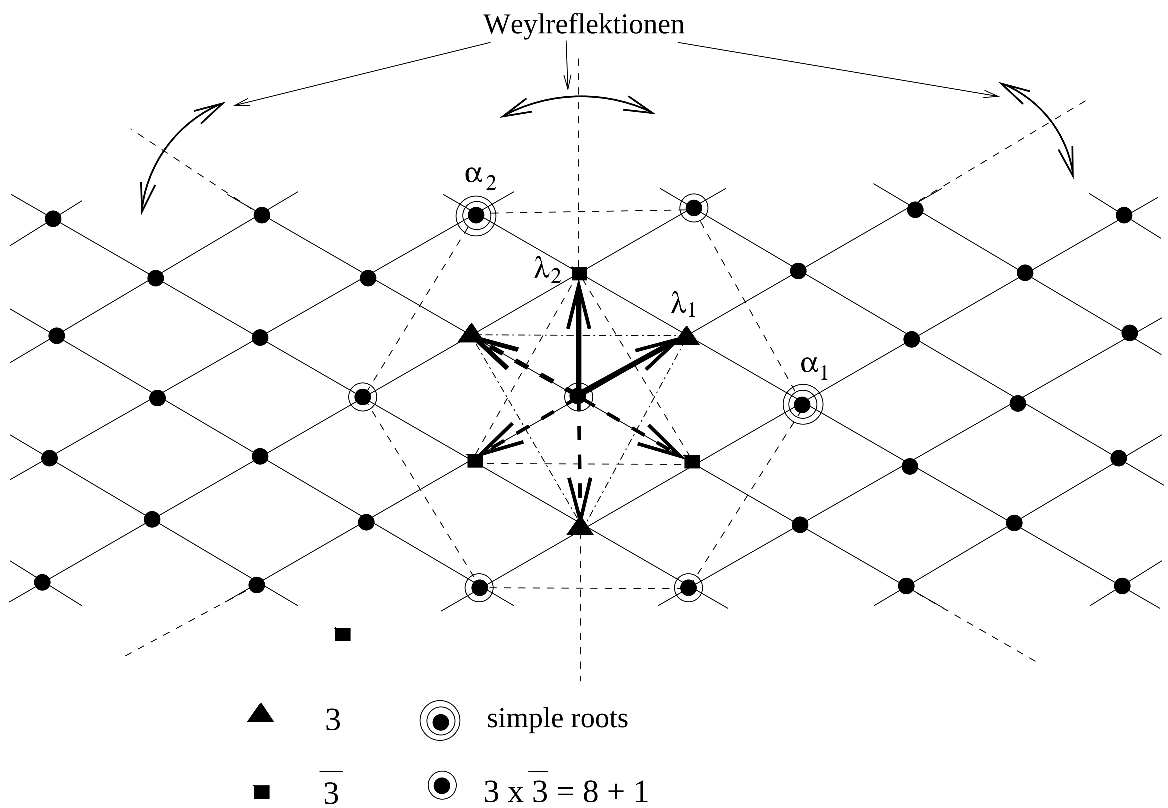
$$SU(3) \quad 3 \quad g \to g \qquad \mu_{max} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\bar{3} \quad g \to \bar{g} \qquad \mu_{max} = \frac{2}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$





Tensorpodukte von $3, \bar{3} \to$ alle Darstellungen



Nicht-Abelsche Eichtheorien

Multiplett massiver Spin 1/2-Teilchen

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} \in V, \text{ Darstellung } \psi \longrightarrow U(g)\psi$$

$$\boxed{(i\partial\!\!\!/ - m)\psi_i = 0, \quad i = 1, \dots, N}$$

$$\bar{\psi} = (\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_n), \quad \bar{\psi}_i = \psi^\dagger \gamma^0$$

Lagrangedichte der Materie

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M &= \bar{\psi} \begin{pmatrix} i\partial\!\!\!/ - m & & \\ & \ddots & \\ & & i\partial\!\!\!/ - m \end{pmatrix} \psi \\ &= \bar{\psi}\,(i\mathbb{1} \otimes \partial\!\!\!/ - m)\psi \end{aligned}$$

Globale $U(N)$-Symmetrie ($\delta\mathcal{L}_M = 0$)

$$\boxed{\psi \longrightarrow U(g)\psi \quad , \quad \bar{\psi} \longrightarrow \bar{\psi}U^{-1}(g)}$$

Lokale Eichinvarianz

Lokale Eichtransformationen (def. Darstellung)

$$\psi(x) \longrightarrow g(x)\psi(x)$$

$\mathcal{L}_M, S_M$ nicht mehr invariant $\rightarrow$ minimale Kopplung

$$\partial_\mu \psi \longrightarrow D_\mu \psi = (\partial_\mu + ieA_\mu)\psi$$

Verlange

$D_\mu(A') = gD_\mu(A)g^{-1} \Rightarrow ieA'_\mu = g(\partial_\mu + ieA_\mu)g^{-1}$,

$\Longrightarrow$

$$\boxed{A'_\mu = gA_\mu g^{-1} - \frac{i}{e} g\partial_\mu g^{-1}}$$

$\boxed{A_\mu \text{ ist Lie-Algebra-wertig}}$

Andere Darstellung $U(g)$:

$$\begin{aligned} D_\mu \psi &= (\partial_\mu + ieU_*(A_\mu))\psi \\ D_\mu(A') &= U(g)D_\mu(A)U^{-1}(g) \end{aligned}$$

Zusammenfassung: Globale Symmetrie

$$\mathcal{L}_M(\psi', \partial\psi') = \mathcal{L}_M(\psi, \partial\psi), \quad \psi' = U(g)\psi, \quad \partial g = 0$$

kann 'lokal gemacht' (geeicht) werden:

$$\boxed{\mathcal{L}_M(\psi', D(A')\psi') = \mathcal{L}_M(\psi, D(A)\psi)}$$

$$\boxed{\psi' = U(g)\psi \quad , \quad A'_\mu = gA_\mu g^{-1} + \frac{i}{e}\partial_\mu g g^{-1}}$$

Verallgemeinerung von $\mathcal{L}_{ED} =?$

$\mathcal{L}$ Lorentz- und eichinvariant, maximal erste Ableitungen

Feldstärke:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \frac{1}{ie}[D_\mu, D_\nu] = \frac{1}{ie}[\partial_\mu + ieA_\mu, \partial_\nu + ieA_\nu] \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ie[A_\mu, A_\nu] \end{aligned}$$

antisymmetrischer Tensor, transformiert kovariant

$$D_\mu(A') = gD_\mu(A)g^{-1} \Rightarrow$$

$$\boxed{F_{\mu\nu}(A') = gF_{\mu\nu}(A)g^{-1}}$$

$$A_\mu = A^a_\mu T_a \in \mathcal{G} \longrightarrow F_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu} T_a \in \mathcal{G}$$

In Komponenten:

$$\begin{aligned} F^a_{\mu\nu} T_a &= \partial_\mu A^a_\nu T_a - \partial_\nu A^a_\nu T_a + ieA^b_\mu A^c_\nu [T_b, T_c] \\ F^a_{\mu\nu} &= \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\nu - ef^a_{\ bc} A^b_\mu A^c_\nu \end{aligned}$$

Yang-Mills Lagrangedichte

$$\boxed{\mathcal{L}_{YM} = -\tfrac{1}{4}\mathrm{Sp}\, F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}}$$

- eindeutige eichinvariante skalare Dichte!

Gekoppeltes System:

$$\boxed{\mathcal{L} = \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_M(\psi, D_\mu\psi)}$$

Bemerkungen: Eine Eichtheorie bestimmt durch

- Eichgruppe G
  QCD : $SU_c(3)$
  Weinberg-Salam: $SU_L(2) \times U_Y(1)$.
- Darstellungen der ϕ, ψ
- universelle Koppelungskonstante e
- evtl. weiter Parameter in $\mathcal{L}_M$
- Weinberg-Salam Modell: Koppelungskonstante im Higgspotential, KMS-Matrix, Yukawa Koppelungen

Infinitesimale Eichtransformationen:

$$g = e^{ieX} \sim \mathbb{1} + ieX$$

$$\phi' \sim \phi + ieX\phi, \qquad A'_\mu \sim A_\mu + ie[X, A_\mu] - \partial_\mu X.$$

$$\boxed{\delta\phi = ieX\phi \quad , \quad \delta F_{\mu\nu} = ie[X, F_{\mu\nu}]}$$

$$\boxed{\delta A_\mu = -\partial_\mu X - ie[A_\mu, X] = -D_\mu X}$$

In Komponenten $X = \lambda^a T_a$:

$$\begin{aligned} \delta F^a_{\mu\nu} &= -e f^a{}_{bc} \lambda^b F^c_{\mu\nu} \\ \delta A^a_\mu &= -\partial_\mu \lambda^a + e f^a{}_{bc} A^b_\mu \lambda^c \end{aligned}$$

Eichströme:

$$\boxed{J^\mu_a = -\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial A^a_\mu}, \quad \partial_\mu J^\mu_a - e f_{abc} A^b_\mu J^{c\mu} \equiv (D_\mu J^\mu)_a}$$

- Dirac-Feld (def. Darstellung)

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi} \not{D} \psi, \quad J^\mu_a(\psi) = e\bar{\psi}\gamma^\mu T_a \psi$$

- Skalare Felder (def. Darstellung)

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi, \;\; J^\mu_a(\phi) = -ie(D^\mu\phi, T_a\phi) + h.c$$

Quantisierung: Eichladungen $[Q_a, Q_b] \neq 0$

Frage: Was ist $J^\mu_a(\phi)$ für

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi - V(\phi), \quad V(g\phi) = V(\phi)$$

Feldgleichungen

A_μ: Eichbosonen, adj. Darstellung
ϕ, ψ: Spin-0/$\frac{1}{2}$ Teilchen, def. Darstellung

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_\psi \\
\mathcal{L}_{YM} &= -\tfrac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{a\mu\nu} \\
\mathcal{L}_\phi &= (D^\mu \phi, D_\mu \phi) - V(\phi) \\
\mathcal{L}_\psi &= \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi
\end{aligned}$$

$V(g\phi) = V(g)$ Higgspotential

$\mathcal{L}$ eichinvariant

δS: partielle Integration, $\mathrm{Sp}\,(T_a T_b) = \delta_{ab}$:

$$\delta S_{YM} = \int \delta A_\mu^a (D_\mu F^{\mu\nu})_a$$

$$\delta S_\phi = -\int \, (\delta\phi, D^2\phi + \frac{\partial V}{\partial \phi^\dagger}) - \int \delta A_\mu^a J_a^\mu(\phi)$$

$$\delta S_\psi = \int \delta\bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi + h.c. - \int \delta A_\mu^a J_a^\mu(\psi)$$

J_a^μ : Eichströme

Übung: Beweise diese Formeln

- *Yang-Mills-Gleichungen*

$$\boxed{(D_\mu F^{\mu\nu})_a = J_a^\nu(\phi) + J_a^\nu(\psi)}$$

$$(D_\mu F^{\mu\nu})_a \;=\; \partial_\mu F_a^{\mu\nu} - e f_{abc} A_\mu^b F^{c\mu\nu}$$

- *Kovariante Klein-Gordon-Gleichung*

$$\boxed{D^\mu D_\mu \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi^\dagger} = 0}$$

- *Diracgleichung*

$$\boxed{(i\not{D} - m)\psi = 0.}$$

  - S bzw. EOM $\to$ Quantisierung
  - Reine Eichtheorien

    $$S = -\tfrac{1}{4}\int \mathrm{Sp}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \qquad D_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

    intensiv untersucht: Instantonen, Gitterrechnungen $\to$ Spektrum, Phasen

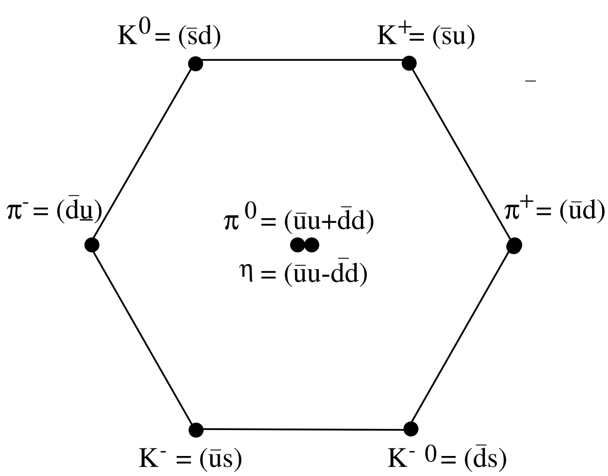
Quantenchromodynamik

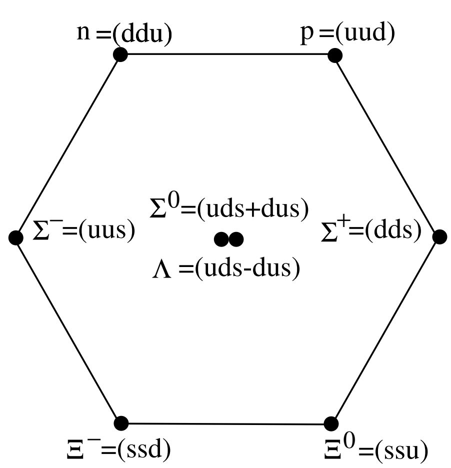
Mesonen, Baryonen $\sim$ gebundene Quarks

6 flavours, Spin(Quarks)=$\frac{1}{2}$

	e	I	I_3	S	C	B	MEV/c^2
u	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	5(330)
d	-$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	-$\frac{1}{2}$	0	0	0	7(336)
s	-$\frac{1}{3}$	0	0	-1	0	0	150(540)
c	$\frac{2}{3}$	0	0	0	1	0	1500(1550)
b	-$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	-1	10000
t	$\frac{2}{3}$	0	0	0	0	0	175000

Mesonen $\sim q\bar{q}$ Baryonen $\sim qqq$





Idealisiertes Drei-Flavourmodell

u, d, s Quarks:

- Flavour-Universalität, $m_u \sim m_d \sim m_s$

$$(\psi_i) = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}, \quad \psi \longrightarrow g\psi, \quad g \in U_f(3)$$

- Quarks transformieren mit 3 von $U_f(3)$
- Antiquarks mit $\bar{3}$ von $U_f(3)$.

Universalität $\Rightarrow$

$U(g)H_{str}U^{-1}(g) = H_{str} \Rightarrow [U_*(T_a), H_{str}] = 0$,

> Schur: alle Zustände einer irr. Darstellung haben dieselbe Energie (Masse)

- Mesonen: $\bar{3} \otimes 3 = 8 \oplus 1$
- Baryonen: $3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 2 \cdot 8 \oplus 1$

Nur approximative globale Symmetrie

$m_u \sim m_d \neq m_s$

Spin + Statistik, $\sigma(e^-e^+ \to \text{Hadronen})$:

$\boxed{q \text{ haben weiteren Freiheitsgrad: Farbe}}$

$$(u_\alpha) = \begin{pmatrix} u_r \\ u_g \\ u_b \end{pmatrix}, \quad (d_\alpha) = \begin{pmatrix} d_r \\ d_g \\ d_b \end{pmatrix}, \ldots, \ \text{18 Quarks}$$

Farbmischungen: $SU_c(3)$-Transformationen

$$\psi \longrightarrow g\psi, \quad \psi = u, d, s, \ldots, \quad g \in SU_c(3).$$

$$[U_*(T_a), H_{QCD}] = 0, \qquad T_a \in su(3)$$

$\boxed{\text{Farbsymmetrie exakt und lokal} \Rightarrow \text{QCD ist } SU_c(3)\text{-Eichtheorie (Confinement?)}}$

- Quarkfelder

$$\psi_{j\alpha}: \quad \alpha = \text{blau,rot,} \ldots = \text{Farbe}$$
$$j = \text{u,d,} \ldots = \text{Flavour}, \quad SU_c(3)$$

- Gluonenfelder

$$A_\mu^a, \qquad a = 1, \ldots 8, \ \text{masselos, Spin 1}$$

Lagrangean für Quark und Gluonenfelder:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{QCD} &= -\frac{1}{4}\sum_{a=1}^{8}(F_{\mu\nu}^{a})^2 \\ &+ \sum_{j=1}^{n_f}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\bar{\psi}_{j\alpha}(i\partial\!\!\!/\,\delta^{\alpha\beta}+ie\gamma^{\mu}A_{\mu}^{a}T_{a}^{\alpha\beta} \\ &\qquad\qquad -\delta^{\alpha\beta}m_j)\psi_{j\beta}\end{aligned}$$

3 Flavours, chirale Grenzfall $m_j = 0$:

$\boxed{S \text{ invariant unter globaler Symmetrie } SU_V(3) \times SU_A(3) \times U_V(1)}$

- Vektorsymmetrie:

$$\psi_j \longrightarrow (e^{iX})_{jk}\psi_k, \quad e^{iX} \in U(3) \sim SU(3) \times U(1)$$

- Axial-Vektorsymmetrie:

$$\psi_j \longrightarrow (e^{i\gamma_5 Y})_{jk}\psi_k, \quad e^{iY} \in SU(3)$$

Erhaltene Noetherströme:

$$\boxed{J_a^{\mu} = \bar{\psi}\gamma^{\mu}T_a\psi \quad , \quad J_a^{5\mu} = \bar{\psi}\gamma^{\mu}\gamma_5 T_a\psi}$$

• Hadronenspektrum: nur approximative $SU_V(3)$-Symmetrie $\Rightarrow$

$$\boxed{SU_V(3) \text{ realisiert, } SU_A(3) \text{ spontan gebrochen}}$$

$$Q_a|0\rangle = 0 \quad \text{aber} \quad Q_a^5|0\rangle \neq 0.$$

$\rightarrow$ 8 Goldstone-Bosonen für 3 Flavours

$$\pi^\pm, \pi^0, K^\pm, K^0, \bar{K}^0, \eta$$

Spontane Symmetriebrechung

$$\delta_\epsilon \Theta = i[\epsilon^a Q_a^5, \Theta] = \epsilon^a \Phi_a$$

$$\boxed{\text{Ordnungsparameter: } \bar{\phi}_a = \langle 0|\Phi_a|0\rangle}$$

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_a &= i\langle 0|Q_a^5\Theta - \Theta Q_a^5|0\rangle \\ &= i\langle Q_a^5 0|\Theta|0\rangle - i\langle 0|\Theta Q_a^5|0\rangle \end{aligned}$$

$$\boxed{\bar{\phi}_a \neq 0 \Longrightarrow Q_a^5|0\rangle \neq 0 \qquad \text{SSB}}$$

Chirale Symmetriebrechung:

$$\Phi = \bar{u}u, \quad \langle 0|\bar{u}u|0\rangle \sim (250MeV)^3.$$

Φ zusammengesetzt: dynamische SSB.

$\boxed{\text{Methode der effektiven Potentiale}}$

Weinberg-Salam Modell

$SU_L(2) \times U_Y(1)$-Eichtheorie

$$\begin{array}{ll} A_a^\mu: & SU(2) - \text{Eichfelder} \\ B^\mu: & U(1) - \text{Eichfeld} \end{array}$$

Rechtshändige Fermionen = $SU(2)$-singletts:

$$\psi_R = P_R\psi, \quad e_R, u_R, d'_R, \quad P_R = \tfrac{1}{2}(1+\gamma_5)$$

Linkshändige Fermionen = $SU(2)$-dubletts:

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_L \\ d'_L \end{pmatrix}, \quad e_L = \tfrac{1}{2}(1-\gamma_5)e$$

$$\tau_3\psi_L = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Gell-Mann, Nishijima: } Q = \tau_3 + \tfrac{1}{2}Y}$

• Experimente:

	$\begin{pmatrix}\nu_e\\ e\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}u\\ d'\end{pmatrix}$	e_R	u_R	d_R
Y	-1	$\frac{1}{3}$	-2	$\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$
Q	$\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}$	$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$	-1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$

Kovariante Ableitungen:

$$\begin{aligned} D_\mu \psi_R &= (\partial_\mu + i\,\frac{g'}{2} y B_\mu)\psi_R \\ D_\mu \psi_L &= (\partial_\mu + i\,\frac{g'}{2} y B_\mu + i\,\frac{g}{2} A_\mu^a \tau_a)\psi_L \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{L}_\psi = i\bar{\psi}_R \gamma^\mu D_\mu \psi_R + i\bar{\psi}_L \gamma^\mu D_\mu \psi_L}$$

W/Z-Bosonenmassen via SSB $\Rightarrow$ Higgsfeld in definierender $SU(2)$-Darstellung, $Y = 1$

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_3 + i\phi_4 \\ \phi_1 + i\phi_2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D_\mu \phi = (\partial_\mu + i\,\frac{g'}{2} B_\mu + i\,\frac{g}{2} A_\mu^a \tau_a)\phi$$

- *Spontane Symmetriebrechung*

$$\mathcal{L}_{Higgs} = (D_\mu\phi)^\dagger D^\mu\phi - V(\phi)$$

klassisch: Minimum von $V(\phi) \sim \langle\phi\rangle$

$$\langle\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow SU_L(2) \times U_Y(1) \longrightarrow U_Q(1)$$

$$\boxed{V(\phi) = -c^2\phi^\dagger\phi + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2}$$

Minimum: $\phi^\dagger\phi = c^2/2\lambda = v^2/2$

- Massenerzeugung

$$\boxed{(D_\mu)^\dagger(D^\mu\phi) \sim \partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi + \tfrac{1}{2}A_\mu^A M_{AB}^2(v)A_B^\mu}$$

$$A_\mu^a = (A_\mu^1, A_\mu^1, A_\mu^3, B_\mu)$$

$$M^2(v) = \frac{v^2}{2}\begin{pmatrix} g^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g^2 & -gg' \\ 0 & 0 & -gg' & g'^2 \end{pmatrix}$$

Masseneigenzustände:

$$\begin{aligned} W^\pm: &\quad m^2 = \tfrac{1}{4} g^2 v^2 \\ Z: &\quad m^2 = \tfrac{1}{4} v^2 (g^2 + g'^2) \\ A: &\quad m^2 = 0 \quad \text{(Photon)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Masse der Eichbosonen } \sim gv}$$

- Masse der Fermionen: Yukawa-Koppelung

$$\mathcal{L}_M \sim \gamma \bar{\psi}_L \phi \psi_R \sim (\gamma v)\, e_L e_R + \ldots$$

$$\boxed{\text{Masse der Fermionen } \sim \gamma v}$$

Literatur $\Rightarrow$

- Quantisierung (Pfadintegral) $\rightarrow$ Störungstheorie, Feynmangraphen
- Vergleich Theorie $\leftrightarrow$ Experiment
- Nichtstörungstheoretische Effekte (Monopole, Instantonen; Confinement, CSB)
- Gitterformulierungen
- ....