Kapitel 5

Zeitentwicklung und Bilder

Zeit ist, was verhindert, dass alles auf einmal passiert!

John A. Wheeler

Durch Messungen eines vollständigen Satzes verträglicher Observablen sei ein reiner Zustand $|\psi(t_0)\rangle$ zur Zeit t_0 präpariert. Wird das System nicht durch weitere Messungen oder andere äußere Einflüsse gestört, dann ist seine Zeitentwicklung durch die *lineare* Schrödingergleichung bestimmt,

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi\rangle = H|\psi\rangle \,. \tag{5.1}$$

Der Zustandsvektor zu späteren Zeiten hängt offensichtlich linear vom anfänglichen Zustandsvektor $|\psi(t_0)\rangle$ ab,

$$|\psi(t)\rangle = U(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle. \tag{5.2}$$

Der Operator $U(t,t_0)$ ist von fundamentaler Bedeutung, denn er enthält die ganze Dynamik des Quantensystems: Wenn man weiß, wie sich der Zustand im Lauf der Zeit ändert, so versteht man das betrachtete System offenbar vollständig. Man überlässt das System zur Anfangszeit t_0 sich selbst, wartet dann (unbeteiligt) bis t und sieht dann nach, was daraus geworden ist.

Für die Wahrscheinlichkeitsinterpretation ist es unumgänglich, dass die Norm eines Zustandes zeitlich konstant ist,

$$\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = \big\langle\psi(t_0)|\psi(t_0)\big\rangle, \tag{5.3}$$

und wir erwarten, dass der *Zeitentwicklungs-Operator* U (auch Evolutionsoperator oder

Propagator genannt) unitär sein sollte,

$$U^\dagger(t,t_0) = U^{-1}(t,t_0). \tag{5.4}$$

Warten wir von t_0 bis t_1 und dann von t_1 bis t, so ist dies offensichtlich gleichbedeutend damit, dass wir von t_0 bis t warten,

$$U(t,t_1)\,U(t_1,t_0) = U(t,t_0). \tag{5.5}$$

Wenn wir gar nicht warten, so ändert sich das System nicht,

$$U(t_0,t_0) = \mathbb{1}. \tag{5.6}$$

Die beiden letzten Bedingungen lassen sich wie folgt zusammenfassen:

$$U(t,t_0) = U^{-1}(t_0,t). \tag{5.7}$$

Im folgenden Abschnitt werden wir den Zusammenhang zwischen dem selbstadjungierten Hamilton-Operator H und dem unitären Entwicklungs-Operator $U(t,t_0)$ herstellen.

5.1 Dysons Lösung der Schrödingergleichung

Setzen wir (5.2) in die zeitabhängige Schrödingergleichung (5.1) ein, so erhalten wir folgende Gleichung für den Zeitentwicklungs-Operator

$$i\hbar\frac{d}{dt}U(t,t_0) = H(t)U(t,t_0). \tag{5.8}$$

Diese lässt sich mit der Anfangsbedingung (5.6) formal integrieren

$$U(t,t_0) = \mathbb{1} + \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} dt_1 H(t_1)U(t_1,t_0). \tag{5.9}$$

Diese Volterrasche Integralgleichung zweiter Art lösen wir mittels Iteration. Setzen wir für $U(t_1,t_0)$ auf der rechten Seite wiederum (5.9) ein, so folgt

$$U(t,t_0) = \mathbb{1} + \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} dt_1 H(t_1) + \frac{1}{(i\hbar)^2}\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2\, H(t_1)H(t_2)U(t_2,t_0).$$

Dies lässt sich offenbar fortsetzen und führt schließlich auf die von *Neumannsche Reihe*

$$
\begin{aligned}
U(t,t_0) &= \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} U^{(n)}(t,t_0) \quad \text{mit} \\
U^{(n)}(t,t_0) &= \frac{1}{(i\hbar)^n} \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H(t_1)H(t_2)\ldots H(t_n).
\end{aligned} \tag{5.10}
$$

Es ergibt sich eine formale Potenzreihe in H. $U^{(n)}$ ist die Korrektur n-ter Ordnung in H zur tiefsten Approximation $U^{(0)} = \mathbb{1}$. Im Ausdruck für $U^{(n)}$ ist auf die Zeitordnung zu achten, da zeitabhängige Hamilton-Operatoren zu verschiedenen Zeitpunkten im Allgemeinen nicht vertauschen. Der Operator zur frühesten Zeit steht rechts, der zur spätesten Zeit links.

Zur weiteren Umformung des Zeitentwicklungsoperators führen wir den *Zeitordnungsoperator* ein:

$$
T\big(A(t_1)B(t_2)\big) = \begin{cases} A(t_1)B(t_2) & \text{für } t_1 > t_2 \\ B(t_2)A(t_1) & \text{für } t_2 > t_1 \end{cases} \tag{5.11}
$$

Die Zeitordnung des Produktes von mehr als zwei Operatoren wird analog definiert: Der Operator zur spätesten Zeit steht links, der zur zweitspätesten Zeit rechts daneben usw. und der Operator zur frühsten Zeit steht ganz rechts. Wegen

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{t>t_1>\ldots>t_n>t_0} dt_1 \ldots dt_n H(t_1)\cdots H(t_n) \\
= &\int\limits_{t>t_{\sigma(1)}>\ldots t_{\sigma(n)}>t_0} dt_{\sigma(1)} \ldots dt_{\sigma(n)} H(t_{\sigma(1)})\cdots H(t_{\sigma(n)}) \\
= &\int\limits_{t>t_{\sigma(1)}>\ldots t_{\sigma(n)}>t_0} dt_{\sigma(1)} \ldots dt_{\sigma(n)} T\left(H(t_1)\cdots\ldots H(t_n)\right)
\end{aligned}
$$

für jede Permutation σ der Indizes $1,\ldots,n$ erhält man nach Summation über alle Permutationen die *Dyson-Reihe*

$$
U^{(n)}(t,t_0) = \frac{1}{n!}\frac{1}{(i\hbar)^n} \int_{t_0}^{t} dt_1 dt_2 \ldots dt_n T\left(H(t_1)H(t_2)\ldots H(t_n)\right). \tag{5.12}
$$

Setzt man dieses Ergebnis in (5.10) ein, so resultiert die kompakte Darstellung des Zeitentwicklungsoperators im Schrödinger-Bild:

$$U(t,t_0)=T\exp\Bigg(-\frac{i}{\hbar}\int\limits_{t_0}^{t}dt'H(t')\Bigg). \tag{5.13}$$

Dieses Resultat für $U(t,t_0)$ ist sehr nützlich, wenn man die Änderung von Zuständen unter zeitabhängigen Störungen untersucht. Für konkrete Anwendungen benutzt man allerdings nicht diese elegante Form, sondern die Dysonreihe (5.10). Für *konservative Systeme* ist H zeitunabhängig und

$$U(t,t_0)=e^{-iH(t-t_0)/\hbar}=U(t-t_0) \tag{5.14}$$

hängt nur von der Zeitdifferenz $t-t_0$ ab. Für jeden selbstadjungierten Hamilton-Operator ist der Evolutionsoperator offensichtlich unitär.

Bei vielen Anwendungen mit zeitunabhängigem H geht man wie folgt vor um die explizite Zeitabhängigkeit zu finden. Man entwickelt den Anfangszustand $|\psi(0)\rangle$ nach den Eigenzuständen $|n\rangle$ des Hamilton-Operators,

$$|\psi(0)\rangle=\sum_n\alpha_n|n\rangle,\qquad H|n\rangle=E_n|n\rangle. \tag{5.15}$$

Dann lautet die Lösung der Schrödingergleichung

$$|\psi(t)=\sum_n\alpha_n\,e^{-iE_nt/\hbar}\,|n\rangle. \tag{5.16}$$

Dies bedeutet, dass der Evolutionsoperator folgende Spektraldarstellung hat,

$$U(t)=\sum_n e^{-iE_nt/\hbar}\,P_n,\qquad P_n=|n\rangle\langle n|. \tag{5.17}$$

Man beweist leicht, dass der Zustand (5.16) die Schrödingergleichung (5.1) erfüllt und für $t=0$ gleich dem Anfangszustand ist. Ist insbesonders $|\psi(0)\rangle$ ein Eigenzustand von H zur Energie E, dann ist

$$|\psi(t)=e^{-iEt/\hbar}\,|\psi(0)\rangle. \tag{5.18}$$

Die Multiplikation eine Vektors mit einer Zahl ändert den durch den Vektor repräsentierten Zustand nicht. Ist ein konservatives System in einem Eigenzustand der Energie, so ändert sich dieser Zustand unter der Zeitevolution nicht.

5.2 Die Bilder der Quantenmechanik

Bisher haben wir ausschließlich im sogenannten Schrödinger-Bild gearbeitet, in dem die Zustandsvektoren zeitabhängig und die den Observablen entsprechenden Operatoren (generisch) zeitunabhängig sind. Wir können mit Hilfe einer zeitabhängigen unitären Ähnlichkeitstransformation die Zeitentwicklung von den Zustandsvektoren auf die Operatoren überwälzen.

5.2.1 Der Übergang vom Schrödinger- zum Heisenbergbild

Der Erwartungswert einer Observablen beziehungsweise des entsprechenden Operators A ändert sich mit der Zeit gemäß

$$\langle A\rangle(t) = \big\langle\psi(t)|A|\psi(t)\big\rangle. \tag{5.19}$$

Die Zeitabhängigkeit rührt von der Evolution des Zustandsvektors. Wir setzen dessen Zeitentwicklung (5.2) ein und finden

$$\langle A\rangle(t) = \big(U(t,t_0)\psi(t_0)|A|U(t,t_0)\psi(t_0)\big) = \big\langle\psi(t_0)|U^\dagger(t,t_0)AU(t,t_0)|\psi(t_0)\big\rangle.$$

Definieren wir nun den *zeitabhängigen* Operator $A_H(t)$ und den *zeitunabhängigen* Zustand $|\psi_H\rangle$ gemäß

$$\begin{aligned} A_H(t) &= U^\dagger(t,t_0)A\,U(t,t_0) \\ |\psi_H\rangle &= U^\dagger(t,t_0)|\psi(t)\rangle = |\psi(t_0)\rangle, \end{aligned} \tag{5.20}$$

dann schreibt sich der Erwartungswert wie folgt,

$$\langle A\rangle(t) = \big\langle\psi_H|A_H(t)|\psi_H\big\rangle. \tag{5.21}$$

Die Umkehrung von (5.20) lautet

$$\begin{aligned} A &= U(t,t_0)A_H(t)U^\dagger(t,t_0) \\ |\psi(t)\rangle &= U(t,t_0)|\psi_H\rangle. \end{aligned} \tag{5.22}$$

In (5.21) haben wir die Zeitabhängigkeit von Erwartungswerten auf die Zeitentwicklung der Operatoren $A_H(t)$ zurückgeführt. Diese neue Art die Zeitentwicklung zu betrachten, heißt das *Heisenberg-Bild*. In diesem Bild sind also die Zustandsvektoren zeitunabhängig und die Operatoren zeitabhängig. In dem betrachteten *Schrödinger-Bild* sind dagegen die Zustände zeitabhängig und die Operatoren zeitunabhängig. Man kann entweder versuchen, die Zeitabhängigkeit der Zustände im Schrödinger-Bild oder der Operatoren im Heisenberg-Bild zu lösen. Zur anfänglichen Zeit t_0 stimmen die Zustände und Operatoren in beiden Bildern überein.

Beim Übergang vom Schrödinger- zum Heisenberg-Bild ist die Formel

$$(f(A,B,\dots))_H = f(A_H, B_H, \dots) \tag{5.23}$$

sehr nützlich. Wegen $UU^\dagger = \mathbb{1}$ gilt sie offensichtlich für alle Monome eines Operators,

$$(A^n)_H = U^\dagger A^n U = U^\dagger A U U^\dagger A \cdots A U^\dagger U A U^\dagger = \big(U^\dagger A U\big)^n = (A_H)^n,$$

und ebenso für Monome $A^n B^m \dots$ und damit für alle Polynome in $A, B, \dots$. Aber sie gilt auch für allgemeine Funktionen der Operatoren $A, B, \dots$. Insbesonder für Kommutator zweier Operatoren gilt

$$[A,B]_H = [A_H, B_H]. \tag{5.24}$$

Ist $[A,B]$ proportional dem Einheitsoperator, dann ist $[A_H, B_H] = [A,B]$. Kommutieren zwei Operatoren im Schrödinger-Bild dann kommutieren sie auch im Heisenberg-Bild und umgekehrt.

5.2.2 Heisenberg-Gleichung und Ehrenfest-Theorem

Im Heisenberg-Bild sind die Operatoren zeitabhängig und gehorchen einer Differentialgleichung erster Ordnung in der Zeit. Diese Bewegungsgleichung für Operatoren ersetzt die Schrödingergleichung für Zustandsvektoren im Schrödinger-Bild. Um sie abzuleiten, benötigen wir die Zeitableitung des zu U inversen oder adjungierten Operators. Sie folgt aus

$$\frac{d}{dt}\big(U^\dagger(t,t_0)U(t,t_0)\big) = 0 = \dot{U}^\dagger(t,t_0)U(t,t_0) + U^\dagger(t,t_0)\dot{U}(t,t_0),$$

durch Auflösung nach $\dot{U}^\dagger$. Es ergibt sich folgende Zeitableitung von A_H

$$i\hbar\frac{dA_H(t)}{dt} = -i\hbar U^\dagger \dot{U} U^\dagger A U + i\hbar U^\dagger \frac{\partial A}{\partial t} U + i\hbar U^\dagger A \dot{U},$$

wobei wir eine explizite Zeitabhängigkeit von A im Schrödinger-Bild erlauben. Zum Beispiel ist $A = \boldsymbol{p} \cdot t$ explizit zeitabhängig. Mit Hilfe von (5.8) folgt dann

$$i\hbar \frac{dA_H(t)}{dt} = -U^\dagger HUU^\dagger AU + i\hbar U^\dagger A_{,t}\, U + U^\dagger AUU^\dagger HU,$$

also die Heisenberg-Gleichung für Operatoren,

$$i\hbar \frac{dA_H(t)}{dt} = [A_H(t), H_H(t)] + i\hbar (A_{,t}\,)_H. \tag{5.25}$$

Kommutiert ein Operator A (der im Schrödinger-Bild nicht explizit von der Zeit abhänge) mit dem Hamilton-Operator, $[A,H] = 0 = [A_H, H_H]$, dann ist die zu A gehörende Observable eine Konstante der Bewegung und alle Erwartungswerte von A sind zeitunabhängig,

$$\frac{d}{dt}\langle\psi_H|A_H|\psi_H\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle\psi_H|[A_H, H_H]|\psi_H\rangle = 0 \quad \text{für} \quad [A,H] = 0. \tag{5.26}$$

Für ein konservatives System vertauscht der zeitunabhängige Hamilton-Operator mit

$$U = e^{-iH(t-t_0)/\hbar}$$

und deshalb ist $H_H = U^\dagger HU = H$ zeitunabhängig. Konservative Systeme haben eine erhaltene Energie.

Beispiel: Wir betrachten das Potentialproblem

$$H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V(\boldsymbol{x}) \tag{5.27}$$

mit zeitunabhängigem Potential. Wir transformieren ins Heisenberg-Bild

$$H \longrightarrow H_H = \left(\frac{1}{2m}\boldsymbol{p}^2 + V(\boldsymbol{x})\right)_H = \frac{\boldsymbol{p}_H^2}{2m} + V(\boldsymbol{x}_H), \tag{5.28}$$

wobei wir von (5.23) Gebrauch machten. Um die Notation zu vereinfachen, werden wir die Zeitabhängigkeit der Operatoren im Heisenberg-Bild nicht mehr explizit schreiben. Für das betrachtete *konservative* System ist $H_H = H$ zeitunabhängig. Wegen (5.24) kommutieren $\boldsymbol{x}_H$ und $V(\boldsymbol{x}_H)$ und es ist $[x_{iH}, p_{jH}] = i\hbar\delta_{ij}\mathbb{1}$. Mit der Derivationsregel folgt dann

$$\Big[\boldsymbol{x}_H, \frac{\boldsymbol{p}_H^2}{2m}\Big] = i\hbar \frac{\boldsymbol{p}_H}{m}$$

und damit lautet die Heisenbergsche Bewegungsgleichung (5.25) für den Orts*operator*

$$\frac{d\boldsymbol{x}_H}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\big[\boldsymbol{x}_H, H_H\big] = \frac{\boldsymbol{p}_H}{m}, \tag{5.29}$$

eine aus der klassischen Hamiltonschen Mechanik wohlbekannte Beziehung. Da $\boldsymbol{x}_H$ und $\boldsymbol{p}_H$ die gleichen Vertauschungsregeln wie $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{p}$ erfüllen, ist

$$[\boldsymbol{p}_H, V(\boldsymbol{x}_H)] = -i\hbar\nabla V\left(\boldsymbol{x}_H\right),$$

und der Impulsoperator im Heisenberg-Bild gehorcht der Bewegungsgleichung

$$\frac{d\boldsymbol{p}_H(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\big[\boldsymbol{p}_H, H_H\big] = -\nabla V(\boldsymbol{x}_H). \tag{5.30}$$

Wir können den Ausdruck $-\nabla V(\boldsymbol{x}_H)$ auf der rechten Seite als den auf das Teilchen wirkenden Kraftoperator interpretieren. In (5.29) und (5.30) erkennen wir die klassischen Bewegungsgleichungen für die kanonisch konjugierten Variablen Ort und Impuls.

Da im Heisenberg-Bild die Zustände zeitunabhängig sind, erfüllen die mittlere Position und der mittlere Impuls eines Teilchens die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}\langle\boldsymbol{x}_H\rangle = \frac{1}{m}\langle\boldsymbol{p}_H\rangle \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}\langle\boldsymbol{p}_H\rangle = -\langle\nabla V(\boldsymbol{x}_H)\rangle, \quad (\text{Ehrenfest}) \tag{5.31}$$

wobei $\langle A_H\rangle = \langle\psi_H|A_H|\psi_H\rangle$ den Erwartungswert von A_H in irgendeinem Zustand bezeichnet. Die Gleichungen (5.31) bedeuten, dass die Mittelwerte im Wesentlichen die klassischen Hamiltonschen Bewegungsgleichungen erfüllen. Diese Eigenschaft der Mittelwerte wurde von Ehrenfest abgeleitet und heisst entsprechend *Ehrenfest-Theorem.* Wäre $\langle\nabla V(\boldsymbol{x}_H)\rangle = \nabla V(\langle\boldsymbol{x}_H\rangle)$, dann würden die Erwartungswerte genau die klassischen Hamiltonschen Bewegungsgleichung erfüllen. Aber die Differenz

$$\big\langle\nabla V(\boldsymbol{x}_H)\big\rangle - \nabla V\big(\langle\boldsymbol{x}_H\rangle\big) \tag{5.32}$$

verschwindet nur für sehr einfache Systeme, wie zum Beispiel den harmonischen Oszillator.

5.2.3 Das Wechselwirkungsbild und die Streumatrix

Wir zerlegen den Hamilton-Operator im Schrödinger-Bild gemäß

$$H = H_0 + V, \tag{5.33}$$

wobei in vielen Anwendungen H_0 der Hamilton-Operator des ungestörten Systems und V eine kleine Störung ist. Oft ist auch H der vollständige Hamilton-Operator eines Systems und H_0 ein einfaches (möglicherweise unrealistisches) Modell nahe H. Die Dynamik des zeitunabhängigen Modell-Hamilton-Operators H_0 sei lösbar. Im Gegensatz zu H_0 kann V von der Zeit abhängen.

Da V klein sein soll, kommt der größte Anteil der Zeitentwicklung, die im Schrödinger-Bild durch die Schrödingergleichung

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \big(H_0 + V\big)|\psi(t)\rangle \tag{5.34}$$

bestimmt ist, von H_0. Wir wollen die entsprechende Zeitabhängigkeit in den Zuständen abspalten

$$|\psi_W(t)\rangle = e^{i(t-t_0)H_0/\hbar}|\psi(t)\rangle = U_0^\dagger(t-t_0)|\psi(t)\rangle. \tag{5.35}$$

Damit die Erwartungswerte dieselben bleiben, müssen die Operatoren entsprechend transformiert werden

$$A_W(t) = U_0^\dagger(t-t_0)AU_0(t-t_0). \tag{5.36}$$

Insbesondere ist $H_{0W}(t) = H_0$ zeitunabhängig. Für $t = t_0$ stimmen die Zustandsvektoren und Operatoren im Schrödinger- und Wechselwirkungsbild überein. Ähnlich wie oben zeigt man leicht, dass

$$\begin{aligned} \frac{dA_W}{dt} &= \frac{i}{\hbar}[H_0, A_W] + (A_{,t})_W \\ i\hbar\,\frac{d}{dt}\,|\psi_W\rangle &= V_W|\psi_W\rangle \end{aligned} \tag{5.37}$$

ist. Dies sind die beiden *Diracschen Gleichungen.*

Die zweite Diracgleichung kann ähnlich wie die Schrödingergleichung iterativ gelöst werden. Die Lösung ist wieder durch die zeitgeordnete Exponentialfunktion gegeben,

$$\begin{aligned} |\psi_W(t)\rangle &= S(t,t_0)|\psi_W(t_0)\rangle, \quad \text{mit} \\ S(t,t_0) &= T\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^t dt' V_W(t')\right). \end{aligned} \tag{5.38}$$

Wie im Schrödinger-Bild ist die rechte Seite durch die Reihenentwicklung definiert. In der entsprechenden *Dyson-Reihe* sind in jedem Term die Produkte von $V_W(t)$ chronologisch anzuordnen. Die Formel (5.37) ist der Ausgangspunkt für die zeitabhängige Störungstheorie. Fermis goldene Regel, die Berechnung von Übergangswahrscheinlichkeiten und viele andere physikalisch wichtige Formeln und Größen können (meist störungstheoretisch) aus ihr abgeleitet werden.

Der unitäre Operator

$$S = \lim_{\substack{t_0 \to -\infty \\ t \to \infty}} S(t, t_0) = T \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dt'\, V_W(t')\right), \tag{5.39}$$

ist die sogenannte *Streumatrix*. Ohne Wechselwirkung ist $S = \mathbb{1}$ und es findet keine Streuung statt. Sind

$$|\psi_{\text{ein}}\rangle = |\psi_W(-\infty)\rangle \quad \text{und} \quad |\psi_{\text{aus}}\rangle = |\psi_W(\infty)\rangle$$

die kräftefreien Lösungen, die zu sehr frühen und sehr späten Zeiten gegen $|\psi_W(\pm\infty)\rangle$ konvergieren (die einlaufenden und auslaufenden freien Lösungen), dann vermittelt die Streumatrix zwischen diesen asymptotischen Zuständen:

$$|\psi_{\text{aus}}\rangle = S|\psi_{\text{ein}}\rangle. \tag{5.40}$$

5.3 Zeitentwicklung von Gemischen

Es sei ρ ein statistischer Operator (Gemisch, Dichtematrix) im Schrödinger-Bild

$$\rho = \sum p_n P_n = \sum p_n |n\rangle\langle n| \tag{5.41}$$

mit zeitunabhängigen Wahrscheinlichkeiten p_n. Die normierten Eigenfunktionen $|n\rangle$ des statistischen Operators ändern sich ohne äußere Einflüsse gemäß der Schrödingergleichung und als Folge ergibt sich die Zeitentwicklung

$$\rho(t) = \sum p_n |n, t\rangle\langle t, n| = U(t, t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t, t_0). \tag{5.42}$$

Dies ist die Lösung der Liouville–von Neumann-Gleichung im Schrödinger-Bild,

$$i\hbar\frac{d}{dt}\rho(t) = [H, \rho(t)]. \tag{5.43}$$

Für zeitunabhängige Wahrscheinlichkeiten p_n ist der statistische Operator im Heisenberg-Bild zeitunabhängig. Im Wechselwirkungsbild hat er die Form

$$\rho_W = U_0^\dagger(t - t_0)\, \rho(t)\, U_0(t - t_0). \tag{5.44}$$

und erfüllt die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{d}{dt}\rho_W &= U_0^\dagger(H-H_0)\rho(t)U_0 - U_0^\dagger\rho(t)(H-H_0)U_0 \\ &= \left(U_0^\dagger V U_0\right)\left(U_0^\dagger\rho(t)U_0\right) - \left(U_0^\dagger\rho(t)U_0\right)\left(U_0^\dagger V U_0\right). \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite stehen die Wechselwirkung und Dichtematrix im Wechselwirkungsbild und deshalb finden wir die *Liouville-von Neumann–Gleichung*

$$i\hbar\frac{d\rho_W}{dt} = [V_W, \rho_W], \tag{5.45}$$

in Einklang mit der Zeitentwicklung (5.35) der Zustände in diesem Bild. Erwartungswerte sind natürlich unabhängig vom gewählten Bild, $\langle A\rangle_\rho = \mathrm{Sp}\,\rho A = \mathrm{Sp}\,\rho_W A_W$.