

Kapitel 7

Der harmonische Oszillator

Das Einzige was Sie rechnen können, ist ein Kastenpotential, der Tunneleffekt, das Wasserstoffatom und vor allem der harmonische Oszillator. Wenn Sie so einen haben, freuen Sie sich. Wenn nicht, nähern Sie so lange, bis Sie einen haben.

aus: Die besten Sprüche von Professoren

In diesem Kapitel werden wir das nach dem freien Teilchen einfachste physikalische System, den *harmonischen Oszillator*, untersuchen. Ein gutes Verständnis des quantisierten Oszillators ist unabdingbar bei der Untersuchung von komplizierteren Quantensystemen. Viele Näherungen in der Festkörperphysik, Quantenfeldtheorie usw. beruhen in tiefster Ordnung auf der Lösung für den harmonischen Oszillator. Die Maxwellgleichungen im Vakuum führen nach einer Fouriertransformation auf ein System von unendlich vielen ungekoppelten harmonischen Oszillatoren.

Wir werden die Schrödingergleichung für den 3-dimensionalen Oszillator mit Masse m und Federkonstanten $m\omega_j^2$, $j = 1, 2, 3$, und Hamilton-Operator

$$H = \sum_{j=1}^3 H_j(p_j, x^j), \quad \text{mit} \quad H_j(p, x) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{m}{2}\omega_j^2 x^2 \quad (7.1)$$

untersuchen. H ist zeitunabhängig und wir dürfen die Zeitabhängigkeit der Wellenfunktionen abspalten,

$$\psi(t, \mathbf{x}) = e^{-iEt/\hbar}\psi(\mathbf{x}). \quad (7.2)$$

Die zeitunabhängige Funktion $\psi(\mathbf{x})$ erfüllt die *stationäre* Schrödingergleichung

$$E\psi(\mathbf{x}) = H\psi(\mathbf{x}) = \sum_j H_j(p_j, x^j)\psi(\mathbf{x}) \quad (7.3)$$

mit Energie E . Bei der Lösung dieser *Eigenwertgleichung* fordern wir, dass $\psi(\mathbf{x})$ quadratintegrierbar ist. Nur quadratintegrierbare ψ beschreiben gebundene Zustände.

Der Hamiltonoperator ist die Summe von drei kommutierenden eindimensionalen Operatoren. Diese können gleichzeitig diagonalisiert werden. Es folgt, dass die Eigenfunktionen faktorisieren $\psi(\mathbf{x}) = \psi_1(x^1)\psi_2(x^2)\psi_3(x^3)$. Deshalb genügt es, die stationäre Schrödingergleichung für den *eindimensionalen* harmonischen Oszillator,

$$E\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + \frac{m\omega^2}{2}x^2\psi(x),$$

zu lösen. Dies wird uns im nächsten Abschnitt mit algebraischen Methoden gelingen.

Aus Masse und Kreisfrequenz des Oszillators sowie der Naturkonstanten \hbar kann man eine Länge bilden,

$$\alpha = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}. \quad (7.4)$$

Misst man die Masse in Kilogramm und die Kreisfrequenz in Sekunden, dann ergibt sich

$$\alpha[\text{m}] \approx 10^{-17}(m\omega)^{-1/2}. \quad (7.5)$$

Selbst für makroskopische Oszillatoren ist α mikroskopisch klein.

7.1 Auf- und Absteigeoperatoren

Um fortzufahren, ist es hilfreich, den dimensionslosen *Absteigeoperator* a und sein Adjungiertes, den *Aufsteigeoperator* a^\dagger , einzuführen:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{\alpha} + \frac{i\alpha p}{\hbar} \right), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{\alpha} - \frac{i\alpha p}{\hbar} \right). \quad (7.6)$$

Oft nennt man a auch *Vernichtungsoperator* und a^\dagger *Erzeugungsoperator*. Die Namen für diese Operatoren werden im Verlauf der folgenden Untersuchungen einen Sinn erhalten. Da Orts- und Impulsoperator nicht kommutieren, $[x, p] = i\hbar$, kommutieren auch Absteige-

und Aufsteigeoperator nicht:

$$[a, a^\dagger] = \left[\alpha x + i \frac{p}{2\hbar\alpha}, \alpha x - i \frac{p}{2\hbar\alpha} \right] = \frac{1}{2\hbar} (-i[x, p] + i[p, x]) = 1.$$

Natürlich vertauschen a und a^\dagger mit sich selbst. Wir fassen die wichtigen Vertauschungsrelationen für Absteige- und Aufsteigeoperator zusammen,

$$[a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0 \quad , \quad [a, a^\dagger] = 1. \quad (7.7)$$

Da weiterhin

$$\begin{aligned} a^\dagger a &= \left(\alpha x - \frac{ip}{2\hbar\alpha} \right) \left(\alpha x + \frac{ip}{2\hbar\alpha} \right) = \alpha^2 x^2 + \frac{p^2}{(2\hbar\alpha)^2} + \frac{i}{2\hbar} [x, p] \\ &= \frac{m\omega}{2\hbar} x^2 + \frac{1}{2m\omega\hbar} p^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

gilt, kann der Hamilton-Operator durch $a^\dagger a$ ausgedrückt werden

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \equiv \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2} \right). \quad (7.8)$$

Der Operator $N = a^\dagger a$ heißt *Besetzungszahloperator*. Offensichtlich ist er hermitisch und nicht-negativ,

$$0 \leq \langle a\psi | a\psi \rangle = \langle \psi | N | \psi \rangle.$$

Im folgenden werden wir die Eigenwerte und Eigenfunktionen von N , und damit auch von H , mit algebraischen Methoden bestimmen.

7.1.1 Energien und Eigenfunktionen

Wir wollen das Spektrum (die möglichen Eigenwerte E_n von H) nur mit Hilfe der algebraischen Beziehungen (7.7) und (7.8) finden, ohne dabei die spezielle Darstellung (7.6) zu benutzen. Löst man sich nämlich von dieser Darstellung, dann kann man die folgenden Resultate zum Beispiel auf die Erzeugung und Vernichtung von *Phononen* oder *Photonen* übertragen.

Der Zustand mit kleinster Energie, der *Grundzustand* des harmonischen Oszillators, muß offensichtlich minimales N haben. Nehmen wir nun an $|n\rangle$ sei Eigenzustand des hermiteschen und nicht-negativen Operators N ,

$$N|n\rangle = a_n|n\rangle, \quad \text{wobei } a_n \geq 0 \text{ sein muß.}$$

Die Eigenwerte des Besetzungszahloperators N nennt man Besetzungszahlen. Also hat $|n\rangle$ die Besetzungszahl a_n . Wegen

$$\begin{aligned} [N, a^\dagger] &= a^\dagger a a^\dagger - a^\dagger a^\dagger a = a^\dagger [a, a^\dagger] = a^\dagger \\ [N, a] &= a^\dagger a a - a a^\dagger a = [a^\dagger, a] a = -a \end{aligned} \quad (7.9)$$

haben $a^\dagger|n\rangle$ und $a|n\rangle$ die Besetzungszahlen $a_n + 1$ und $a_n - 1$:

$$\begin{aligned} N a^\dagger|n\rangle &= a^\dagger(N + 1)|n\rangle = (a_n + 1)a^\dagger|n\rangle \\ N a|n\rangle &= a(N - 1)|n\rangle = (a_n - 1)a|n\rangle. \end{aligned}$$

a^\dagger erhöht und a erniedrigt die Besetzungszahl um Eins. Entsprechend findet man, dass $a^{\dagger p}$ die Besetzungszahl um p erhöht und a^p sie um p erniedrigt.

Wir wollen zuerst die Frage nach dem kleinsten Eigenwert von N beantworten. Wegen

$$\langle a n | a n \rangle = \langle n | N | n \rangle = a_n \langle n | n \rangle$$

ist für $a_n \neq 0$ mit $|n\rangle$ auch $a|n\rangle$ ungleich dem Nullvektor. Deshalb ist mit $a_n \neq 0$ auch $a_n - 1$ Eigenwert von N . Da die Eigenwerte von N aber nicht negativ sind, muß $a_n \in \mathbb{N}_0$ gelten und deshalb ist der kleinste Eigenwert von N gleich 0 ist. Der entsprechende Eigenvektor $|0\rangle$ wird von a annihilert,

$$N|0\rangle = 0 \iff a|0\rangle = 0. \quad (7.10)$$

Damit wäre gezeigt, dass $|n\rangle \sim a^{\dagger n}|0\rangle$ der Eigenzustand von N mit Besetzungszahl $a_n = n$ ist. Die Eigenwerte von N sind also die natürlichen Zahlen \mathbb{N}_0 .

Es habe nun $|n - 1\rangle$ die Norm 1. Wir wollen den Koeffizienten β in $|n\rangle = \beta a^\dagger|n - 1\rangle$ so bestimmen, dass auch $|n\rangle$ auf Eins normiert ist:

$$\begin{aligned} 1 &\stackrel{!}{=} \langle n | n \rangle = |\beta|^2 \langle n - 1 | a a^\dagger | n - 1 \rangle \\ &= |\beta|^2 \langle n - 1 | (N + 1) | n - 1 \rangle = n |\beta|^2. \end{aligned}$$

Ist der Grundzustand $|0\rangle$ auf Eins normiert, dann sind die angeregten Zustände

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} a^\dagger |n - 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} a^{\dagger 2} |n - 2\rangle = \dots = \frac{1}{\sqrt{n!}} a^{\dagger n} |0\rangle \quad (7.11)$$

ebenfalls auf Eins normiert. Insbesondere sind die Eigenwerte $n = 0, 1, 2, \dots$ von N *nach oben unbeschränkt*. Diese Eigenwerte können *nicht entartet* sein. Wäre n nämlich entartet,

so gäbe es mindestens zwei unabhängige Zustände

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} a^{\dagger n} |0\rangle \quad \text{und} \quad |\tilde{n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} a^{\dagger n} |\tilde{0}\rangle,$$

die aus zwei verschiedenen Zuständen mit Besetzungszahl 0 durch n -malige Wirkung des Erzeugungsoperators gewonnen würden. Wir haben aber bereits gezeigt, dass

$$a|0\rangle = 0 \quad \text{und} \quad a|\tilde{0}\rangle = 0$$

gelten muß. Wir werden unten beweisen, dass es nur *einen* Zustand $|0\rangle$ gibt, der von a annihilert wird. Also sind die Eigenwerte von N nicht entartet. Wir fassen zusammen:

- Die Eigenwerte von N sind $\{0, 1, 2, \dots\}$ und sie sind nicht entartet. Die zugehörigen orthonormierten Eigenfunktionen können nach (7.11) durch mehrfaches Anwenden von a^\dagger auf den Zustand $|0\rangle$ mit Besetzungszahl 0 erzeugt werden.

Mit dem Spektrum des Besetzungszahloperators kennen wir mit (7.8) auch die Energieeigenwerte

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle \quad , \quad E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (7.12)$$

Die Operatoren a^\dagger und a erhöhen und erniedrigen die Energie um je eine Einheit $\hbar\omega$. Das Spektrum des harmonischen Oszillators ist äquidistant und a^\dagger steigt im Spektrum auf und a steigt ab.

Zur expliziten Konstruktion der Eigenfunktion im Ortsraum, $\psi_n(x) = \langle x|n\rangle$ kehren wir zur Ortsdarstellung (7.6) für den Absteige- und Aufsteigeoperator zurück. In dieser Darstellung ist $p = \frac{\hbar}{i}\partial_x$ und die Gleichung $a\psi_0 = 0$ für den Grundzustand lautet

$$a\psi_0 = \left(\alpha x + \frac{1}{2\alpha} \partial_x \right) \psi_0 = 0.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung erster Ordnung ist eine Gaußsche Funktion

$$\psi_0(x) = \left(\frac{2\alpha^2}{\pi} \right)^{1/4} e^{-\alpha^2 x^2}, \quad \alpha^2 = \frac{m\omega}{2\hbar}, \quad (7.13)$$

und die Eindeutigkeit der Lösung impliziert, dass der Grundzustand $|0\rangle$ des harmonischen Oszillators eindeutig ist. Die angeregten Zustände können aus

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n \psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \left(\alpha x - \frac{1}{2\alpha} \partial_x \right)^n e^{-\alpha^2 x^2}$$

berechnet werden. Zum Beispiel findet man für den ersten angeregten Zustand

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} \cdot x \cdot \psi_0(x).$$

Die höheren angeregten Zustände ψ_n sind proportional zum Grundzustand, multipliziert mit dem Hermite-Polynom $H_n(\xi)$ vom Grade n ,

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\sqrt{2}\alpha x) \cdot e^{-\alpha^2 x^2}. \quad (7.14)$$

Die *Hermite-Polynome* H_n der niedrigsten Ordnungen lauten

$$H_0(\xi) = 1$$

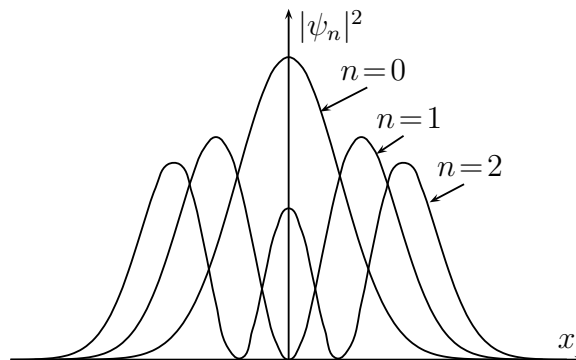
$$H_1(\xi) = 2\xi$$

$$H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2$$

$$H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi$$

$$H_4(\xi) = 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12$$

$$H_5(\xi) = 32\xi^5 - 160\xi^3 + 120\xi$$



In der Abbildung sind die Wahrscheinlichkeitsdichten

$$w_n(x) = |\psi_n(x)|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2^n n!} H_n^2(x) e^{-x^2}$$

für die Zustände mit den 3 kleinsten Energien geplottet. Als angepasste Längeneinheit wurde die Wurzel von $\hbar/m\omega$ gewählt. Nach Konstruktion bilden die ψ_n ein vollständiges orthonormiertes Funktionensystem,

$$(\psi_n, \psi_m) = \delta_{nm}.$$

Es ist kein Zufall, dass ψ_n für (un)gerades n eine (un)gerade Funktion ist. Wir werden diesen Sachverhalt später für die allgemeine Schrödingergleichung diskutieren.

Die Lösungen des *dreidimensionalen Oszillators* (7.3) sind nun einfach Produkte der Lösungen (7.14) des eindimensionalen Oszillatoren,

$$\psi_{n_1, n_2, n_3}(\mathbf{x}) = \psi_{n_1}(x^1) \psi_{n_2}(x^2) \psi_{n_3}(x^3),$$

mit den Eigenfunktionen $\psi_{n_i}(x^i)$ in (7.14), wobei allerdings die Ersetzungen $n \rightarrow n_i$, $x \rightarrow x^i$, $\omega \rightarrow \omega_i$ vorzunehmen sind. Die zugehörigen Energieeigenwerte sind die Summe der entsprechenden Energien der drei 1-dimensionalen Oszillatoren,

$$E_{n_1, n_2, n_3} = \hbar \sum_{i=1}^3 \omega_i (n_i + \frac{1}{2}).$$

7.1.2 Interpretationen

In diesem Abschnitt werden wir die gewonnenen Resultate interpretieren und weiter ergänzen. Zuerst invertieren wir die Beziehungen (7.6) um den Orts- und Impulsoperator durch den Auf- und den Absteigeoperator auszudrücken,

$$x = \frac{1}{2\alpha}(a^\dagger + a) \quad \text{und} \quad p = i\hbar\alpha(a^\dagger - a). \quad (7.15)$$

Damit lassen sich die Erwartungswerte von Ort und Impuls in den Energie-Eigenzuständen $|n\rangle$ in einfacher Weise bestimmen. Dazu wollen wir uns etwas genauer anschauen, wie Auf- und Absteigeoperator auf die *normierten* $|n\rangle$ wirken. In (7.11) haben wir bereits

$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$$

abgeleitet. Um die Wirkung von a auf $|n\rangle$ zu berechnen, multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung (wobei wir n durch $n-1$ ersetzen) mit dem Absteigeoperator: $aa^\dagger|n-1\rangle = \sqrt{n}a|n\rangle$. Da $aa^\dagger = a^\dagger a + 1 = N + 1$ ist, führt diese Relation auf

$$a|n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle.$$

Also noch einmal zusammengefasst:

$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad \text{und} \quad a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle. \quad (7.16)$$

Da Ort und Impuls linear von a und a^\dagger abhängen, sind $x|n\rangle$ und $p|n\rangle$ Linearkombinationen von $|n-1\rangle$ und $|n+1\rangle$. Die Eigenzustände $|n\rangle$ bilden ein *Orthonormalsystem* und deshalb stehen $x|n\rangle$ und $p|n\rangle$ senkrecht auf $|n\rangle$. Mit anderen Worten, in allen Energie-Eigenzuständen sitzt ruht der Oszillator im Mittel am Ursprung und hat einen verschwindenden mittleren Impuls, $\langle n|x|n\rangle = \langle n|p|n\rangle = 0$. Nun wollen wir noch die *mittleren Schwankungen* von Ort und Impuls bestimmen. Wegen

$$x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} (a^\dagger a^\dagger + aa + a^\dagger a + aa^\dagger)$$

$$p^2 = -\frac{\hbar m \omega}{2} (a^\dagger a^\dagger + aa - a^\dagger a - aa^\dagger)$$

finden wir folgenden Erwartungswert für x^2 im n 'ten angeregten Zustand,

$$\begin{aligned} \langle n | x^2 | n \rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega} \langle n | (a^\dagger a + aa^\dagger) | n \rangle \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} \langle n | (2N + 1) | n \rangle = \frac{\hbar}{m\omega} \left(n + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

und ganz analog

$$\langle n | p^2 | n \rangle = \frac{\hbar m \omega}{2} \langle n | (aa^\dagger + a^\dagger a) | n \rangle = \hbar m \omega \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

Da die Mittelwerte von x und p verschwinden, sind dies genau die Schwankungsquadrate von Orts- und Impulsoperator im Zustand $|n\rangle$. Ihr Produkt ist

$$\langle n | (\Delta x)^2 | n \rangle \langle n | (\Delta p)^2 | n \rangle = \hbar^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.17)$$

Im Grundzustand hat der Oszillators das nach der Unschärferelation kleinstmögliche Produkt der Unschärfen, $\Delta x \cdot \Delta p = \hbar/2$. Mit wachsender Energie des Zustandes nimmt das Produkt der Unschärfen jedoch zu, für große Energien proportional zu n .

Uminterpretation: Im harmonischen Potential haben zwei benachbarte Energiewerte den Abstand $\hbar\omega$, wobei ω die Kreisfrequenz der klassischen Schwingungsbewegung ist. Deswegen können wir das System im Zustand $|n\rangle$ als Anregung von n gleichartigen *Schwingungsquanten*, jedes mit Energie $\hbar\omega$, interpretieren. Dann wird N zum Teilchenzahloperator, da er die Quanten zählt. Wegen $a^\dagger |n\rangle \sim |n+1\rangle$ erzeugt a^\dagger einen Quant und wegen $a |n\rangle \sim |n-1\rangle$ vernichtet a einen Quant. Deshalb werden a^\dagger und a auch *Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren* genannt.

Diese Interpretation wird benutzt zur Beschreibung der Schwingungsbewegung der atomaren Bausteine in Molekülen, der Gitteratome in Kristallen und bei der Quantisierung des freien elektromagnetischen Feldes. In allen drei Fällen basiert die Beschreibung auf Systemen ungekoppelter, eindimensionaler harmonischer Oszillatoren, die im Allgemeinen verschiedene Frequenzen haben. Bei der Diskussion der Hohlraumstrahlung haben wir dies explizit gesehen. Die durch a^\dagger, a erzeugten bzw. vernichteten Quanten sind die Molekül-Schwingungsquanten, die Phononen und beim Strahlungsfeld die Photonen.

Nützliche Formeln: Folgende Formeln sind bei der Behandlung von harmonischen Oszillatoren hilfreich:

$$[N, a^p] = -pa^p, \quad [N, a^{\dagger p}] = pa^{\dagger p}, \quad [a, a^{\dagger n}] = na^{\dagger(n-1)}.$$

Sie können mühelos aus $[a, a^{\dagger}] = 1$ und der Definition $N = a^{\dagger}a$ induktiv bewiesen werden.

7.2 Kohärente Zustände

Durch Überlagerung von Eigenfunktionen können Zustände konstruiert werden, für die der mittlere Ort und Impuls die klassische Bewegung des Oszillators vollführen. Solche *kohärenten Zustände* bilden die Brücke zwischen der klassischen Mechanik und der Quantenmechanik. Sie wurden bereits von E. SCHRÖDINGER zu Beginn der Wellenmechanik eingeführt [45]. In der zitierten Arbeit untersuchte er nicht-zerfließende Wellenpakete. Kohärente Zustände haben diese interessante Eigenschaft.

Wir haben gesehen, dass im Grundzustand das Produkt aus Orts- und Impulsunschärfe minimal ist. Dies gilt auch, wenn wir die Wellenfunktion im Ortsraum verschieben, d.h. für

$$\psi_{\xi}(x) = \psi_0(x - x_0), \quad \xi = \alpha x_0 = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x_0. \quad (7.18)$$

Die Zustände ψ_{ξ} nennt man *kohärent*, und die Eigenschaften dieser Zustände wollen wir nun untersuchen. Nach der Formel (3.54) verschiebt der unitäre Operator $\exp(i\eta p/\hbar)$ das Argument einer Wellenfunktion um η , und wir können deshalb schreiben

$$\psi_{\xi}(x) = e^{-ix_0 p/\hbar} \psi_0(x) \stackrel{(7.15)}{=} e^{\xi a^{\dagger} - \xi a} \psi_0(x). \quad (7.19)$$

Wir benutzen die *Baker-Campbell-Hausdorff-Formel*¹ zur Umformung des auf den Grundzustand wirkenden unitären Operators. Wegen $[a, a^{\dagger}] = \mathbb{1}$ gilt nämlich

$$e^{\xi a^{\dagger} - \xi a} = e^{-\xi^2/2} e^{\xi a^{\dagger}} e^{-\xi a},$$

und da a den Grundzustand annihiliert, ist $\exp(-\xi a)\psi_0 = \psi_0$ und (7.19) vereinfacht sich zu

$$\psi_{\xi}(x) = e^{-\xi^2/2} e^{\xi a^{\dagger}} \psi_0(x).$$

¹siehe z.B. mein Mechanik Skript

Wir lösen uns nun von der Ortsdarstellung und wechseln zur Diracschen Schreibweise. Die kohärenten Zustände werden mit $|\xi\rangle$ bezeichnet und haben die Ortsdarstellung $\langle x|\xi\rangle = \psi_\xi(x)$. Erlauben wir noch komplexe Parameter ξ in den kohärenten Zuständen, so lauten diese

$$|\xi\rangle = e^{-|\xi|^2/2} e^{\xi a^\dagger} |0\rangle. \quad (7.20)$$

Diese Zustände sind Eigenzustände des nicht-hermiteschen Absteigeoperators. Dies zeigt man am schnellsten mit Hilfe der Formel

$$e^{-\eta a^\dagger} a e^{\eta a^\dagger} = a - \eta [a^\dagger, a] + \frac{\eta^2}{2} [a^\dagger, [a^\dagger, a]] + \dots = a + \eta \quad (7.21)$$

wie folgt,

$$a|\xi\rangle = e^{-|\xi|^2/2} e^{\xi a^\dagger} (a + \xi)|0\rangle = \xi|\xi\rangle. \quad (7.22)$$

Der Eigenwert von $|\xi\rangle$ ist also gleich dem Parameter ξ . Entwickeln wir nun die Exponentialfunktion in (7.20) und machen Gebrauch von der Darstellung (7.11) für die angeregten Zustände des Oszillators, so erhalten wir

$$|\xi\rangle = e^{-|\xi|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (7.23)$$

Die kohärenten Zustände sind eine Überlagerung *unendlich* vieler Energie-Eigenzustände.

Nun ist es relativ einfach, diejenige Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung anzugeben, die zur Zeit $t = 0$ gleich dem kohärenten Zustand $|\xi\rangle$ ist. Wir brauchen nur die bekannte Zeitabhängigkeit der Energie-Eigenzustände in (7.23) einzusetzen,

$$|\xi\rangle(t) = e^{-|\xi|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{\sqrt{n!}} e^{-iE_n t/\hbar} |n\rangle = e^{-i\omega t/2} \left(e^{-|\xi|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \right).$$

Der Ausdruck zwischen den Klammern ist offensichtlich wieder ein kohärenter Zustand, allerdings mit zeitabhängigem Parameter $\xi(t) = e^{-i\omega t} \xi$. Ein anfänglich kohärenter Zustand bleibt also zu allen Zeiten kohärent,

$$|\xi\rangle(t) = e^{-i\omega t/2} |\xi(t)\rangle, \quad \xi(t) = e^{-i\omega t} \xi. \quad (7.24)$$

Die Wellenfunktion und zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichte im Ortsraum haben damit

die folgende Zeitentwicklung,

$$\begin{aligned}\psi_\xi(t, x) &= \langle x | \xi(t) \rangle = e^{-i\omega t/2} \psi_0(x - e^{-i\omega t} x_0) \\ |\psi_\xi(t, x)|^2 &= |\psi_0(x - x(t))|^2, \quad x(t) = x_0 \cos \omega t.\end{aligned}$$

Diese lässt eine einfache Deutung zu: das anfänglich verschobene Gaußsche Wellenpaket schwingt harmonisch um den Koordinatenursprung.

7.2.1 Erwartungswerte und Unschärfen

Bei der Berechnung von Erwartungswerten im kohärenten Zustand $|\xi\rangle$ benutzt man, dass $a|\xi\rangle = \xi|\xi\rangle$ gilt. Deshalb findet man für den mittleren Ort des Oszillators

$$\langle x \rangle_\xi \equiv \langle \xi | x | \xi \rangle \stackrel{(7.15)}{=} \frac{1}{2\alpha} \langle \xi | (a^\dagger + a) | \xi \rangle = \frac{1}{\alpha} \Re \xi,$$

und für den mittleren Impuls

$$\langle p \rangle_\xi = \langle \xi | p | \xi \rangle \stackrel{(7.15)}{=} i\hbar\alpha \langle \xi | (a^\dagger - a) | \xi \rangle = \frac{m\omega}{\alpha} \Im \xi.$$

Im letzten Schritt setzten wir für α die Definition (7.6) ein. Ein anfänglich kohärenter Zustand mit Parameter ξ entwickelt sich mit der Zeit in einen kohärenten Zustand mit Parameter $\xi(t)$ in (7.24) und wir finden für die Zeitabhängigkeit des mittleren Ortes und Impulses

$$\langle x \rangle_\xi(t) = x(t) = x_0 \cos \omega t \quad \text{und} \quad \langle p \rangle_\xi(t) = -m\omega x_0 \sin \omega t = m\dot{x}(t). \quad (7.25)$$

Nicht unerwartet ist der mittlere Ort gleich dem Maximum der Wahrscheinlichkeitsdichte im Ortsraum. Er beschreibt die klassische Schwingungsbewegung des harmonischen Oszillators mit Amplitude x_0 und Kreisfrequenz ω . Analog berechnen sich nun mit $aa^\dagger + a^\dagger a = 2a^\dagger a + 1$ die Erwartungswerte von x^2 und p^2 im kohärenten Zustand,

$$\begin{aligned}\langle x^2 \rangle_\xi &= \frac{1}{4\alpha^2} \langle a^{\dagger 2} + 2a^\dagger a + a^2 + 1 \rangle_\xi = \frac{1}{(2\alpha)^2} + \langle x \rangle_\xi^2 \\ \langle p^2 \rangle_\xi &= -(\hbar\alpha)^2 \langle a^{\dagger 2} - 2a^\dagger a + a^2 - 1 \rangle_\xi = (\hbar\alpha)^2 + \langle p \rangle_\xi^2.\end{aligned} \quad (7.26)$$

Die Zeitentwicklung dieser Erwartungswerte erhält man wieder, wenn man ξ durch $\xi(t)$ aus (7.24) ersetzt. Insbesondere sind für die Erwartungswerte rechts das Quadrat der Mittelwerte (7.25) einzusetzen.

Im Gegensatz zum mittleren Ort und mittleren Impuls sind Orts- und Impulsunschärfe zeitunabhängig,

$$\begin{aligned}\langle(\Delta x)^2\rangle_\xi &= \frac{1}{4\alpha^2} \implies \Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \\ \langle(\Delta p)^2\rangle_\xi &= \hbar^2\alpha^2 \implies \Delta p = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\end{aligned}\quad (7.27)$$

Die kohärenten Zustände zerfließen also weder im Orts- noch im Impulsraum. Das Produkt der Orts- und Impulsunschärfe ist so klein, wie es nach der Unschärferelation nur sein kann,

$$\langle(\Delta x)^2\rangle_\xi \cdot \langle(\Delta p)^2\rangle_\xi = \frac{\hbar^2}{4}. \quad (7.28)$$

Zusammenfassend haben unsere Rechnungen gezeigt, dass die Wellenfunktion ψ_ξ eine Schwingung mit Kreisfrequenz ω und Amplitude x_0 um den Ursprung beschreibt und dass sich dabei die Orts- und Impulsunschärfen nicht ändern. Der Zustand ist das quantenmechanische Analogon des schwingenden Massenpunktes der klassischen Mechanik. Der zusammengesetzte Zustand $|\xi\rangle$ verdient in der Tat den Namen kohärenter Zustand. Betrachten wir zum Beispiel einen makroskopischen Oszillator mit $m = 1\text{ kg}$ und einer Schwingungsdauer von $T = 0.63\text{ s}$. Dies entspricht etwa der Periode eines Pendels der Länge 10 cm im Erdfeld. Der Oszillator hat $\alpha \sim 2 \cdot 10^{15}\text{ cm}^{-1}$ und

$$\Delta x \sim 2 \cdot 10^{-18}\text{ m} \quad \text{sowie} \quad \Delta p \sim 2 \cdot 10^{-17}\text{ kgm/s}.$$

Seine Ortsunschärfe ist also etwa drei Größenordnungen kleiner als ein durchschnittlicher Kerndurchmesser. Auf eine derartige Genauigkeit kann man keine makroskopische Länge messen. Für die Beschreibung eines makroskopischen Oszillators sind die Gesetze der klassischen Mechanik also mehr als ausreichend.

Jeder kohärente Zustand ist eine Superposition von unendlich vielen Eigenzuständen $|n\rangle$. Daher ist weder die Teilchenzahl N noch die Energie in einem kohärenten Zustand scharf. Die Wahrscheinlichkeit, mit der man den Zustand $|n\rangle$ im kohärenten Zustand antrifft, ist durch das Betragsquadrat der Koeffizienten α_n in der Entwicklung (7.23) gegeben,

$$|\alpha_n|^2 = |\langle n|\xi\rangle|^2 = \frac{|\xi|^{2n}}{n!} e^{-|\xi|^2} \implies \sum |\alpha_n|^2 = 1.$$

Diese Gleichung zeigt, dass der Anteil des Zustandes $|n\rangle$ mit n Quanten im kohärenten

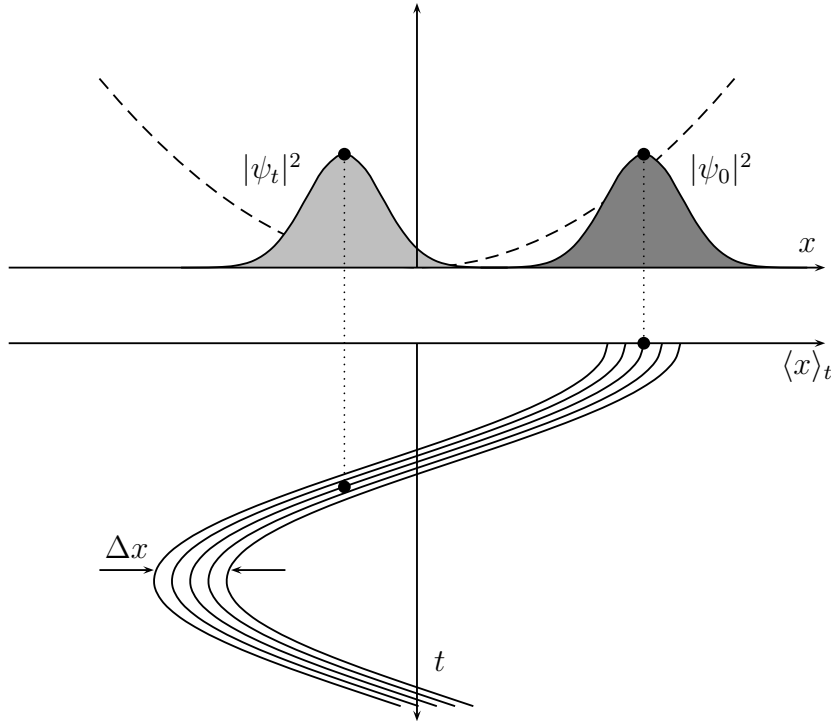


Abbildung 7.1: Die Bewegung des Wellenpakets kann mit der Zeitabhängigkeit des Erwartungswertes der Koordinate samt ihrer Unschärfe veranschaulicht werden. Für kohärente Zustände ist die Unschärfe zeitunabhängig.

Zustand $|\xi\rangle$ durch eine *Poisson-Verteilung* gegeben ist. Aus der erzeugenden Funktion

$$F(z) \equiv \langle e^{zN} \rangle_\xi = \sum |\alpha_n|^2 e^{zn} = e^{-\bar{\xi}\xi} \sum \frac{(\bar{\xi}\xi)^n}{n!} e^{zn} = \frac{\exp(\bar{\xi}\xi e^z)}{\exp(\bar{\xi}\xi)}$$

findet man die mittlere Besetzungszahl als erste Ableitung nach dem Parameter z ,

$$\langle N \rangle_\xi = \sum n |\alpha_n|^2 = F'(0) = \bar{\xi}\xi.$$

Das mittlere Quadrat der Besetzungszahl ist gleich der zweiten Ableitung am Ursprung,

$$\langle N^2 \rangle_\xi = F''(0) = \bar{\xi}\xi + (\bar{\xi}\xi)^2 = \langle N \rangle_\xi + \langle N \rangle_\xi^2.$$

Die Unschärfe der Besetzungszahl N im kohärenten Zustand $|\xi\rangle$ ist nach Definition

$$\Delta N = \sqrt{\langle N^2 \rangle_\xi - \langle N \rangle_\xi^2} = \sqrt{\langle N \rangle_\xi} = |\xi|, \quad (7.29)$$

und ist äquivalent zu folgender Energieunschärfe

$$\Delta E = \hbar\omega\Delta N = \hbar\omega\sqrt{\langle N \rangle_\xi}.$$

Aus (7.27,7.29) entnehmen wir, dass

$$\Delta N \cdot \Delta x = \frac{1}{2}x_0 \quad \text{und} \quad \frac{\Delta x}{x_0} = \frac{1}{2}\langle N \rangle_\xi^{-1/2},$$

gelten, eine für kohärente Zustände charakteristische Form der Unschärferelationen. Um das Teilchen im Ortsraum zu lokalisieren, braucht man große Besetzungszahlen.

Zwei kohärente Zustände sind niemals orthogonal,

$$\langle \xi | \xi' \rangle = \int \bar{\psi}_0(x - x_0)\psi_0(x - x'_0) = e^{-(\xi - \xi')^2/2}, \quad \xi = \alpha x_0, \quad \xi' = \alpha x'_0.$$

Für eine große Differenz der Parameter ξ und ξ' wird der Überlapp aber beliebig klein. Dann sind die entsprechenden kohärenten Zustände in guter Näherung orthogonal.

Die kohärenten Zustände $|\xi\rangle$ sind ein Spezialfall der allgemeineren *gequetschten Zustände*. Zur Zeit $t = 0$ hat die Wellenfunktion eines gequetschten Zustandes $|\xi, \beta\rangle$ im Ortsraum ebenfalls eine Gaußsche Form,

$$\psi_{\xi, \beta}(0, x) = \langle x | \xi, \beta \rangle \sim e^{-\beta\alpha^2(x-x_0)^2}.$$

Ähnlich wie für kohärente Zustände kann man die Lösungen $\psi_{\xi, \beta}(t, x)$ der zeitabhängigen Schrödingergleichung explizit berechnen. Wie für die kohärenten Zustände ist $\Delta x \Delta p = \hbar/2$ minimal. Allerdings sind Δx und Δp zeitabhängig. Zu gewissen Zeiten ist die Ortsunschärfe sehr klein (und entsprechend die Impulsunschärfe groß) und zu anderen Zeiten ist die Impulsunschärfe sehr klein (und entsprechend die Ortsunschärfe groß). Gequetschte Zustände finden sich zuerst in den Arbeiten [44]. Für eine ausführliche Diskussion dieser interessanten Zustände des harmonischen Oszillators verweise ich auf [46] oder die Lehrbücher über Quantenoptik.