

Einführung in Konforme Feldtheorien

A. Wipf

*Institut für Theoretische Physik
ETH-Hönggerberg
CH-8093 Zürich, Switzerland*

Inhalt

1. Einführende Bemerkungen
2. Die konforme Gruppe
3. Konsequenzen der konformen Invarianz
4. Der Energie-Impuls Tensor und die Virasoro Algebra
5. Bemerkungen zu den Darstellungen der Virasoro Algebra
6. Einfluss von Rändern (finite size effects)

1. Einführung

Von der allgemeinen Relativitätstheorie abgesehen sind alle fundamentalen klassischen Theorien der Physik konform invariant. Schon früh wurde gezeigt (Cunningham 1909), dass die Elektrodynamik invariant bezüglich der konformen Gruppe $SO(4,2)$ ist. Die Verallgemeinerungen der Elektrodynamik, die nichtabelschen Eichtheorien, besitzen diese Invarianz ebenfalls (und als eine Konsequenz davon die infrarot Probleme in der 'Instanton-Physik'). Auch masselose Fermionen und skalare Bosonen mit ϕ^4 Selbstwechselwirkung verletzen diese Symmetrie nicht.

Erst bei der Quantisierung wird die klassische konforme Invarianz wegen der auftretenden Skalenanomalien generisch gebrochen (sicher aber an Stellen wo die Renormierungsgruppen β -Funktion keine Nullstelle hat, da Skalenänderungen Teil der konformen Gruppe sind). Wegen dieser Brechung der konformen Invarianz, die sich z.B. durch logarithmische Korrekturen von QCD-Streuquerschnitten manifestiert, lies das Interesse an den Konsequenzen der konformen Invarianz für Quantenfeldtheorien vor etwa 15 Jahren merklich nach.

Als aber Mitte der 80er Jahre erkannt wurde, dass konforme Feldtheorien eine zentrale Stellung in *Stringtheorien* einnehmen, erwachte das Interesse an diesen Theorien wieder (siehe z.B. Green, Schwarz und Witten, 1987). Allerdings sind es 2-dimensionale Modelle die hier von Interesse sind. In 2 Dimensionen überlebt die konforme Symmetrie die Quantisierung leichter als in 4 Dimensionen und man kann eine grosse Klasse von konformen Modellen finden. Zudem ist die konforme Gruppe in 2 Dimensionen unendlich-dimensional, im Gegensatz zu höheren Dimensionen, und daher sind die Konsequenzen dieser Symmetrie weitreichender. Zum Beispiel bestimmen die zur konformen Symmetrie gehörenden Ward Identitäten alle Korrelationsfunktionen eindeutig (in höheren Dimensionen legen sie nur die 2- und 3-Punkts Korrelationsfunktionen fest).

Neben ihrer Bedeutung für Stringtheorien sind diese Modelle von grossem Interesse in Theorien der *kritischen Phänomene* (siehe z.B. Cardy, 1987) und der Beschreibung des Quanten-Hall-Effektes (siehe z.B. J. Fröhlich und T. Kerler (1990)). Man kann nämlich (unter plausiblen Annahmen) zeigen, dass Skaleninvarianz automatisch konforme Invarianz bedingt. Skaleninvarianz von Gittermodellen am kritischen Punkt hat sich in der Vergangenheit aber als sehr erfolgreiche Hypothese erwiesen, und daher erwarten wir dass diese Modelle (z.B. das Isingmodell oder die Pottsmodelle) durch konforme Feldtheorien beschrieben werden.

Die neueren Entwicklungen begannen mit der Arbeit von Belavin, Polyakov und Zamolodchikov (1984), in welcher die Korrelationsfunktionen für eine grosse Klasse von konformen Feldtheorien (den entarteten Modellen) explizit berechnet wurden. Dabei spielte der lokale Energie-Impuls Tensor, der die konformen Transformationen erzeugt, eine wichtige Rolle. Kurz darauf analysierten Friedan, Qiu and Shenker (1984) die Darstellungstheorie der konformen Algebra (Virasoro Algebra) des Energie-Impuls Tensors und zeigten, dass nur für bestimmte rationale Werte der in der Virasoro Algebra auftretenden zentralen Ladung c die konforme Theorie unitär ist. Da die zentrale Ladung mit den kritischen Exponenten zusammenhängt, lieferte dieses Resultat eine natürliche Erklärung für das Auftreten von rationalen kritischen Exponenten in 2 Dimensionen. Seit diesen anfänglichen Erfolgen gibt es viele andere und interessante Resultate und Anwendungen, wovon wir im Folgenden einige kennenlernen werden.

2. Die konformen Gruppen

Die Gruppe der konformen Transformationen in einer d -dimensionalen Raum-Zeit mit Koordinaten $x^\mu = \{x^0, x^1, \dots, x^{d-1}\}$ sind alle Transformationen

$$x^\mu \rightarrow y^\mu = y^\mu(x^\nu) \tag{1a}$$

welche die Winkel zwischen sich schneidenden Kurven invariant lassen. Speziell enthält diese Gruppe die Poincare Transformationen, welche zusätzlich den Abstand zwischen zwei Punkten unverändert lassen. In anderen Worten, unter konformen Transformationen bleibt die Metrik bis auf einen konformen (Weyl) Faktor e^ϕ invariant

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta, \quad g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} \eta_{\mu\nu} = e^{\phi(y)} \eta_{\alpha\beta}. \quad (2a)$$

Diese Transformationen lassen den Lichtkegel invariant, können aber raumartige x in zeitartige x abbilden. Die scheinbar resultierenden Probleme mit der Kausalität wurden von Lüscher und Mack (1975) diskutiert und gelöst. Betrachtet man die zu (2a) gehörenden, durch Vektorfelder $X(x)$ erzeugte infinitesimalen Transformationen,

$$y^\mu = x^\mu - \epsilon X^\mu(x), \quad (1b)$$

und entwickelt $g_{\mu\nu}$ bis zur ersten Ordnung in ϵ ,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dy^\mu dy^\nu \sim \left(\eta_{\mu\nu} - \epsilon (X_{\mu,\nu} + X_{\nu,\mu}) \right) dy^\mu dy^\nu, \quad (2b)$$

so sieht man aus (2a), dass die symmetrisierte Ableitung des Vektorfeldes X_μ proportional zu $\eta_{\mu\nu}$ sein muss. Mittels Spurbildung findet man dann

$$X_{\mu,\nu} + X_{\nu,\mu} = \frac{2}{d} \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha X^\alpha \implies \delta\eta_{\mu\nu} = -\frac{2}{d} \partial_\alpha X^\alpha \eta_{\mu\nu}, \quad (3)$$

was bedeutet, dass konforme Koordinatentransformationen durch *konformes Killingfelder* erzeugt werden.

In drei und mehr Dimensionen gibt es nur eine endliche Anzahl konformer Killingfelder und die konforme Gruppe ist endlich-dimensional. Sie wird von folgenden konstanten, linearen und quadratischen Vektorfeldern erzeugt:

d Translationen	$X^\mu = a^\mu$	
$\frac{1}{2}d(d-1)$ Lorentztransf.	$X^\mu = \omega^\mu_\nu x^\nu$, $\omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} = 0$	(4)
1 Dilatation	$X^\mu = \lambda x^\mu$	
d spezielle konf. Transf.	$X^\mu = 2(c \cdot x)x^\mu - x^2 c^\mu$.	

Die Anzahl Erzeugender ist gleich $\frac{1}{2}(d+1)(d+2)$ und stimmt mit der Dimension der Gruppe $SO(d,2)$ überein. In der Tat, wenn man $d+2$ projektive Koordinaten einführt,

$$\xi^M = (\xi^\mu, \psi + \chi, \psi - \chi), \quad \text{wobei} \quad \xi^\mu = 2\psi x^\mu \quad \text{und} \quad \chi = \psi x^2,$$

dann können die (i.a. nichtlinearen) konformen Transformationen linear dargestellt werden und stimmen mit $SO(d,2)$ überein.

Aus dem Transformationsverhalten von Tensorfeldern bei Koordinatenänderungen (1a) findet man für infinitesimale Transformationen

$$\delta_X S_{\alpha\beta\dots} = \frac{d}{d\epsilon} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} \dots S_{\mu\nu\dots}(x(y)) \right) \Big|_{\epsilon=0} \equiv L_X S_{\alpha\beta\dots}, \quad (5a)$$

und deshalb sind die infinitesimalen Transformationen eines Materiefeldes $S_{\alpha\beta\dots}$ durch die Lie-Ableitung L_X gegeben. Zum Beispiel, für ein Vektorfeld V_α ist

$$L_X V_\alpha = X^\mu \partial_\mu V_\alpha + X^\mu{}_{,\alpha} V_\mu. \quad (5b)$$

Setzt man die zu konformen Transformationen gehörenden Killingfelder (4) ein, so findet man

$$\begin{aligned} \text{Transl.} \quad L_X V_\alpha &= a^\mu \partial_\mu V_\alpha \\ \text{Lorentztrf.} \quad L_X V_\alpha &= \omega^{\mu\nu} x_\mu \partial_\nu V_\alpha + \omega^\mu{}_\alpha V_\mu \\ \text{Dilatationen} \quad L_X V_\alpha &= \lambda (x^\mu \partial_\mu V_\alpha + V_\alpha) \\ \text{spez. Trf.} \quad L_X V_\alpha &= 2 \left(c \cdot x x^\mu - x^2 c^\mu \right) \partial_\mu V_\alpha + 2 \left(c_\alpha x^\mu - x_\alpha c^\mu + c \cdot x \delta_\alpha^\mu \right) V_\mu, \end{aligned} \quad (6)$$

und analog für Tensorfelder anderer Stufe (siehe Mack und Salam, 1969).

Jede Theorie die kovariant an das Gravitationsfeld $g_{\mu\nu}$ gekoppelt werden kann ist invariant unter den kleinen Transformationen (1b) und (6) falls die Metrik entsprechend mittransformiert wird. Konform invariante Theorien sind dadurch ausgezeichnet, dass man diese Transformationen als Symmetrie-Transformationen im *Minkowski Raum* (ohne die flache Metrik $\eta_{\mu\nu}$ zu ändern) interpretieren kann. Allerdings müssen dann die beiden letzten Transformationen in (6) modifiziert werden für Felder, für welche die Massendimension mit der Tensorstufe nicht übereinstimmt (siehe unten). Zum Beispiel, in 4 Dimensionen sind die Massendimension und die Tensorstufe eines Vektorpotentials gleich eins und die Transformationen (6) sind Symmetrien im Minkowski Raum. Ein Skalarfeld hat (ausser in 2 Dimensionen) eine Massendimension ungleich Null, und obige Transformationen müssen modifiziert werden damit sie als Symmetrien im Minkowski Raum interpretiert werden können.

Konform invariante Feldtheorien

Nun zeigen wir wie man konform invariante Feldtheorien gewinnen kann und wie man die modifizierten Feldtransformationen findet. Zuerst bemerken wir, dass jede Theorie im Minkowski Raum, welche kovariant und weylinvariant an das Gravitationsfeld $g_{\mu\nu}$ gekoppelt werden kann, automatisch konform invariant im Minkowski Raum ist. Dabei bedeutet Weylinvarianz, dass die (Koordinaten-invariante) Wirkung invariant bezüglich Weyltransformationen der Metrik

$$g_{\mu\nu}(y) \rightarrow \hat{g}_{\mu\nu}(y) = e^{\phi(y)} g_{\mu\nu}(y) \quad (7a)$$

und der Materiefelder ist,

$$S \left[e^{\phi(y)} g_{\mu\nu}(y), e^{\alpha\phi(y)} S_{\alpha\beta\dots}(y) \right] = S \left[g_{\mu\nu}(y), S_{\alpha\beta\dots}(y) \right], \quad (7b)$$

wobei das *Weyl-Gewicht* α in der Weyltransformation $S_{\alpha\beta\dots} \rightarrow e^{\alpha\phi} S_{\alpha\beta\dots}$ vom Materiefeld $S_{\alpha\beta\dots}$ abhängt.

Die konforme Invarianz im Minkowski Raum kann nun folgendermassen eingesehen werden: zuerst transformiert man die Minkowski Koordinaten mittels einer konformen Transformation (1a) und fasst diese als allgemeine Koordinatentransformation auf

$$\{x^\mu, \eta_{\mu\nu}, S_{\alpha\beta\dots}(x)\} \rightarrow \{y^\mu, g_{\mu\nu}, \tilde{S}_{\alpha\beta\dots}(y) = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} \dots S_{\mu\nu\dots}(x(y))\}. \quad (8a)$$

Wegen der allgemeinen Koordinateninvarianz bleibt die Wirkung unverändert. Da bei konformen Transformationen die Metrik gemäss (2a) nur weyltransformiert wird, können wir in einem zweiten Schritt mit einer geeigneten Weyltransformation

$$\{y^\mu, g_{\mu\nu}, \tilde{S}_{\alpha\beta\dots}\} \rightarrow \{y^\mu, \hat{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}, e^{\alpha\phi} \tilde{S}_{\alpha\beta\dots}\} \quad (8b)$$

die Metrik wieder in Minkowski-Form bringen. Wie man leicht sieht ist der entsprechende Weylfaktor gegeben durch

$$e^{-\phi(x)} = \frac{1}{d} \eta^{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dy^\alpha} \frac{dx^\nu}{dy^\beta}, \quad \phi \sim -\frac{2\epsilon}{d} \partial_\alpha X^\alpha. \quad (9)$$

Da $\eta_{\mu\nu}$ bei der Kombination von (8a) und (8b) ungeändert bleibt, können wir diese Kombination als konforme Transformation im Minkowski Raum auffassen, wie oben behauptet. Unter kleinen Koordinatenänderungen (1b) transformiert $S_{\alpha\beta\dots}$ dann gemäss

$$S_{\alpha\beta\dots} \rightarrow \left(L_X - \frac{2\alpha}{d} \partial_\alpha X^\alpha \right) S_{\alpha\beta\dots}, \quad (10)$$

wobei der erste Term von den Transformationen (8a) und der zweite von der Transformationen (8b) herrührt. Der Term proportional zur Divergenz des konformen Killingfeldes verschwindet für Poincare Transformationen und modifiziert die tensorielle Änderung (5a) nur für Dilatationen und spezielle konforme Transformationen. Speziell für Dilatationen, $y^\mu \sim x^\mu + \epsilon \lambda x^\mu$, vereinfacht sich (10) zu

$$S_{\alpha\beta\dots} \rightarrow \lambda (x^\mu \partial_\mu + s - 2\alpha) S_{\alpha\beta\dots} \quad (11)$$

wobei s die Tensorstufe (genauer: die Anzahl kovarianter minus die Anzahl kontravarianter Indizes von $S_{\alpha\beta\dots}^{\delta\sigma\dots}$) ist. Üblicherweise bezeichnet man $\Delta = s - 2\alpha$ als *konformes Gewicht* von $S_{\alpha\beta\dots}$.

Schlussendlich bemerken wir noch, dass das soeben beschriebene Verfahren automatisch den 'korrekten' (d.h. spurlosen) Energie-Impuls Tensor $T_{\mu\nu}$ im Sinne von Callan, Coleman und Jackiw (1970) liefert. Dies folgt aus der Definition des Energie-Impuls Tensors,

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} S [g_{\mu\nu}, S_{\alpha\beta\dots}], \quad (12a)$$

und der Weylinvarianz der Wirkung (7b) gemäss

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} = 0 = \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} \frac{\delta g^{\mu\nu}}{\delta \phi} + \frac{\delta S}{\delta S^{\alpha\beta\dots}} \frac{\delta S^{\alpha\beta\dots}}{\delta \phi} = -\frac{1}{2} \sqrt{g} T_{\mu}^{\mu}. \quad (12b)$$

In der letzten Gleichung haben wir benutzt, dass die Ableitung nach $S_{\alpha\beta\dots}$ nicht beiträgt wenn $S_{\alpha\beta\dots}$ die Feldgleichung erfüllt. Wir sehen also, dass für Materiefelder mit Weylgewicht $\alpha \neq 0$ der Energie-Impuls Tensor nur 'on shell' spurlos ist.

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen illustrieren wir das Besprochene anhand von Beispielen:

- i) Ein *masseloses Skalarfeld* kann in beliebigen Dimensionen weylinvariant an das Gravitationsfeld gekoppelt werden (siehe z.B. in Birrell und Davies, 1982), da der folgende Wellenoperator kovariant unter Weyltransformationen der Metrik (7a) transformiert,

$$\nabla^2 + \xi_d R \longrightarrow \hat{\nabla}^2 + \xi_d \hat{R} = e^{-\frac{1}{4}(d+2)\phi} \left(\nabla^2 + \xi_d R \right) e^{\frac{1}{4}(d-2)\phi}, \quad (13a)$$

wobei $\xi_d = \frac{1}{4}(d-2)/(d-1)$. Die Wirkung

$$S = \int \sqrt{g} \Phi \left(\nabla^2 + \xi_d R \right) \Phi \quad (13b)$$

ist weylinvariant falls dem Skalarfeld das Weyl-Gewicht $\alpha = \frac{1}{4}(2-d)$ zugeordnet wird. Mit (10) schliessen wir also, dass unter kleinen konformen Transformationen ein Skalarfeld folgendermassen transformiert

$$\delta_X \Phi = L_X \Phi + \frac{d-2}{2d} \partial_\alpha X^\alpha \Phi. \quad (13c)$$

Speziell unter Dilatationen ändert sich das Feld wie

$$\delta_D \Phi = \lambda \left(x^\mu \partial_\mu + \frac{d-2}{2} \right) \Phi, \quad (13d)$$

und deshalb transformiert ein Skalarfeld nur in zwei Raum-Zeit Dimensionen tensoriell unter konformen Transformationen.

- ii) Da der *Dirac Operator* ebenfalls kovariant unter Weyltransformationen ändert,

$$\mathcal{D} \rightarrow \hat{\mathcal{D}} = e^{-\frac{1}{4}(d+1)\phi} \mathcal{D} e^{\frac{1}{4}(d-1)\phi}, \quad (14)$$

ist die Wirkung $\int \sqrt{g} \bar{\psi} \not{D} \psi$ weylinvariant wenn wir Dirac-Spinoren das Weyl-Gewicht $\alpha = \frac{1}{4}(1-d)$ zuordnen. Wie für Skalarfelder ist das Weyl-Gewicht gleich dem konformen Gewicht, $\alpha = \Delta$. Obwohl sich Spinoren unter allgemeinen Koordinatenänderungen wie Skalare verhalten, transformieren sie mit konformen Gewicht $\Delta \neq 0$ unter konformen Transformationen.

- iii) In 4 Dimensionen ist die Yang-Mills Wirkung $\int \sqrt{g} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta}$ schon weylinvariant ohne das die Eichfelder transformiert werden müssen. Das Vektorpotential transformiert daher tensoriell unter konformen Transformationen. Speziell unter Dilatationen $\delta_D A_\alpha = L_X A_\alpha = \lambda(x^\mu \partial_\mu + 1) A_\alpha$, und daher hat A_α konformes Gewicht $\Delta = 1$ (aber Weylgewicht $\alpha = 0$).

3. Konsequenzen der konformen Invarianz

Im letzten Kapitel haben wir gesehen, dass unter konformen Transformationen der Koordinaten und Materiefelder,

$$\begin{aligned} x^\mu &\rightarrow y^\mu = y^\mu(x) \sim x^\mu - \epsilon X^\mu(x) \\ S_{\alpha\beta\dots} &\rightarrow e^{\alpha\phi} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\beta} \dots S_{\mu\nu\dots}(x(y)) \sim \left(L_X - \frac{2\alpha}{d} \partial_\alpha X^\alpha \right) S_{\alpha\beta\dots}, \end{aligned} \quad (15)$$

(wobei der Weylfaktor $e^{\alpha\phi}$ mit der Koordinatentransformation über (9) zusammenhängt) die Wirkung einer konformen Feldtheorie invariant ist. Falls diese Symmetrie keine Anomalien aufweist, sollte die Quantentheorie diese respektieren. Dies bedeutet zum Beispiel, dass die 2-Punktsfunktion von 2 Materiefeldern,

$$\langle 0 | S_{\mu\nu\dots}^{(1)}(x_1) S_{\alpha\beta\dots}^{(2)}(x_2) | 0 \rangle \equiv G_{\mu\nu\dots, \alpha\beta\dots}^{(2)}(x_1, x_2) \quad (16a)$$

kovariant transformiert,

$$G_{\mu\nu\dots, \alpha\beta\dots}^{(2)}(x_1, x_2) = e^{\alpha_1 \phi(y_1)} e^{\alpha_2 \phi(y_2)} \frac{\partial x_1^\sigma}{\partial y_1^\mu} \frac{\partial x_1^\rho}{\partial y_1^\nu} \dots \frac{\partial x_2^\gamma}{\partial y_2^\alpha} \frac{\partial x_2^\delta}{\partial y_2^\beta} \dots G_{\sigma\rho\dots, \gamma\delta\dots}^{(2)}(y_1, y_2), \quad (16b)$$

wobei α_1 und α_2 die Weylgewichte von $S^{(1)}$ und $S^{(2)}$ bezeichnen. Die entsprechende infinitesimale Form dieser *Ward-Identität* lautet dann

$$\sum_i \left[L_{X(x_i)} - \frac{2\alpha_i}{d} \partial_\alpha X^\alpha(x_i) \right] G^{(2)}(x_1, x_2) = 0, \quad (16c)$$

und diese Differentialgleichung legt die 2-Punktsfunktion eindeutig fest, wie wir jetzt sehen werden.

Um die Rechnungen zu vereinfachen beschränken wir uns auf den Fall von Skalarfeldern $\Phi^{(1)}$ und $\Phi^{(2)}$, so dass sich (16c) vereinfacht zu

$$\sum_i \left[X^\mu(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i^\mu} + \frac{\Delta_i}{d} \partial X(x_i) \right] G^{(2)} = 0. \quad (17a)$$

Die Translations- und Lorentz-Wardidentitäten implizieren, wie gewohnt, dass die Greensfunktion nur vom Betrag des Abstandes zwischen den Punkten, $\xi = |x_2 - x_1|$, abhängt. Die Dilatations Wardidentität vereinfacht sich dann zu

$$\left(\xi \partial_\xi + (\Delta_1 + \Delta_2) \right) G^{(2)} = 0, \quad (17b)$$

mit der offensichtlichen Lösung

$$G^{(2)} = C_{12} |x_2 - x_1 - i\epsilon|^{-\Delta_1 - \Delta_2}. \quad (17c)$$

Mittels einer linearen Transformation der Observablen $\Phi^{(a)}$ kann man dann noch erreichen, dass die symmetrische Matrix C_{ab} zu δ_{ab} wird. Setzt man noch das zu den speziellen konformen Transformationen gehörende Killingfeld in (17a) ein, so findet man

$$(\Delta_1 - \Delta_2) G^{(2)} = 0. \quad (17d)$$

Alle konformen Wardidentitäten zusammen ergeben also

$$\langle 0 | \Phi^{(1)}(x_1) \Phi^{(2)}(x_2) | 0 \rangle = \begin{cases} 0 & \text{falls } \Delta_1 \neq \Delta_2; \\ |x_2 - x_1 - i\epsilon|^{-2\Delta} & \text{falls } \Delta_1 = \Delta_2 \equiv \Delta. \end{cases} \quad (18)$$

Wiederholt man diesselbe Rechnung für die 3 Punktsfunktion, so findet man mit genau denselben Argumenten

$$\langle 0 | \Phi^{(1)}(x_1) \Phi^{(2)}(x_2) \Phi^{(3)}(x_3) | 0 \rangle = C_{123} \xi_{12}^{\Delta_3 - \Delta_2 - \Delta_1} \xi_{23}^{\Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3} \xi_{31}^{\Delta_2 - \Delta_3 - \Delta_1}. \quad (19)$$

Wie nicht anders erwartet für konform invariante Theorien (diese haben z.B. keinen Masengap) sind die Korrelationen langreichweitig und haben ein typisches Potenzverhalten. Im Gegensatz zu den 2- und 3-Punktsfunktionen werden die höheren Korrelationsfunktionen durch die $SO(d, 2)$ -Wardidentitäten nicht mehr bestimmt, nur noch eingeschränkt. In 2 Dimensionen ist die konforme Gruppe allerdings sehr viel grösser und bestimmt auch die höheren Korrelationsfunktionen (zumindest für eine grosse Klasse von konform invarianten Modellen).

4. Der Energie-Impuls Tensor und die Virasoro Algebra

Wir haben bereits gesehen, dass jede klassisch konforme Feldtheorie einen spurlosen Energie-Impuls Tensor besitzt. Mit Hilfe dieses Tensors kann man nun $\frac{1}{2}(d+1)(d+2)$ erhaltene Noetherströme (die sogenannten *Bessel-Hagen Ströme*) explizit konstruieren: Zu jedem konformen Killingfeld definiert man den zugehörigen Strom gemäss

$$j_X^\mu = T^{\mu\nu} X_\nu, \quad (20)$$

und die so konstruierten Ströme sind divergenzfrei aufgrund der Erhaltung, Symmetrie und Spurlosigkeit von $T^{\mu\nu}$ sowie der konformen Killinggleichung (3):

$$\partial_\mu j_X^\mu = T^{\mu\nu} X_{\nu,\mu} = \frac{1}{2} T^{\mu\nu} (X_{\nu,\mu} + X_{\mu,\nu}) = \frac{1}{d} \eta_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \partial X = 0. \quad (21)$$

Zum Beispiel, die zu den Dilatationen gehörende Noetherstrom und erhaltene Ladung sind

$$j_D^\mu = T^{\mu\nu} x_\nu, \quad Q_D = \int T^{0\nu} x_\nu. \quad (22)$$

In 2 Dimensionen werden die zu den Killingfeldern (4) gehörenden 6 Ladungen um unendlich viele andere Ladungen erweitert (siehe unten). Die so entstehende unendlich-dimensionale Algebra, die sogenannte Virasoro Algebra, enthält dann diese 6 Ladungen als $so(2,2)$ Unteralgebra.

Während die bisherigen Resultate in beliebigen Dimensionen gelten, beschränken wir uns nun auf 2 Raumzeit Dimensionen, wo, wie schon mehrfach betont, die konforme Struktur reichhaltiger als in höheren Dimensionen ist. für $d=2$ ist es vorteilhaft Lichtkegel-Koordinaten einzuführen:

$$x^\pm = \frac{1}{2}(x^0 \pm x^1), \quad \partial_\pm = \partial_0 \pm \partial_1, \quad \eta_{+-} = \eta_{-+} = 2. \quad (23)$$

In diesen Koordinaten vereinfacht sich die konforme Killinggleichung (3) zu

$$\partial_+ X_+ = \partial_- X_- = 0, \quad (24)$$

und deshalb ist jedes Vektorfeld der Form $\{X^+, X^-\} = \{X^+(x^+), X^-(x^-)\}$ ein konformes Killingfeld. Als Basis für diese Killingfelder wählt man üblicherweise die Monome,

$$X^+(x^+) = a_n^+(x^+)^n, \quad X^-(x^-) = a_n^-(x^-)^n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (25a)$$

Speziell die Translationen, Lorentztransformationen, Dilatationen und speziellen konformen Transformationen werden nach (4) durch die konstanten, linearen und quadratischen Monome erzeugt:

$$\begin{array}{ll} 2 \text{ Transl.} & X^\pm = a^\pm \\ 1 \text{ Lorentztransf.} & X^\pm = \pm \omega x^\pm \\ 1 \text{ Dilatationen} & X^\pm = \alpha x^\pm \\ 2 \text{ spez. Transf.} & X^\pm = 4c^\pm (x^\pm)^2 \end{array} \quad (25b)$$

Diese 6 Killingfelder erzeugen die $SO(2, 2) \sim SL(2, R) \times SL(2, R)$ Gruppe von 'Möbius-Transformationen'

$$x^\pm \longrightarrow y^\pm = \frac{a^\pm x^\pm + b^\pm}{c^\pm x^\pm + d^\pm}, \quad \begin{pmatrix} a^\pm & b^\pm \\ c^\pm & d^\pm \end{pmatrix} \in SL(2, R). \quad (26)$$

Die Bedeutung von $T_\mu^\mu = 0$ ist in Lichtkegel-Koordinaten auch leicht einzusehen: In diesen Koordinaten ist

$$T_\mu^\mu = T_{+-}, \quad (27a)$$

und die Erhaltung des Energie-Impuls Tensors, $\partial_+ T^{+\pm} + \partial_- T^{-\pm} = 0$, impliziert dann, dass die restlichen Komponenten von $T_{\mu\nu}$ chiral sind:

$$T_{++} = T_{++}(x^+) \quad \text{und} \quad T_{--} = T_{--}(x^-). \quad (27b)$$

Mit den chiralen Komponenten des Energie-Impuls Tensors (27b) und der konformen Killingfelder (25a) sind nun auch die Bessel-Hagen Ströme chiral, $j_\pm(x^\pm) = T_{\pm\pm} X^\pm$, und die erhaltenen Ladungen zerfallen in chirale Terme

$$Q_X = \int T^{0\nu} X_\nu = \frac{1}{2} \int j_+(x^+) dx + \frac{1}{2} \int j_-(x^-) dx \equiv Q_X^+ + Q_X^-. \quad (28)$$

Da aber X^+ und X^- unabhängige Funktionen sind, müssen Q_X^+ und Q_X^- einzeln erhalten sein. Wählt man für X^\pm die Basis (25a), dann erzeugen die entsprechenden erhaltenen Ladungen Q_n^\pm die sogenannte Virasoro Algebra, wie wir später sehen werden.

Da die bisherigen Argumente und Resultate vorwiegend klassischer Natur waren, bleibt die Frage inwiefern sie die *Quantisierung* überleben. Diese Frage wurde vor etwa 15 Jahren von Lüscher und Mack (1974) beantwortet. Dabei startet man von einer Wightman Theorie, d.h. man postuliert einen Hilbertraum \mathcal{H} mit Vakuum $|0\rangle$ in dem die Poincare-Gruppe unitär durch Operatoren $U(\Lambda, a)$ implementiert ist. Weiterhin soll die Spektrumseigenschaft gelten, $P_0 \geq 0$ und $P^2 \geq 0$. Zu diesen üblichen Axiomen nimmt man zusätzlich an, dass die Dilatationen unitär implementiert sind

$$V(\lambda)\Phi(x)V(\lambda)^{-1} = \lambda^\Delta \Phi(\lambda x), \quad (28a)$$

und dass ein symmetrischer, erhaltener Energie-Impuls Tensor existiert (mit Gewicht $\Delta = 2$), welcher die Translationen erzeugt

$$\int dy [T_{0\mu}(y), \Phi(x)] = -i\partial_\mu \Phi(x). \quad (28b)$$

Mit beinahe denselben Argumenten wie im klassischen Fall zeigt man dann, dass (27) als Operatoridentität gilt, d.h. dass der Operator $T_{\mu\nu}$ spurlos ist und die verbleibenden Komponenten chiral sind.

Wir berechnen nun den Kommutator von $T \equiv T_{++}$: Da T nur von $x \equiv x^+$ abhängt, muss der Kommutator von $T(x)$ und $T(y)$ für $x \neq y$ verschwinden, und deshalb können wir annehmen

$$[T(x), T(y)] = \sum A_k(x) \delta^{(k)}(x - y)$$

$$A_k(x) = \frac{1}{k!} \int dy (y - x)^k [T(x), T(y)].$$

Da der Energie-Impuls Tensor Gewicht 2 hat, haben die A_k Gewicht $3 - k$, d.h.

$$V(\lambda)A_k(x)V(\lambda) = \lambda^{3-k}A_k(\lambda x),$$

und wegen (18) bestimmt dies die 2-Punkts Korrelationsfunktionen

$$\langle 0|A_k(x)A_k(y)|0 \rangle = \alpha_k(x - y - i\epsilon)^{2k-6}.$$

Mit dieser expliziten Form sieht man nun sofort, dass $\langle 0|A_k(\bar{f})A_k(f)|0 \rangle$ nicht positiv ist für $k > 3$, und deshalb müssen die A_k , $k > 3$, verschwinden. Von den verbleibenden Koeffizienten ist A_3 konstant da es Gewicht 0 hat. Wegen der Lokalität kommutiert es mit allen Feldern und ist deshalb ein Vielfaches der Identität:

$$A_3 = -\frac{ic}{24\pi} Id. \quad (29a)$$

Da $T(x)$ die Translationen erzeugt, gilt speziell

$$A_0 = \int dy [T(x), T(y)] = i\partial_x T(x), \quad (29b)$$

und deshalb

$$[T(x), T(y)] = -\frac{ic}{24\pi} \delta'''(x-y) + iA_1(x) \delta'(x-y) + i\partial_x T(x) \delta(x-y).$$

Um A_1 zu bestimmen benutzt man, dass mit der linken Seite auch die rechte Seite antisymmetrisch in x und y sein muss, und mit $A_1(y)\delta' = A_1(x)\delta' + \partial_x A_1(x)\delta$ findet man dann

$$\partial_x A_1 = 2\partial_x T.$$

Die Integrationskonstante muss verschwinden, da A_1 Gewicht $\Delta = 2$ hat, und damit schliessen wir

$$[T(x), T(y)] = i\partial_x T(x)\delta(x-y) + 2iT(x)\delta' - i\frac{c}{24\pi}\delta'''. \quad (30)$$

Der Kommutator von $T_{++}(x^+)$ schliesst also bis auf ein vielfaches der Identität. Der letzte Term ist die zentrale Erweiterung der Algebra des Energie-Impuls Tensors. Die Algebra (30) ist die sogenannte *Virasoro Algebra* und spielt eine zentrale Rolle in der Diskussion von 2-dimensionalen konformen Feldtheorien. Die Zahl c ist die zentrale Ladung und charakterisiert eine konforme Feldtheorie. Wir werden später eine physikalische Interpretation von c finden.

Als nächstes zeigen wir nun, dass c stets positiv sein muss: Wegen der Translations- und Dilatations-Invarianz ist $\langle 0|T|0 \rangle = 0$ und deshalb

$$\langle 0|[T(x), T(y)]|0 \rangle = -\frac{ic}{24\pi}\delta'''$$

Weiterhin hat T das Gewicht $\Delta = 2$ und damit eine 2-Punktsfunktion $\alpha(x - y - i\epsilon)^{-4}$. Aus der Darstellung

$$2\pi i\delta(x) = \frac{1}{x - i\epsilon} - \frac{1}{x + i\epsilon} \implies 2\pi i\delta'''(x) = \frac{6}{(x + i\epsilon)^4} - \frac{6}{(x - i\epsilon)^4}$$

folgt dann, dass $\alpha = c/8\pi^2$, oder dass die 2-Punktsfunktion im Impuls-Raum folgendermassen aussieht

$$\langle 0|T(x)T(y)|0 \rangle = \frac{c}{48\pi^2} \int dp p^3 e^{-ip(x-y)}.$$

Offensichtlich ist diese nur positiv für $c > 0$, was zu beweisen war.

Als Anwendung wollen wir nun die zentrale Ladung eines freien, masselosen und ungeladenen Skalarfeldes berechnen. Der Energie-Impulstensor

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (\nabla \Phi)^2 \quad (31a)$$

ist offensichtlich spurlos und für Lösungen der Feldgleichung, $\Phi(x) = \Phi_+(x^+) + \Phi_-(x^-)$, sind die verbleibenden Komponenten chiral,

$$T_{++} = (\partial_+ \Phi)^2, \quad T_{--} = (\partial_- \Phi_-)^2, \quad (31b)$$

wie es für eine konforme Feldtheorie sein muss. In der quantisierten Theorie müssen T_{++} und T_{--} reguliert werden (das Produkt von operatorwertigen Distributionen am selben Ort ist nicht definiert) und hier genügt es die auftretenden Produkte des Feldoperators normal zu ordnen. Unter Zuhilfenahme der bekannten 2-Punktsfunktion des Skalarfeldes,

$$\langle 0|\Phi_+(x^+)\Phi_+(y^+)|0 \rangle = -\frac{1}{4\pi} \log \mu(x^+ - y^+ - i\epsilon),$$

und der Wick-Regel, findet man leicht (wir unterdrücken die Indizes)

$$T(x)T(y) =: T(x)T(y) : -\frac{1}{\pi} \frac{1}{(x-y-i\epsilon)^2} : \partial_+ \Phi(x) \partial_+ \Phi(y) : + \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{(x-y-i\epsilon)^4}.$$

Zieht man davon den entsprechenden Ausdruck mit x und y vertauscht ab, dann erhält man den Kommutator

$$[T(x), T(y)] = iT'(x)\delta + 2iT(x)\delta' - \frac{i}{24\pi}\delta''', \quad (31c)$$

und der Vergleich mit (30) zeigt, dass ein ungeladenes Skalarfeld zentrale Ladung $c = 1$ hat.

Die Bedeutung der zentralen Ladung:

In 2 Dimensionen vereinfachen sich die durch den Energie-Impuls Tensor erzeugten Transformationen von Tensorfeldern (10) unter konformen Koordinatenänderungen gemäss

$$\delta_X S = i \int dy^+ X(y^+) [T_{++}(y^+), S(x)] = \Delta \partial_+ X(x^+) S + X(x^+) \partial_+ S. \quad (32)$$

Ein derart transformierendes Materiefeld wird in der konformen Feldtheorie als *primäres Feld* mit konformen Gewicht Δ bezeichnet (wobei, wie wir früher gesehen haben, $\Delta = s - 2\alpha$ ist). Benutzen wir den expliziten Kommutator des Energie-Impuls Tensors (30) so stellt sich heraus, dass T selbst nicht primär ist

$$\delta_X T = i \int X(y^+) [T(y), T(x)] = 2\partial_+ X T + X \partial_+ T - \frac{c}{24\pi} X'''. \quad (33)$$

Der anomale Term $\sim cX'''$ verschwindet nur für konstante, lineare und quadratische Killingfelder, d.h. T transformiert tensoriell nur bezüglich der $SL(2, R) \times SL(2, R)$ Möbius Untergruppe der konformen Transformationen. Wie wir nun sehen werden, ist dieser anomale Term ein Resultat der Spuranomalie, d.h. eine unvermeidliche Konsequenz der Tatsache, dass jede Regularisierung entweder die Koordinaten- oder die Weylinvarianz verletzt.

Um dies einzusehen, koppeln wir das Materiefeld wieder an die Gravitation und wählen isotherme Koordinaten, $\{x^0, x^1\}$, so dass

$$g_{\mu\nu} = e^{\phi(x)} \eta_{\mu\nu}, \quad ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 4e^\phi dx^+ dx^-, \quad (34a)$$

und die nicht-verschwindenden Christoffel-Symbole sind dann

$$\Gamma_{++}^+ = \partial_+ \phi, \quad \Gamma_{--}^- = \partial_- \phi. \quad (34b)$$

Quantisiert man nun eine konforme Feldtheorie im äusseren Gravitationsfeld so bleibt als Regularisierungseffekt eine nicht-verschwindende Spur des Energie-Impuls Tensors $T_{\mu\nu}$ übrig. Diese *Spuranomalie* muss offensichtlich die Massendimension 2 haben, ein (lokaler) Skalar sein und im flachen Raum verschwinden. Der einzige Skalar mit dieser Eigenschaft ist der Ricci-Skalar R , und deshalb

$$g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}[g, x] = \frac{1}{4} e^{-\phi} T_{+-} = \frac{c}{24\pi} R, \quad R = -e^{-\phi} \partial_+ \partial_- \phi, \quad (34c)$$

wobei die Konstante c von der konformen Feldtheorie abhängt. Schreibt man die Erhaltung $\nabla_\mu T^{\mu\nu}$ in isothermen Lichtkegelkoordinaten und benutzt (34c), so findet man

$$\begin{aligned}\partial_- \left(T_{++}[g, x] + \frac{c}{12\pi} e^{\phi/2} \partial_+^2 e^{-\phi/2} \right) &= 0 \\ \partial_+ \left(T_{++}[g, x] + \frac{c}{12\pi} e^{\phi/2} \partial_-^2 e^{-\phi/2} \right) &= 0.\end{aligned}\tag{34d}$$

Integriert man diese Differentialgleichungen, so erhält man

$$T_{\pm\pm}[g, x] = -\frac{c}{12\pi} e^{\phi/2} \partial_\pm^2 e^{-\phi/2} + T_{\pm\pm}[\eta, x^\pm].\tag{34e}$$

Da für $\phi = 0$, d.h. für $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, die jeweils ersten Terme auf den rechten Seiten verschwinden, müssen die Integrations-'Konstanten' $T_{++}[\eta, x^+]$ und $T_{--}[\eta, x^-]$ offensichtlich als Komponenten des Energie-Impuls Tensors im *Minkowski-Raum* interpretiert werden. Benutzen wir schlussendlich, dass der vollständige Tensor $T_{\mu\nu}[g, x]$ unter Koordinatentransformationen

$$x^\pm \longrightarrow y^\pm(x^\pm), \quad ds^2 = 4e^{\phi(x)} dx^+ dx^- = 4e^{\tilde{\phi}(y)} dy^+ dy^-, \quad e^{\tilde{\phi}(y)} = e^{\phi(x)} \frac{dx^+}{dy^+} \frac{dx^-}{dy^-}\tag{34f}$$

kovariant transformiert,

$$T_{++}[\phi(x), x^+] = \left(\frac{dy^+}{dx^+} \right)^2 \tilde{T}[\tilde{\phi}(y), y^+],\tag{34g}$$

dann findet man für den Tensor im Minkowski Raum das Transformationsgesetz

$$\tilde{T}_{++}[\eta, y^+] = \left(\frac{dx^+}{dy^+} \right)^2 T[\eta, x^+] - \frac{c}{24\pi} \{x^+, y^+\}, \quad \{x, y\} \equiv \frac{x_{,yyy}}{x_{,y}} - \frac{3}{2} \left(\frac{x_{,yy}}{x_{,y}} \right)^2,\tag{34h}$$

und entsprechend für $T_{--}[\eta, x^-]$. Der letzte Term ist die Schwartzsche Ableitung. Diese verschwindet gerade für die speziellen konformen Transformationen (26). Wir sehen also, dass die Untergruppe der Möbius-Transformationen keine Anomalien aufweisen. für infinitesimale konforme Transformationen reduziert sich (34h) auf (33) und deshalb ist c gerade die zentrale Ladung der Virasoro Algebra (30).

5. Bemerkungen zu den Darstellungen der Virasoro Algebra

Da die Möbiustransformation (26) anomaliefrei sind, gelten für sie weiterhin die anomaliefreien Ward-Identitäten (16b,c). Speziell die n-Punktsfunktionen von $T_{++} \equiv T$ ($\Delta = 2$) erfüllen

$$G_n(y_1, \dots, y_n) = \prod_{j=1}^n (cx_j + b)^{-4} G_n(x_1, \dots, x_n), \quad \text{da} \quad \frac{dy}{dx} = (cx + b)^{-2},\tag{35a}$$

(wobei wiederum $x_j^+ = x_j$ ist) beziehungsweise

$$\sum_{j=1}^n \left(x_j^k \partial_{x_j} + 2k x_j^{k-1} \right) G_n(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad k = 0, 1, 2. \quad (35b)$$

Offensichtlich sind die $SL(2, R)$ -Transformationen (35a) singular für gewisse $x \in R$. Um diese zu regularisieren kompaktifiziert man R zu $R \cup \infty \sim S^1$ mittels der stereographischen Projektion

$$R \ni x \longrightarrow z \in S^1, \quad \text{wobei} \quad z = -ie^{i\tau}, \quad x = \tan \frac{\tau}{2}. \quad (36a)$$

Man kann nun zeigen [Lüscher und Mack, 1975], dass der Energie-Impuls Tensor zu einer operatorwertigen Distribution auf S^1 'hochgehoben' werden kann,

$$T(x) \longrightarrow \tilde{T}(z) = (\cos \frac{\tau}{2})^{-4} T(\tan \frac{\tau}{2}), \quad (36b)$$

so dass

$$\tilde{G}_n(z_1, \dots, z_n) = \langle 0 | \tilde{T}(z_1) \cdots \tilde{T}(z_n) | 0 \rangle \quad (36c)$$

kovariant bezüglich der jetzt regulär wirkenden $SL(2, R)$ transformiert. Die Algebra (30) wird nun zu

$$[\tilde{T}(z), \tilde{T}(w)] = \frac{2ic}{3\pi} \left(\delta'''(\tau - \sigma) + \delta'(\tau - \sigma) \right) + 4i \left(\tilde{T}(w) \partial_\tau - \partial_\sigma \tilde{T}(w) \right) \delta(\tau - \sigma). \quad (37a)$$

für die Entwicklungs-Koeffizienten von $\tilde{T}(z)$

$$L_n = \frac{i}{4} \oint_{S^1} dz z^{-n-1} \tilde{T}(z), \quad L_n^\dagger = L_{-n}, \quad (37b)$$

ist die entsprechende Algebra die *Virasoro-Algebra*

$$[L_n, L_m] = (n - m) L_{n+m} + \frac{c}{12} (n^3 - n) \delta_{n+m}, \quad (37c)$$

und analog für die Entwicklungskoeffizienten \bar{L}_n der Komponente T_{--} des Energie-Impuls Tensors. Wiederum sehen wir, dass die Erzeugenden der Poincare Transformationen, Dilatationen und speziellen konformen Transformationen (der globalen konformen Transformationen) L_0, L_1 und L_{-1} eine anomlifreie $sl(2, R)$ Unter algebra der Virasoro Algebra erzeugen. Zur Diskussion der Darstellungen der Energie-Impuls Algebra eignet sich die Form (37c) besonders. In einer Fockraum-Darstellung für welche die Energie $L_0 + \bar{L}_0$ nach unten beschränkt ist existiert dann ein Zustand $|\Delta\rangle$ mit niedrigsten L_0 -Gewicht Δ :

$$L_0 |\Delta\rangle = \Delta |\Delta\rangle, \quad L_n |\Delta\rangle = 0, \quad n > 0. \quad (38a)$$

Der Fockraum wird dann aufgespannt von den Vektoren

$$\psi_N = L_{-1}^{n_1} L_{-2}^{n_2} \cdots |\Delta\rangle, \quad \sum_j n_j = N \Rightarrow L_0 \psi_N = (\Delta + N) \psi_N. \quad (38b)$$

Benutzt man die Virasoro Algebra, so findet man z.B. für das Quadrat der Norm der Zustände $L_n|\Delta\rangle$

$$\|L_n|\Delta\rangle\|^2 = \langle \Delta|[L_n, L_{-n}]|\Delta\rangle = (2n\Delta + \frac{c}{12}n(n^2 - 1))\|\Delta\rangle\|^2, \quad (39)$$

und Positivität für $n = 1$ impliziert $\Delta \geq 0$ und Positivität für $n \rightarrow \infty$ impliziert $c \geq 0$, was ja schon aus der Positivität der 2-Punktsfunktion des Energie-Impuls Tensors folgte. Die Untersuchung der Positivität im gesamten Fockraumes vereinfacht sich wenn man berücksichtigt dass ψ_N und ψ_M orthogonal sind für $N \neq M$. Deshalb zerfällt die (unendliche) Normmatrix $\langle \psi_N|\psi_M\rangle$ in endliche Normmatrizen für die endlich-dimensionalen Unterräume mit festem L_0 -Eigenwert $\Delta + N$. Die Positivität dieser Unterräumen wurde von Friedan, Qiu und Shenker (1974) vollständig analysiert mit dem Resultat, dass \mathcal{H} positiv ist, falls entweder $c \geq 1$ ist, oder falls $0 < c < 1$ ist, wenn c einer der folgenden rationalen Werte annimmt:

$$c = 1 - \frac{6}{n(n+1)}, \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (40a).$$

für gegebenes n sind nur folgende höchsten Gewichte Δ erlaubt:

$$\Delta = \frac{[(n+1)p - nq]^2 - 1}{4n(n+1)}, \quad p = 1, 2, \dots, n-1, \quad q = 1, 2, \dots, p. \quad (40b)$$

Die Theorien mit $c < 1$ werden oft auch minimale konforme Modelle genannt. Diese minimalen Modelle konnten inzwischen alle mit Gittermodellen am kritischen Punkt identifiziert werden.

6. Einfluss von Rändern

Konforme Feldtheorien haben keine intrinsische Längenskalen und sind deshalb sehr empfindlich auf Änderungen von extrinsischen Skalen, z.B. der Krümmung der Raum-Zeit oder der Anwesenheit von Rändern. Zum Beispiel erwarten wir für die freie Energie (effektive Wirkung) Γ folgendes Verhalten für grosse Volumen V :

$$\Gamma \sim A \cdot V + B \cdot \partial V + O(\log(\partial V)), \quad (41)$$

wobei ∂V die Länge des Randes ∂V von V bezeichnet. Im Gegensatz zu den ersten beiden Termen ist der $\log(\partial V)$ universell und sollte nicht von den Details der Theorie abhängen. In der Tat, wir werden sehen dass dieser Term proportional zur zentralen Ladung c der zugrundeliegenden konformen Feldtheorie ist. Die ersten beiden Terme hängen vom Regularisierungs/Renormierungs Verfahren ab (sie verschwinden z.B. in der Zeta-Funktions Regularisierung) und werden uns hier nicht weiter interessieren.

Als Ausgangspunkt für die folgende Betrachtungen (Affleck 1986, Blöte, Cardy, Nightingale 1986) eignet sich die effektive Wirkung

$$\Gamma = \log Z, \quad Z = - \int D\Phi e^{-S[\Phi]}, \quad (42)$$

welche in vielerlei Hinsicht die Rolle der klassischen Wirkung S in der quantisierten Theorie übernimmt. Zum Beispiel folgt aus der Definition des klassischen Energie-Impuls Tensors $T_{\mu\nu}^{cl}$ in (12a), dass

$$\frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta\Gamma}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\int D\Phi T_{\mu\nu}^{cl} e^{-S}}{Z} = \langle 0|T_{\mu\nu}|0 \rangle, \quad (43)$$

d.h. dass der Vakuumserwartungswert des Energie-Impuls Tensors (oder auch höhere Korrelationsfunktionen von $T_{\mu\nu}$) durch ableiten nach der Metrik gewonnen werden kann. Nun erinnern uns wir uns daran (siehe 34c), dass aufgrund der Weylanomalie die Spur des Energie-Impuls Tensors proportional zum Ricci-Skalar ist und im allgemeinen nicht verschwindet. Wie in (12b) findet man in isothermen Koordinaten

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi} = -\frac{1}{2}\sqrt{g}T^\mu_\mu = \frac{c}{48\pi}e^\phi\nabla^2\phi = \frac{c}{48\pi}\nabla_0^2\phi, \quad (44a)$$

wobei ∇_0^2 der d'Alembert Operator im Minkowski Raum bezeichnet und $R = -\nabla^2\phi$ benutzt wurde. Die Anomaliegleichung (44a) kann nun integriert werden mit dem Resultat

$$\Gamma = \frac{c}{96\pi} \int (\nabla_0\phi)^2 + \text{Randterme}. \quad (44b)$$

Eine genauere Betrachtung (mittels Zeta-Funktions Regularisierung unter Berücksichtigung der Ränder) liefert

$$\begin{aligned} \Gamma[\phi] - \Gamma[\phi = 0] &= -\frac{ic}{48\pi} \int_M \partial\phi\bar{\partial}\phi dzd\bar{z} \\ &+ \frac{ic}{24\pi} \oint_{\partial M} \frac{d}{d\sigma} \log \frac{z'}{\bar{z}'} + i \cdot \text{const} \int \partial\bar{\partial}\phi, \end{aligned} \quad (44c)$$

wobei aus technischen Gründen eine Wickrotation ins Euklidische durchgeführt wurde, und $z = x^0 + ix^1$ bzw. $\bar{z} = x^0 - ix^1$ die euklidischen Koordinaten bezeichnen. Weiterhin ist z' die Ableitung der Randkurve $z(\sigma)$ nach dem Kurvenparameter σ . Die relative Normierung der ersten beiden Terme auf der rechten Seite ist fixiert durch die allgemeine Koordinaten-Invarianz. Die Konstante im letzten Term hängt von den gewählten Randbedingungen an das Feld Φ ab. Mit diesem exakten Resultat können wir nun das Verhalten von $\Gamma[0]$ unter konformen Koordinatentransformationen (siehe 34f)

$$z \longrightarrow w(z), \quad \tilde{\phi}(w, \bar{w}) = \phi(z(w), \bar{z}(\bar{w})) + \log \left(\frac{dz}{dw} \frac{d\bar{z}}{d\bar{w}} \right) \quad (45)$$

finden. Da einerseits die vollständige effektive Wirkung $\Gamma[\phi]$ invariant unter Diffeomorphismen, und deshalb speziell unter den Transformationen (45), ist, andernseits die rechte Seite von (44c) nicht invariant unter (45) ist, schliesst man, dass $\Gamma[0]$ nicht invariant sein kann. Die explizite Rechnung gibt

$$\Gamma_z[\phi = 0] - \Gamma_w[\phi = 0] = -\frac{ic}{48\pi} \int |\partial_w \log z_w|^2 + \frac{ic}{48\pi} \oint \log z_w \bar{z}_{\bar{w}} \frac{d}{d\sigma} \log \frac{w'}{\bar{w}'}, \quad (46)$$

für die Änderung der effektive Wirkung im Minkowski Raum (ϕ wurde Null gesetzt!) unter Koordinatenänderungen (45) unter Beibehaltung der Minkowski Metrik (d.h. ϕ wird nicht mittransformiert). Streckt man z.B. das Gebiet M , $z = \lambda w$, so findet man

$$\Gamma_{\lambda w}[0] - \Gamma_w[0] = \frac{ic}{48\pi} \log \lambda^2 \oint \frac{d}{d\sigma} \log \frac{w'}{\bar{w}'} = -\frac{c}{6} \log \lambda \cdot \chi, \quad (47a)$$

wobei χ die Eulerzahl der Raumzeit M ist,

$$\chi = -\text{Anzahl Ränder} - 2 \cdot (\text{AnzahlHenkel}). \quad (47b)$$

Dies zeigt aposteriori, dass der $O(\log(\partial V))$ Term in (41) in der Tat universell ist und nur von der Topologie von M und der zentralen Ladung c abhängt (das c in der Tat die zentrale Ladung ist, haben wir schon mit (34) bewiesen). Die Resultate (46) und (47a) zeigen, dass die Änderung der freien Energie, wenn man die Grösse des Gebietes M ändert, proportional zu c ist. Dies liefert eine operative Methode zur 'experimentellen' Bestimmung von c über den Casimireffekt.

Üblicherweise wird c über das Verhalten der 2-Punktsfunktion des Energie-Impuls Tensors bei sehr kleinen Abständen definiert. Andernseits bedeutet (47a), dass c auch durch das Verhalten der Theorie bei grossen Abständen (grossen Volumen) bestimmt wird. Dass c in der Tat Ultraviolett- und Infrarot-Eigenschaften einer konformen Feldtheorie verbindet kann wie folgt direkt eingesehen werden:

Zuerst schreibt man die effektive Wirkung (44b) in invarianter Form, d.h. man löst sich von der Beschränkung auf isotherme Koordinaten. Mit dem Ausdruck (34c) für den Ricci-Skalar in isothermen Koordinaten sieht man sofort ein, dass diese Wirkung folgende (nicht-lokale) Form hat:

$$\Gamma = \frac{c}{96\pi} \int \sqrt{g} R \frac{1}{\nabla^2} R + \text{Randterme}. \quad (48)$$

Nun kann man den Vakuums-Erwartungswert des Energie-Impuls Tensors gemäss (42) berechnen und findet

$$\begin{aligned} \langle 0|T_{\mu\nu}|0 \rangle &= \frac{c}{24\pi} \left(g^{\mu\nu} R - \nabla^\mu \nabla^\nu \frac{1}{\nabla^2} R \right) \\ &\quad - \frac{c}{48\pi} \left(\nabla^\mu \frac{1}{\nabla^2} R \cdot \nabla^\nu \frac{1}{\nabla^2} R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial^\alpha \frac{1}{\nabla^2} R \cdot \partial_\alpha \frac{1}{\nabla^2} R \right). \end{aligned} \quad (49)$$

Leitet man ein weiteres mal nach $g^{\alpha\beta}$ ab und setzt $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, so erhält man

$$\langle 0|T^{\alpha\beta}[\eta]T^{\mu\nu}[\eta]|0\rangle = \frac{c}{12\pi}\partial_{x_\mu}\partial_{x_\nu}\partial_{y_\alpha}\partial_{y_\beta}G(x,y), \quad (50a)$$

wobei

$$G(x,y) = \langle x|\frac{1}{\nabla_0^2}|0\rangle \sim \frac{1}{4\pi}\log|x-y|^2 \quad \text{für } x \rightarrow y. \quad (50b)$$

Setzt man (50b) in (50a) ein, so erhalten wir als einzige nicht verschwindende 2-Punktsfunktionen

$$\begin{aligned} \langle T_{++}(z)T_{++}(w)\rangle &\sim -\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{c}{2}(z-w)^{-4} \\ \langle T_{--}(z)T_{--}(w)\rangle &\sim -\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{c}{2}(\bar{z}-\bar{w})^{-4}, \end{aligned} \quad (51)$$

was beweist, dass c nicht nur das Verhalten im Infraroten bestimmt, sondern auch die 'short distance' Singularität der 2-Punktsfunktion des Energie-Impuls Tensors.

Mit diesem schönen Resultat möchte ich den aus Zeitgründen kurz ausgefallenen Spaziergang durch das Gebäude der konformen Feldtheorien beenden. Viele interessante Resultate und Anwendungen mussten hier weggelassen werden. Den interessierten Zuhörer verweise ich auf die ausführlichen Les Houches Lecture notes von Ginsparg (1988), welche auch eine erschöpfendere Literaturliste enthalten. Insbesondere wurde in diesem Überblick über konforme Feldtheorien interessantere konforme Modelle wie zum Beispiel die Wess-Zumino-Witten Modelle und ihre Kac-Moody Algebren oder die Toda Theorien und ihre nicht-linearen \mathcal{W} -Algebren nicht behandelt. Wer sich für dieses weiterführenden Gebiete interessiert empfehle ich den exzellenten Review Artikel von Goddard und Olive (1986) und den Artikel von Gervais (1988). Auch über die interessante Beziehung zwischen den unendlich-dimensionalen Kac-Moody Algebren und \mathcal{W} -Algebren wurde hier nichts gesagt. Wiederum verweise ich auf die Literatur (Balog et. al 1990).

References:

- E. Cunningham (1909), The principle of relativity in electrodynamics and an extension thereof, *London Math. Society* **8**, 77
- M. Green, J. Schwarz und E. Witten (1987), Superstring Theory, *Cambridge University Press*.
- J.L. Cardy (1987), Conformal Invariance, in Domb und Lebowitz, *Phase Transitions*, **Vol. 11**, *Academic Press*
- J. Fröhlich und T. Kerler, *preprint* ETH-TH/90-26
- A.A. Belavin, A.M. Polyakov und A.B. Zamolodchikov (1984), *J. Stat. Phys* **34**, 763, und *Nucl Phys.* **B241**, 333.

- D. Friedan, Z. Qiu und S. Shenker (1984), Conformal Invariance, unitarity and critical exponents in two dimensions, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1575.
- M. Lüscher und G. Mack (1975), Global conformal invariance in quantum field theory, *Comm. Math. Phys.* **41**, 203.
- G. Mack und A. Salam (1969), Finite-component field representations of the conformal group, *Ann. Phys.* **53**, 174.
- C.G. Callan, S. Coleman und R. Jackiw (1970), A new improved energy- momentum tensor, *Ann. Phys.* **59**, 42.
- N.D. Birrell und P.C.W. Davies (1982), Quantum fields in curved space, *Cambridge University press*.
- M. Lüscher und G. Mack (1976), The energy momentum tensor of critical quantum field theories in 1+1 dimensions, *Hamburg*
- I. Affleck (1986), Universal term in the free energy at a critical point and the conformal anomaly, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 746.
- H. W. Blöte, J.L. Cardy und M.P. Nightingale (1986), Conformal invariance, the central charge, and universal finite-size amplitudes at criticality, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 742.
- P. Ginsparg (1988), Applied conformal field theory, *Les Houches, Session XLIX*.
- P. Goddard und D. Olive (1986), Kac-Moody and Virasoro algebras in relation to quantum physics, *Int. J. Mod. Phys.* **A1**, 303.
- J.L Gervais (1988) *Nucl. Phys.* **B** (Proc. Suppl.) **5B** (1988) 119.
- J. Balog, L. Feher, P. Forgacs, L. O’Raifeartaigh und A. Wipf, *Ann. Phys.* **203** (1990) 76 und *Phys. Lett.* **B244** (1990) 435.