

Kapitel 1

Ursprünge der Quantentheorie

In den letzten Jahren haben wir erkannt, dass Elektronen in manchen Situationen sinnvollerweise, ja vielleicht notwendigerweise, als Wellen und nicht als Teilchen betrachtet werden sollten, und Begriffe wie Beugung, Brechung, Reflexion und Dispersion zu ihrer Beschreibung anzuwenden sind.

C. Davisson; Nobelpreis 1937

1.1 Literaturhinweise

Folgende Bücher können empfohlen werden:

Zur Vorlesung:

K. GOTTFRIED UND Y. TUNG-MONG, *Quantum Mechanics: Fundamentals*; Springer, 2003.

S. GASIOROWICZ, *Quantenphysik*; Oldenbourg, 2002.

C. COHEN-TANNOUJJI, B. DIU UND F. LALOE, *Quantenmechanik I,II*; de Gruyter, 1997.

N. STRAUMANN, *Quantenmechanik - Ein Grundkurs über nichtrelativistische Quantentheorie*; Springer, 2002.

F. SCHECK, *Theoretische Physik*, Band 3, *Nichtrelativistische Quantentheorie - Vom Wasserstoffatom zu den Vielteilchensystemen*; Springer, 1999.

M. SCHUBERT UND G. WEBER, *Quantentheorie*; Spektrum Akademischer Verlag, 1993

U. SCHERZ, *Quantenmechanik: Eine Einführung mit Anwendungen auf Atome, Moleküle und Festkörper*; Teubner Studienbücher, 1999.

- F. SCHWABL, *Quantenmechanik I*; Springer, 2002;
Quantenmechanik für Fortgeschrittene; Springer, 2000.
W. NOLTING, *Grundkurs Theoretische Physik*; Springer, 2000;
Band 5/1, *Quantenmechanik - Grundlagen*,
Band 5/2, *Quantenmechanik - Methoden und Anwendungen*.
E. SCHMUTZER, *Grundlagen der Theoretischen Physik II*, BI-Wissenschaftsverlag, 1989.
A. MESSIAH, *Quantenmechanik I,II*; de Gruyter, 1990/91.

Klassiker

- P.A.M. DIRAC, *The Principles of Quantum Mechanics*; 4th edition; Clarendon Press, 1958.
W. PAULI, *Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik*; Springer, 1990.
R. FEYNMAN, *The Feynman Lectures on Physics*; Bd. III; Addison - Wesley, 1965.
L.D. LANDAU UND E.M. LIFSCHITZ, *Lehrbuch der theoretischen Physik III, Quantenmechanik*; Hrsg. Paul Ziesche; 1986.
G. BAYM, *Lectures on Quantum Mechanics*; Lecture Notes and Supplements in Physics, Addison-Wesley, 1969.
A. BOHM, *Quantum Mechanics*; Springer, 1994.

Geschichte und Interpretation der Quantenmechanik

- F. HUND, *Geschichte der Quantenmechanik*; Hochschultaschenbücher.
M. JAMMER, *The Philosophy of Quantum Mechanics*; Wiley & Sons, 1974.
B. D'ESPAGNAT, *Conceptual Foundations of Quantum Mechanics*; Benjamin, 1976.
K. BAUMANN UND R.U. SEXL, *Die Deutungen der Quantentheorie*; Vieweg, 1984.
J.A. WHEELER and W.H. ZUREK (eds.), *Quantum Theory and Measurement*; Princeton University Press, 1983.
A. RAE, *Quantenphysik: Illusion oder Realität?* Reclam 9607, 1996.
J. Audretsch, *Verschränkte Welt - Faszination der Quanten*, Wiley, Berlin, 2002.

Mathematik zur Quantenmechanik:

- J. VON NEUMANN, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*; Springer, 1996.
H. WEYL, *The Theory of groups and quantum mechanics*; Dover, 1931.
G. HELLWIG, *Differentialoperatoren der Mathematischen Physik*; Springer, 1964.
T.F. JORDAN, *Linear Operators for Quantum Mechanics*; Wiley & Sons, 1969.
G. LUDWIG, *Foundations of Quantum Mechanics I und II*; Springer, 1983 und 1985.

W. THIRRING, *Lehrbuch der mathematischen Physik*, Vol. III, IV; Springer 1994.

Weitere Literatur wird im Laufe der Vorlesung angegeben.

1.2 Einführung

Ein Verständnis der modernen Naturwissenschaften ist ohne Kenntnis der Quantenmechanik, deren Grundgleichungen das Verhalten mikroskopischer Objekte beschreibt, undenkbar. Ohne Quantenmechanik gäbe es keine Laser, Kernkraftwerke oder ein Verständnis, warum die Sonne schon mehrere Milliarden Jahre Energie ausstrahlt. Die Quantentheorie darf wohl zu recht als eine der größten naturwissenschaftlichen Errungenschaften des zwanzigsten Jahrhunderts angesehen werden - revolutionär und von großem praktischen Nutzen.

Die quantenmechanischen Gesetze beschreiben Wahrscheinlichkeiten und machen einige sehr seltsame Vorhersagen. Selbst ALBERT EINSTEIN und ERWIN SCHRÖDINGER, die wesentlich zur Entwicklung und einem tieferen Verständnis der Quantenmechanik beitrugen, konnten die von BORN, JORDAN, HEISENBERG und BOHR stammende Interpretation nie akzeptieren. Nach den Gesetzen der Quantenmechanik kann ein radioaktives Element während eines Zeitintervalls ein Elektron ausstrahlen oder auch nicht. Man kann sich Experimente denken, bei denen eine 50-prozentige Chance besteht, dass ein Atom in einem Klumpen radioaktiven Materials zerfällt oder nicht.

SCHRÖDINGER versuchte diese prinzipielle Unbestimmtheit des Zerfallszeitpunktes durch sein berühmt gewordenes *Katzenexperiment* ad absurdum zu führen [1]. Man schließe eine lebendige Katze, zusammen mit einer Apparatur, die Gift entlässt, sobald ein in ihr enthaltenes radioaktives Atom zerfällt, in einen Kasten ein. Nach der Quantenmechanik hat keine der beiden Möglichkeiten - radioaktiver Zerfall und Vergiftung der Katze oder kein Zerfall und lebende Katze - eine Realität, solange man nicht nachschaut, was wirklich passiert ist. Der Zerfall ist weder geschehen noch nicht geschehen, die Katze ist weder lebendig noch tot, solange wir den Kasten nicht öffnen. Sie ist in einem Zwischenzustand zwischen lebendig und tot. Mit Schrödingers Worten:

Man kann auch ganz burleske Fälle konstruieren. Eine Katze wird in eine Stahlkammer gesperrt, zusammen mit folgender Höllenmaschine (die man gegen den direkten Zugriff der Katze sichern muss): in einem Geigerschen Zählrohr befindet sich eine winzige Menge radioaktiver Substanz, so wenig, dass im Laufe einer Stunde vielleicht eines von den Atomen zerfällt, ebenso wahrscheinlich aber auch keines; geschieht es, so spricht das Zählrohr an und betätigt über ein Relais ein Hämmerchen, das ein Kölbchen mit Blausäure

zertrümmert. Hat man dieses ganze System eine Stunde lang sich selbst überlassen, so wird man sich sagen, dass die Katze noch lebt, wenn inzwischen kein Atom zerfallen ist. Der erste Atomzerfall würde sie vergiften haben. Die Psi-Funktion des ganzen Systems würde das so zum Ausdruck bringen, dass in ihr die lebende und die tote Katze zu gleichen Teilen gemischt oder verschmiert sind.

EINSTEIN hat diesen nichtdeterministischen Charakter der Quantenmechanik nie akzeptiert und glaubte an eine tiefergehende deterministische Theorie. Eine solche Theorie hätte verborgene, dem Experimentator unbekannt, Parameter. Der Wahrscheinlichkeitscharakter der Quantenmechanik wäre dann ganz analog dem der klassischen statistischen Mechanik. EINSTEIN ersann viele ingenieure Gedankenexperimente, die die zugrunde liegende Realität der Erscheinungen klar machen sollten. Eine wichtige Rolle spielte dabei eine Argumentation von EINSTEIN, PODOLSKY und ROSEN [2], oft *EPR-Paradox* genannt. Dabei zerfällt, wie in der Abbildung (1.1) (nach der Version von A. BOHM) gezeigt, ein Teilchen mit verschwindendem Drehimpuls in zwei Teilchen A und B , die sich voneinander wegbewegen. Misst man die z -Komponente des Spins von Teilchen A , so kennt man wegen der Drehimpulserhaltung die z -Komponente des Spins von Teilchen B . Das Experiment an A beeinflusst den Ausgang des Experiments an B , obwohl A und B weit getrennt sind.

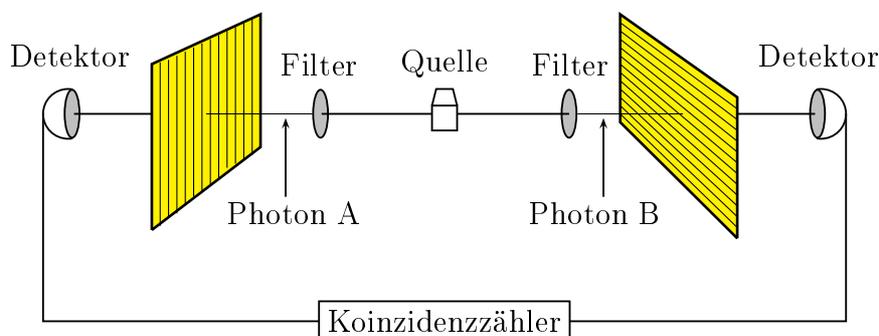


Abbildung 1.1: Jedes Photon trifft auf einen Polarisationsanalysator. Die Quantenmechanik sagt vorher, dass zwischen dem Durchgang der Photonen durch die beiden Analysatoren eine Korrelation besteht, obwohl die Photonen sich offensichtlich nicht miteinander verständigen können.

Auch wenn die beiden Zerfallsteilchen beliebig weit voneinander entfernt sind und nicht mehr kommunizieren können, findet man eine Korrelation bei der Messung der Einteilchen-Zustände. Diese *Nichtlokalität* der Quantenmechanik führt allerdings zu keinerlei Widersprüchen mit der speziellen Relativitätstheorie. Zwar ist nach Messung einer

Spinkomponente des ersten Teilchens sofort bekannt, welchen Wert die gleiche Spinkomponente des zweiten Teilchens besitzt, aber es lässt sich dadurch keine Information übertragen. EINSTEIN, PODOLSKY und ROSEN haben dieses Gedankenexperiment als Argument für die Existenz einer vollständigeren *Theorie mit verborgenen Parametern* angesehen: Wegen der Trennung der beiden Teilchen hat keine gegenseitige Beeinflussung stattgefunden und die Spinkomponenten müssen deshalb schon vor deren Messung festgelegt sein [3].

In einer Serie von Experimenten von ALAIN ASPECT und Mitarbeitern in Paris wurden 1982 die Korrelationen zwischen den Polarisierungen zweier von einer Quelle in entgegengesetzter Richtungen emittierter Photonen gemessen [4], siehe Abbildung (1.1). Die Quantenmechanik und (lokale) Theorien mit verborgenen Parametern sagen für bestimmte Korrelationskoeffizienten hier verschiedene Resultate voraus. Die Messresultate von ASPECT waren in vollständiger Übereinstimmung mit den Vorhersagen der Quantenmechanik. Sie sind unverträglich mit der Bellschen Ungleichung [5], die für (lokale) Theorien mit verborgenen Parametern Gültigkeit hat. Die beiden Photonen bilden einen verschränkten Zustand. Es ist unmöglich, dem einzelnen Photon lokale Eigenschaften zuzuordnen.

Bevor wir die Quantenmechanik zu verstehen suchen, möchte ich einige *historische Bemerkungen* anbringen. Ende des 19. Jahrhunderts schien die Physik zu einem gewissen Abschluss gekommen zu sein. Dies geht aus dem folgenden Zitat von A. MICHELSON (aus 'Light Waves and Their Uses', 1903) hervor:

Die wichtigsten Grundgesetze und Grundtatsachen der Physik sind alle schon entdeckt, und diese haben sich bis jetzt so fest bewährt, dass die Möglichkeit, sie wegen neuer Entdeckungen beiseite zu schieben, außerordentlich fern zu liegen scheint Unsere künftigen Entdeckungen müssen wir in den 6. Dezimalen suchen.

Am Ende der klassischen Periode bestand das Universum nur aus Materie und Strahlung:

Materie: Die Dynamik der Materie wird durch die deterministischen Newtonschen Gleichungen beschrieben. Der Zustand jedes Teilchens ist in jedem Augenblick durch Angabe seiner Position und seines Impulses eindeutig bestimmt.

Die Korpuskulartheorie der Materie wurde zunächst auf die Mechanik der Himmelskörper und auf makroskopische feste Körper beschränkt. Nach der Atomhypothese der Chemiker LAVOISIER, PROUST, GAY-LUSSAC und DALTON wurde sie auch zur grundlegenden Theorie der Materie im mikroskopischen Bereich. Anfang des 19. Jahrhunderts hat JOHN DALTON mit seiner atomistischen Erklärung der *Gesetze von der Konstanz und*

von den multiplen Proportionen der Verbindungsgewichte der Substanzen der Atomhypothese in der Chemie wichtige Impulse gegeben. Sein Gesetz wurde durch die Annahme leicht verständlich, dass sich Atome mit bestimmter Masse zu Molekülen verbinden. Heute rechnet man mit relativen Atommassen und diese werden bezüglich der vereinheitlichten atomaren Masseneinheit (die Masse des Kohlenstoff-Isotops ^{12}C wird gleich 12 gesetzt) gemessen.

Inspiziert von dem Gesetz über die Volumenverhältnisse reagierender Gase von GAY-LUSSAC stellte AVOGADRO 1811 seine berühmte Hypothese auf, dass für feste Temperatur und Druck gleiche Volumina von Gasen die gleiche Anzahl Moleküle enthalten, unabhängig von deren chemischer Zusammensetzung,

$$N_A = \frac{pv}{kT} \quad p: \text{Druck, } v: \text{ molares Volumen.}$$

Spätere Experimente bestätigten AVOGADRO und nach den gegenwärtig genauesten Messungen beträgt die *Avogadro-Konstante*

$$N_A = 6.0221367 \cdot 10^{23} \text{ Mol}^{-1}.$$

In der deutschsprachigen Literatur wird sie häufig auch *Loschmidtsche Zahl* genannt.

Ende des 19. Jahrhunderts brachten J.C. MAXWELL und L. BOLTZMANN die kinetische Theorie der Gase zu einem gewissen Abschluss. Nach dieser Theorie ist Wärme eine Form von Bewegung der Atome: eine Temperaturerhöhung bedeutet eine schnellere Bewegung der Teilchen und entsprechend mehr Stöße gegen die Wand des umgebenden Behälters oder einen höheren Druck. In der kinetischen Gastheorie berechnen sich makroskopische Größen wie Temperatur und Druck als Mittelwerte von sehr vielen ($\sim 10^{23}$) mikroskopischen Freiheitsgraden. Die entstehende statistische Mechanik beschränkt sich dabei auf statistische Untersuchungen und versucht nicht die mikroskopische Dynamik exakt zu lösen. Die Ergebnisse bei der Untersuchung von Gasen (kinetische Gastheorie) und in der Thermodynamik (statistische Thermodynamik) bestätigten die Korpuskulartheorie der Materie qualitativ und quantitativ. Aufgrund der Untersuchung der *Brownschen Bewegung* von sehr feinen Teilchen in Flüssigkeiten oder Gasen wurde die reale Existenz von Atomen und Molekülen dann endgültig akzeptiert. Die vom englischen Botaniker ROBERT BROWN 1827 entdeckte Zick-Zack-Bewegung wird den zahlreichen Stößen mit benachbarten Atomen und Molekülen zugeschrieben. A. EINSTEIN und M. SMOLUCHOWSKI zeigten 1905, wie diese Bewegung mittels statistischer Bewegungsgesetze Rückschlüsse auf die Moleküle erlaubt [6]. Zum Beispiel wurde die Avogadrosche Zahl auf diese Art bestimmt.

Strahlung: I. NEWTON versuchte die Eigenschaften des *Lichts* durch eine Teilchentheorie zu erklären. Diese konnte zum Beispiel die Refraktion leicht erklären, falls sich Lichtteilchen in optisch dichteren Medien schneller bewegen würden. Die etwa zur selben Zeit entwickelte *Huygensche Wellentheorie* des Lichts fand anfänglich wenige Anhänger (L. EULER und B. FRANKLIN waren Ausnahmen), da damals nur Schatten mit scharfen Kanten beobachtet wurden. Erst nach Youngs und insbesondere Fresnels Interferenzversuchen an engen Schlitzen Anfang des 19. Jahrhunderts änderte sich die Situation grundlegend. Als dann Mitte des Jahrhunderts L. FOUCAULT demonstrierte, dass sich Licht in Wasser langsamer als in der Luft fortpflanzte, war dies keine sonderliche Überraschung mehr, da sich die Wellentheorie des Lichts zu dieser Zeit schon durchgesetzt hatte. Die Theorie des Lichts kam mit der *Maxwellschen Theorie* des Elektromagnetismus von 1855 zu einem gewissen Abschluss und die vorhergesagten Radiowellen wurden dann auch von H. HERTZ nachgewiesen. Seither fand die Maxwellsche Theorie ihre volle Bestätigung in der Behandlung von Wellenausbreitungsproblemen. Sie führte zu einer einheitlichen Behandlung von Optik und Elektrodynamik. Nach der Maxwellschen Feldtheorie hat die Strahlung unendlich viele Freiheitsgrade, nämlich die Komponenten des elektrischen und magnetischen Feldes an jedem Raumpunkt. Die Strahlung kann nicht in lokalisierte Teilchen zerlegt werden.

Das mechanistische Weltbild: Gegen Ende des vorletzten Jahrhunderts konnten alle bekannten physikalischen Phänomene durch eine allgemeine Theorie der Materie und Strahlung erklärt werden. Es bestand ein hoher Grad an *Vereinheitlichung* und die Physik stellte sich als abgeschlossenes und scheinbar widerspruchsfreies Gebäude dar.

Aber nur scheinbar. Es gab Probleme bei der Erklärung der elektromagnetischen Erscheinungen. Die Wellenausbreitung war schon von den akustischen Vorgängen bekannt, wo sie eine makroskopische Erscheinung ist, die sich aus der mikroskopischen Bewegung von Atomen oder Molekülen ableiten lässt. In Analogie suchte man nach einem Träger der elektromagnetischen Wellen, dem sogenannten *Äther*. Auf diese Weise wollte man die Wellenausbreitung ebenfalls auf die Kraftgesetze der Newtonschen Mechanik, angewandt auf einen geeigneten Träger, zurückführen. Dieser Wunsch nach einer weiteren Vereinheitlichung der physikalischen Theorien im Rahmen einer mechanistischen Weltauffassung hat LORD KELVIN etwa 1884 zum Ausdruck gebracht:

Ich bin niemals zufrieden, bevor ich ein mechanisches Modell des Gegenstandes konstruiert habe, mit dem ich mich beschäftige. Wenn es mir gelingt, ein solches herzustellen, verstehe ich, andernfalls nicht. Daher kann ich die elektromagnetische das Licht so vollständig verstehen wie möglich, ohne Dinge einzuführen, die ich noch weniger verstehe. Daher halte ich an der einfachen

Dynamik fest, denn dort kann ich ein Modell finden, jedoch nicht in der elektromagnetischen Theorie.

Der negative Ausgang des Michelson-Morley-Experiments drei Jahre später machte klar, dass eine mechanistische Erklärung des Elektromagnetismus nicht möglich war [7]. Das augenscheinliche Paradoxon wurde endgültig von A. EINSTEIN im „Wunderjahr“ 1905 im Rahmen seiner speziellen Relativitätstheorie erklärt [8]. Diese erweiterte die nichtrelativistische klassische Theorie, stellte ihr Programm, und insbesondere den Determinismus, aber nicht in Frage.

1.2.1 Erste Probleme mit der klassischen Physik

Um 1900 konzentrierten sich die Experimentalphysiker auf zwei Forschungsgebiete:

- Die genaue Untersuchung der mikroskopischen Struktur der Materie.
- Die Wechselwirkung der Teilchen untereinander und mit dem elektromagnetischen Feld.

J.J. THOMSON entdeckte 1897 das *Elektron* als Teilchen der Kathodenstrahlung [9]. Seine Apparatur war so angelegt, dass er durch eine Kompensation der elektrischen und magnetischen Kraft das Verhältnis e/m der elektrischen Ladung zur Elektronenmasse bestimmen konnte. Im Folgenden wurde das Verhalten der Elektronen in gekreuzten elektromagnetischen Feldern $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ (KAUFMANN 1901-1906), in parallelen Feldern (J.J. THOMSON 1911) und mittels der magnetischen Längsfokussierung (H. BUSCH, 1926) eingehend studiert, und unter Anwendung der Lorentzschen Theorie der Wechselwirkung zwischen Elektronen und elektromagnetischen Feldern konnte e/m genau bestimmt werden.

Die Vervollkommnung der experimentellen Techniken ermöglichte die Beobachtung einzelner mikroskopischer Vorgänge und das Zählen von mikroskopischen Teilchen. Zu erwähnen sind die Messung der elektrischen Elementarladung (MILLIKAN 1911) durch Beobachtung schwebender geladener Öltröpfchen zwischen den Platten eines Kondensators mittels eines Mikroskops, die Beobachtung von Teilchenbahnen in Wilson-Kammern (1912) und die Entwicklung des Geigerzählers (1913).

Parallel dazu wurde mit der Entdeckung der *Radioaktivität* durch BECQUEREL (1896) und den bahnbrechenden Experimenten von MARIE und PIERRE CURIE an der Sorbonne Eigenschaften von Atomkernen erkennbar. H. GEIGER, E. MARSDEN und E. RUTHERFORD untersuchten systematisch die Streuung von α -Teilchen (He-Kerne) an Atomen in

dünnen Substanzschichten. Die abgelenkten α -Teilchen wurden durch Beobachtung der Lichtblitze auf einem um das streuende Präparat herumgelegten bzw. herum bewegbaren Szintillationsschirm nachgewiesen. Nach Entdeckung der Wilsonschen Nebelkammer war es möglich, die Bahnen der α -Teilchen direkt sichtbar zu machen und auszumessen. Man sah, dass sie nur selten mehr als 3° von ihrer Richtung abgelenkt wurden. Nur in gerade mal einem von achttausend Fällen gab es Ablenkwinkel von 90° bis 180° .

RUTHERFORD entwickelte das erste moderne Bild von Atomen¹. Sein Atommodell bestand aus einem sehr kleinen ($\sim 10^{-13} - 10^{-12}$ cm) positiv geladenen Kern der Ladung Ze , um den Z Elektronen kreisen. Darin unterschied es sich von älteren Modellen, erwähnenswert ist das Rosinenpudding-Modell von J.J THOMSON, das als erster Schritt auf dem Weg zu einer theoretischen Deutung des Periodensystems angesehen werden kann. Nach RUTHERFORD vereinigt der Kern fast die ganze Masse des Atoms in sich. Das Modell ähnelt einem Sonnensystem im Kleinen, bei dem die Gravitationskräfte durch die elektrischen Kräfte ersetzt werden. Die Coulomb-Anziehung des Kerns, die Zentrifugalkräfte und die gegenseitige Abstoßung der Elektronen sollten bewirken, dass diese stabile Bahnen mit Radien von etwa 10^{-8} cm um den Kern vollführen. Das Rutherford'sche Modell hatte aber ein großes Problem, dessen Lösung den Anfang der Quantenmechanik bedeutete. Um nicht in den Atomkern zu fallen, mussten die Elektronen um den anziehenden Kern kreisen. Nach den Gesetzen der Elektrodynamik strahlt aber ein kreisendes Elektron und sollte aufgrund des Energieverlustes in den Kern stürzen. Eine kurze Abschätzung zeigt, dass im Rutherford'schen Modell für das Wasserstoffatom das Elektron aufgrund der Dipolabstrahlung in nur $1.1 \cdot 10^{-10}$ s seinen Abstand vom Kern von 10^{-10} m auf 10^{-14} m verringern würde.

Einige Monate vor der Radioaktivität fand W. RÖNTGEN durch Zufall die nach ihm benannte Strahlung. Deren Wellencharakter wurde 1912 von LAUE mit Beugungsexperimenten an Kristallen nachgewiesen. Seither vervollständigte sich die Kenntnis des Spektrums der elektromagnetischen Wellen im Bereich kleiner Wellenlängen. So wurde auch die elektromagnetische Struktur der γ -Strahlung radioaktiver Stoffe erkannt. Die Spektralanalyse erweiterte dabei nicht nur ihren Bereich, sondern wurde gleichzeitig immer genauer. Sie lieferte eine Fülle von Daten über Emission, Streuung und Absorption von Licht durch Materie. Beim Vergleich der Voraussagen der Lorentz'schen Theorie mit den Daten zeigten sich erste Widersprüche zwischen klassischer Theorie und Erfahrung. Die Probleme traten bei der Untersuchung der Spektralverteilung der elektromagnetischen Strahlung im thermodynamischen Gleichgewicht mit der Materie auf. Die Lösung des Problems gelang MAX PLANCK 1900 und gilt als Geburtsstunde der Quantentheorie. Wir wollen uns nun dieses Problem und seine Lösung etwas näher ansehen.

¹LENARD kam aufgrund seiner Deutung des Durchgangs von Elektronen durch Metallfolien zu ähnlichen Schlüssen wie RUTHERFORD.

1.3 Hohlraumstrahlung

Hier sei nur eine kurze Zusammenfassung gegeben. Mehr Details finden sich im Anhang zu diesem Kapitel und in der Vorlesung über Thermodynamik und Statistik.

Die Wände eines Hohlraums seien auf die (absolute) Temperatur T gebracht. Die Atome in den Wänden wechselwirken mit den elektromagnetischen Wellen im Hohlraum: sie absorbieren und emittieren Wellen. Dabei stellt sich bald ein von T abhängiges Gleichgewicht ein. Die Strahlung im Hohlraum enthält elektromagnetische Schwingungen mit verschiedenen Frequenzen und Wellenzahlvektoren. Um die spektrale Energieverteilung dieser Strahlung zu untersuchen, zerlegen wir das Strahlungsfeld in Normalmoden.

Bekanntlich lassen sich die beiden homogenen Maxwellgleichungen durch Einführung von elektromagnetischen Potentialen lösen

$$\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A} \quad \text{und} \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}. \quad (1.1)$$

Im materiefreien Hohlraum dürfen wir $\phi = 0$ setzen und die Coulombgleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (1.2)$$

wählen. Die verbleibenden Maxwellgleichungen

$$\nabla \wedge \mathbf{B} - \frac{1}{c}\dot{\mathbf{E}} = 0 \quad \text{und} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

sind dann gleichbedeutend mit

$$\frac{1}{c^2}\ddot{\mathbf{A}} - \Delta\mathbf{A} \equiv \square\mathbf{A} = 0. \quad (1.3)$$

Der Hohlraum sei ein Kubus mit Seitenlänge L . Die elektromagnetischen Felder bilden darin stehende Wellen, für die \mathbf{E}_{tang} und \mathbf{B}_{norm} an der Wand verschwinden. Statt mit diesen annähernd realistischen Randbedingungen zu arbeiten², wollen wir periodische Randbedingungen für das Vektorpotential fordern. Die unten angegebene Spektraldichte stimmt dann bis auf Terme der Ordnung $O(\partial V)$ und für die zu berechnenden Dichten verschwindet der Fehler für große Hohlraumvolumina. Nun entwickeln wir \mathbf{A} in eine Fourierreihe,

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in K} \mathbf{a}(t, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \quad \mathbf{a}(t, -\mathbf{k}) = \mathbf{a}^*(t, \mathbf{k}), \quad 0 \leq x_i \leq L,$$

²Für kleine Wellenlängen ist jede realistische Hohlraumwand durchlässig.

wobei wegen der Periodizität des Potentials die Wellenzahlvektoren \mathbf{k} aus

$$K = \left\{ \frac{2\pi}{L}(n_1, n_2, n_3) \mid n_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

sein müssen. Aus der Coulomb-Eichbedingung

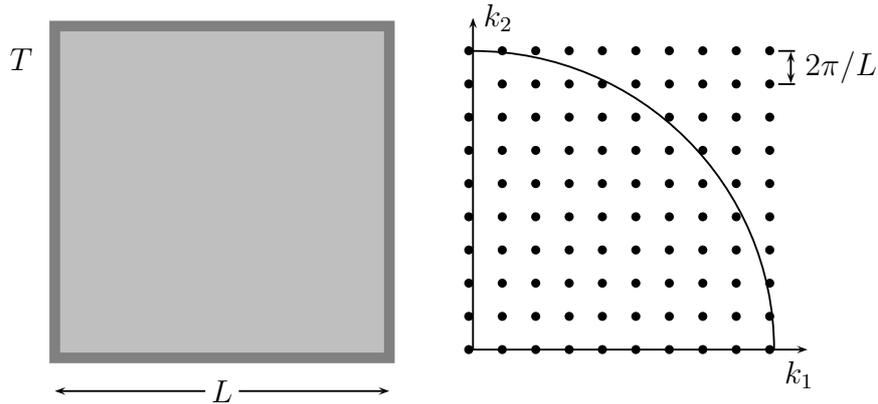


Abbildung 1.2: Hohlraumstrahlung und mögliche Wellenzahlvektoren

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = i \sum \mathbf{k} \cdot \mathbf{a}(t, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = 0$$

folgt, dass \mathbf{a} senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung der Welle steht,

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}(t, \mathbf{k}) = 0.$$

Zu jedem Wellenzahlvektor \mathbf{k} gehören also zwei unabhängige Polarisationsvektoren $\mathbf{a}(t, \mathbf{k})$. Die Polarisation ist senkrecht zur Ausbreitungsrichtung und man sagt, das Strahlungsfeld sei *transversal*³. Mit (1.1) finden wir das elektrische und magnetische Feld:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \sum_K \dot{\mathbf{a}}(t, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = i \sum_K \mathbf{k} \wedge \mathbf{a}(t, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}.$$

Um die Energie des Strahlungsfeldes zu bestimmen, benutzen wir die Orthogonalität der stehenden Wellen im Hohlraum,

$$\int_V d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} = V \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}'}$$

³Der Spezialfall $\mathbf{k} = 0$ verlangt eine separate Behandlung. Aber eine genauere Analyse führt für große Volumen ebenfalls auf die unten bestimmten Dichten.

Man findet nun leicht für die Energie der Hohlraumstrahlung den Ausdruck

$$U = \frac{1}{8\pi c^2} \sum_K (|\dot{\mathbf{a}}(t, \mathbf{k})|^2 + \omega^2(\mathbf{k})|\mathbf{a}(t, \mathbf{k})|^2), \quad \omega = 2\pi\nu = c|\mathbf{k}|. \quad (1.4)$$

Die Größe ω heißt Kreisfrequenz. Die Maxwellgleichungen (1.3) schreiben sich gemäß

$$\square \mathbf{A} = \frac{1}{c^2} \sum_K (\ddot{\mathbf{a}}(t, \mathbf{k}) + \omega^2 \mathbf{a}(t, \mathbf{k})) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = 0,$$

oder äquivalent dazu

$$\ddot{\mathbf{a}}(t, \mathbf{k}) + \omega^2(\mathbf{k}) \mathbf{a}(t, \mathbf{k}) = 0. \quad (1.5)$$

Aus (1.4,1.5) entnehmen wir, dass das Strahlungsfeld im Hohlraum V einem System von unendlich vielen harmonischen Oszillatoren äquivalent ist, und zwar 2 je Wellenzahlvektor.

Spektrale Dichte der Oszillatoren: Wir wollen die Anzahl Freiheitsgrade mit Frequenzen kleiner als $\nu = \omega/2\pi$, gegeben durch

$$N(\nu) = \# \left\{ \mathbf{k} : |\mathbf{k}| < \frac{2\pi\nu}{c} \right\},$$

berechnen. Zu jedem Wellenzahlvektor gibt es 2 Oszillatoren. Das Gitter im \mathbf{k} -Raum hat die Dichte $(L/2\pi)^3$ und wir finden

$$N(\nu) \cong 2 \cdot \frac{4\pi}{3} \left(\frac{2\pi\nu}{c} \right)^3 \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3$$

oder auch

$$N(\nu) \cong \frac{8\pi}{3c^3} V \nu^3. \quad (1.6)$$

Die Anzahl Oszillatoren pro Frequenzintervall um die Frequenz ν ist demnach

$$n(\nu) \equiv \frac{dN(\nu)}{d\nu} = \frac{8\pi}{c^3} V \nu^2. \quad (1.7)$$

Energiedichte: Im thermischen Gleichgewicht ist die mittlere Energie je Oszillator wegen der Isotropie unabhängig von der Polarisierung und der Richtung von \mathbf{k} , also eine Funktion $E(T, \nu)$, die nur von der Temperatur und der Frequenz abhängt. Damit finden

wir für die *Energiedichte* pro Frequenzintervall, auch spektrale Energiedichte genannt,

$$\rho(T, \nu) = \frac{1}{V} n(\nu) E(T, \nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} E(T, \nu). \quad (1.8)$$

Durch eine Kombination von Thermodynamik und Lichttheorie gelang es W. WIEN 1886 zu zeigen (siehe Anhang), dass ρ die folgende funktionale Abhängigkeit von Frequenz und Temperatur haben muss:

$$\rho(T, \nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT P\left(\frac{\nu}{T}\right). \quad (1.9)$$

Man sieht leicht, dass daraus bereits das Stefan-Boltzmannsche Gesetz [10] für die Energie der Hohlraumstrahlung folgt:

$$u(T) = \int \rho(T, \nu) d\nu = \frac{8\pi k}{c^3} T \int \nu^2 P\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu = \frac{8\pi k}{c^3} T^4 \int y^2 P(y) dy \equiv aT^4, \quad (1.10)$$

wobei wir die Variablensubstitution $\nu = Ty$ vornahmen.

Aus dem Vergleich von (1.9) mit der Beziehung (1.8) ergibt sich unmittelbar, dass $E(T, \nu)/kT$ nur eine Funktion des Verhältnisses ν/T sein kann

$$E(T, \nu) = kT P\left(\frac{\nu}{T}\right). \quad (1.11)$$

Einen expliziten Ausdruck für die universelle Funktion P konnte WIEN mit Hilfe lediglich thermodynamischer Überlegungen nicht erhalten.

Rayleigh-Jeans-Formel: Ein sehr allgemeines Gesetz der klassischen Statistik, der *Gleichverteilungssatz*, bietet sich hier geradezu an. Nach diesem Satz kommt auf jeden Freiheitsgrad die mittlere kinetische Energie $kT/2$. Da für einen harmonischen Oszillator diese gleich der mittleren potentiellen Energie ist (siehe Anhang), sollten wir für die mittlere Energie je Oszillator kT wählen. Durch Einsetzen in (1.8) kam RAYLEIGH im Juni 1900 zu folgender Formel:⁴

$$\rho_R(T, \nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT. \quad (1.12)$$

Für *große Wellenlängen* oder kleine Frequenzen hat sich diese Formel als korrekt erwiesen. Allerdings stand sie bei hohen Frequenzen im krassen Widerspruch zu den Messungen von LUMMER, PRINGSHEIM, RUBENS und KURLBAUM [11]. Dass das klassische Ergebnis

⁴RAYLEIGH irrte sich um einen Faktor 8. Dies wurde einige Jahre später von JEANS korrigiert.

(1.12) nicht in Ordnung sein kann, erkennt man auch, wenn man damit die Energiedichte der elektromagnetischen Strahlung im Hohlraum zu berechnen versucht:

$$u = \int \rho_{\text{R}} d\nu = \frac{8\pi}{c^3} kT \int_0^{\infty} \nu^2 d\nu = \infty.$$

Diese *Ultraviolett Katastrophe* wie auch die Diskrepanz zwischen (1.12) und den experimentellen Daten zeugen eindeutig vom Versagen der klassischen Physik bei der Erklärung der Hohlraumstrahlung.

Wiensches Strahlungsgesetz: Unter der Annahme, dass ein Zusammenhang zwischen dem Strahlungsgesetz und der Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung existieren müsse, wobei die Geschwindigkeit durch eine nur von der Frequenz abhängige Größe ersetzt werden sollte, hat WIEN die folgende spektrale Energiedichte angegeben [13]:

$$\rho_{\text{W}}(T, \nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot h\nu e^{-h\nu/kT} = \rho_{\text{R}}(T, \nu) \cdot x e^{-x}, \quad x = \frac{h\nu}{kT}. \quad (1.13)$$

Die Größe x muß dimensionslos sein und deshalb ist $h\nu$ eine Energie. Die hier auftretende Naturkonstante h ist das *Plancksche Wirkungsquantum*. Oft führt man das reduzierte Wirkungsquantum

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \quad (1.14)$$

ein, so dass $h\nu = \hbar\omega$ gilt. Die theoretische Begründung der Wienschen Spektraldichte war äußerst unbefriedigend, und PLANCK versuchte ihr in den Jahren 1897 bis 1899 ein besseres theoretisches Fundament zu geben. Das Gesetz stimmt für *kurze Wellenlängen* (große x) sehr gut, aber mit den oben erwähnten Messungen konnte eindeutig seine begrenzte Gültigkeit nachgewiesen werden.

1.3.1 Plancksches Strahlungsgesetz

Im Herbst 1900 stellte sich die Situation in Bezug auf die schwarze Strahlung wie folgt dar. Es existieren zwei theoretisch abgeleitete Gesetze, das Wien-Planck-Gesetz und das Rayleigh-Jeans-Gesetz. Die theoretische Herleitung des ersteren ist problematisch, und eine Übereinstimmung mit den Experimenten wird nur bei hohen Frequenzen erreicht. Das Rayleigh-Jeans-Gesetz steht auf einer festeren theoretischen Grundlage, denn es stützt sich auf ein sehr allgemeines Prinzip der klassischen Statistik, den Gleichverteilungssatz.

Trotzdem stimmt das Gesetz nur für kleine Frequenzen mit den Beobachtungen überein. Um die beiden Lösungen zu kombinieren, hat nun PLANCK zwischen ρ_R und ρ_W interpoliert [12] (tatsächlich hat er die zweiten Ableitungen der Entropie nach der Energie auf möglichst einfache Weise miteinander verbunden), was auf das *Plancksche Strahlungsgesetz*

$$\rho(T, \nu) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} = \rho_R(T, \nu) \frac{x}{e^x - 1} \quad \text{oder} \quad E(T, \nu) = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (1.15)$$

führt. In der Abbildung (1.3) ist die Spektraldichte für drei Temperaturen geplottet. Folgende Eigenschaften dieser Formel dienen als Hinweise für ihre Richtigkeit:

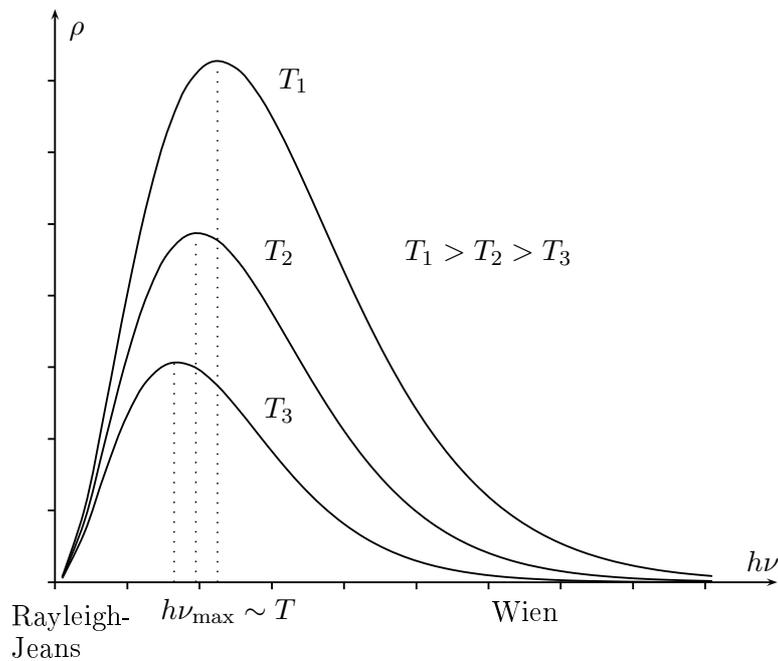


Abbildung 1.3: Frequenzverteilung der Wärmestrahlungsintensität für 3 verschiedene T

- Im Nieder- und Hochfrequenzbereich gelten ($x = h\nu/kT$)

$$\frac{x}{e^x - 1} \longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{falls } x \rightarrow 0 \\ xe^{-x} & \text{falls } x \rightarrow \infty, \end{cases}$$

in Übereinstimmung mit der Formeln von Rayleigh-Jeans und Wien.

- PLANCK konnte aus dem Experiment bekannten Stefan-Boltzmann-Konstanten und

der Konstanten im Wienschen Verschiebungsgesetz

$$\sigma = \frac{ca}{4} = 5.67051(19) \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$$

$$x_{\max} = \frac{\nu_{\max}}{T} = 5.88 \cdot 10^{10} \text{ Hz K}^{-1}$$

die Boltzmann-Konstante k und Plancksche Konstante h wie folgt bestimmen: Mit seiner Formel für die spektrale Energiedichte ist die Konstante a im Stefan-Boltzmann-Gesetz (1.10) gegeben durch

$$a = T^{-4} \int \rho(\nu, T) d\nu = 8\pi k \left(\frac{k}{hc} \right)^3 \int \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^2}{15} \frac{k^4}{(\hbar c)^3}$$

und für die Konstante im Verschiebungsgesetz (siehe Anhang) ergibt sich

$$\frac{\nu_{\max}}{T} = x_{\max} \frac{k}{h} \sim 2.8221 \frac{k}{h}.$$

Nach Vergleich mit den experimentellen Werten ergeben sich daraus die Naturkonstanten k und h , deren heutigen Werte

$$\begin{aligned} k &= 1.380658(12) \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1} \\ h &= 6.6260755(40) \cdot 10^{-34} \text{ J s} \end{aligned} \quad (1.16)$$

sind. Aus der Boltzmann- und Gaskonstanten folgt die Loschmidtsche Zahl,

$$N_A = \frac{R}{k} \sim 6.0221367(36) \cdot 10^{23} \text{ Mol}^{-1},$$

und schließlich ergibt sich aus der Loschmidtschen Zahl und Faraday-Konstanten die elektrische Ladung des Elektrons

$$e = F/N_A = 1.60217733(49) \cdot 10^{-19} \text{ C}.$$

- Das Plancksche Strahlungsgesetz beschreibt die spektrale Energieverteilung der schwarzen Strahlung im gesamten Frequenzbereich richtig.

RUBENS und KURLBAUM haben 1901 die verschiedenen Strahlungsformeln überprüft und Plancks Formel für richtig befunden [14]. Das physikalische Problem, dessen Lösung die Quantentheorie gebar, war, $E(T, \nu)$ zu erklären.

1.4 Lichtquanten

Zahlreiche in ihrer Beweiskraft zwingende Versuche haben gezeigt, dass das Licht ein Wellenvorgang ist. Es gibt jedoch eine Reihe genauso überzeugender Versuche, die sich mit einer solchen Vorstellung nicht erklären lassen. Man versteht sie aber sofort mit der Annahme, dass das Licht aus *Photonen* besteht, die qualitativ ähnliche Eigenschaften haben wie materielle Teilchen.

1.4.1 Einsteins Lichtquantenhypothese

Die Einsteinsche Lichtquantenhypothese (1905) besagt, dass die von einer elektromagnetischen Welle der Frequenz ν transportierte Energie immer ein ganzzahliges Vielfaches von $h\nu = \hbar\omega$ ($\hbar = h/2\pi$) ist [15]. EINSTEIN wurde über die Analyse der für große Frequenzen gültigen Wienschen Strahlungsformel auf die Lichtquantenhypothese geführt. Er war sich der Radikalität seiner Hypothese bewusst und suchte nach Möglichkeiten der experimentellen Bestätigung. Eine solche findet man im *lichtelektrischen Effekt* (*Photoeffekt*), den wir im folgenden Abschnitt besprechen werden.

Doch zuerst wenden wir die Lichtquantenhypothese auf die Hohlraumstrahlung an. Wir nehmen an, dass zur Beschreibung des thermischen Gleichgewichts der Strahlung das Boltzmann-Gibbssche Postulat gültig sei: im thermischen Gleichgewicht bei der Temperatur T ist die Wahrscheinlichkeit eines Zustandes mit Energie E proportional zu

$$e^{-\beta E}, \quad \beta = \frac{1}{kT}.$$

Mit der Lichtquantenhypothese findet man dann für die mittlere Energie eines Oszillators mit Frequenz ν die Formel

$$E(T, \nu) = \sum_{n=0}^{\infty} (nh\nu) w_n$$

$$w_n = \frac{e^{-\beta nh\nu}}{Z}, \quad Z = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\beta mh\nu} = \frac{1}{1 - e^{-\beta h\nu}}.$$

Daraus berechnet sich nun die mittlere Energie gemäß

$$E(T, \nu) = -\frac{d}{d\beta} \log Z = \frac{h\nu e^{-\beta h\nu}}{1 - e^{-\beta h\nu}} = \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1}$$

in Übereinstimmung mit der Planckschen Strahlungsformel (1.15).

1.4.2 Lichtelektrischer Effekt (Photoeffekt)

1888 bestrahlte *W. Hallwachs* negativ geladene Metallplatten mit ultraviolettem Licht und stellte mit dem angeschlossenen Elektrometer fest, dass diese Ladung allmählich verschwand [16]. Eine positive Ladung blieb dagegen erhalten. Allgemein löst hinreichend kurzwelliges Licht aus Metalloberflächen negative Ladungsträger, nämlich die 1897 von *J.J. THOMSON* entdeckten *Elektronen*, aus. Die Stärke des Stromes ist proportional zur Intensität der Strahlung, vorausgesetzt, die Frequenz des Lichts ist größer als eine für das bestrahlte Metall charakteristische kritische Frequenz ν_c . *LENARD* fand 1902 den klassisch unerklärlichen Effekt, dass die mit einer Gegenspannung gemessene Energie der Elektronen nur von der Frequenz der Strahlung, nicht aber von ihrer Intensität abhängt [17].

EINSTEIN erklärte dies 1905 mit Hilfe seiner Lichtquantenhypothese und dem Energiesatz wie folgt: die einfallende Strahlung besteht aus Lichtquanten (Photonen), die eine Energie $h\nu$ haben. Ein Elektron im Metall kann nun ein Photon absorbieren und gewinnt dabei nach dem Energiesatz die Energie $h\nu$. Nach Abzug der Austrittsarbeit W bleibt dem austretenden Elektron noch die kinetische Energie

$$\frac{1}{2}m_e v^2 = h\nu - W \implies \nu \geq \nu_c = \frac{W}{h}.$$

Offensichtlich hängt die Bewegungsenergie der austretenden Elektronen nur von der Frequenz des eingestrahnten Lichts oder der Energie der auftreffenden Photonen ab. Dieses Gesetz wurde von *MILLIKAN* 1916 bestätigt [18]. Die Konstante h hat genau denselben Wert wie die im Ausdruck für das Spektrum der Hohlraumstrahlung auftretende Konstante. *EINSTEIN* erhielt 1921 für seine Erklärung des Photoeffektes den Nobelpreis. Die klassische Wellentheorie ist nicht in der Lage, den Photoeffekt zu erklären (siehe *MESSIAH* I, Seite 23).

1.4.3 Comptoneffekt

Wenn wir die Energie $E = h\nu$ der mit Materie wechselwirkenden Photonen allmählich steigern, wird zuerst das Stadium der Absorption durch den Photoeffekt an gebundenen Elektronen durchlaufen. Ist schließlich E wesentlich größer als die Elektronenbindung, so wird die Absorption abgelöst durch die Streuung an quasifreien Elektronen. Dieser Effekt wurde 1922 von *COMPTON* entdeckt [19], wofür er 1927 den Physik-Nobelpreis erhielt. Für einen geradlinig durch Materie gehenden Strahl bedeutet die Streuung durch den Compton-Effekt eine Schwächung wie die Absorption durch den Photoeffekt.

Elektromagnetische Strahlung breitet sich mit Lichtgeschwindigkeit aus. Nach den Formeln der relativistischen Mechanik ist

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \sim mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots,$$

und da mit $h\nu$ die Energie eines Photons beliebig klein werden kann, muß ein Lichtquant verschwindende Ruhemasse haben. Nun gilt allgemein, dass

$$E^2 - (c\mathbf{p})^2 = (mc^2)^2, \quad (1.17)$$

also für Lichtquanten mit Frequenz ν

$$|\mathbf{p}| = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \hbar|\mathbf{k}|,$$

wobei \mathbf{k} der Wellenzahlvektor ist. Dies kann man auch der Maxwell'schen Theorie entnehmen. Für eine monochromatische Welle,

$$\mathbf{E} = \Re\left(\vec{\mathcal{E}} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)}\right), \quad \mathbf{B} = \Re\left(\frac{c}{\omega}(\mathbf{k} \wedge \vec{\mathcal{E}}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)}\right),$$

wobei $\vec{\mathcal{E}} \perp \mathbf{k}$ und $\omega = c|\mathbf{k}|$ gilt, zeigt eine kurze Rechnung, dass

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \cdot u \implies u = \frac{1}{c} |\mathbf{S}| \quad (1.18)$$

gilt, wobei

$$u = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \quad \text{und} \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$$

die Energiedichte und der Poynting-Vektor (die Impulsdichte) sind. Wenden wir dies auf einen Quant des Strahlungsfeldes der Energie $h\nu$ an, dann folgt

$$\mathbf{p} \stackrel{(1.18)}{=} \frac{1}{2\pi\nu} \mathbf{k} \cdot h\nu = \frac{h}{2\pi} \mathbf{k} \equiv \hbar\mathbf{k}.$$

Also sind die Energie und der Impuls eines Photons

$$E = h\nu = \hbar\omega \quad \text{und} \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}. \quad (1.19)$$

Glaukt man an die unbeschränkte Gültigkeit des Energie-Impuls-Erhaltungssatzes, so kann man die Formeln (1.19) bei Stößen von Lichtquanten an Teilchen, z.B. Elektronen, testen. In der Tat hat die Photonenvorstellung folgenden zunächst rätselhaften Effekt

aufgeklärt: Monochromatisches Röntgenlicht wird durch Materie gestreut, und zwar im Gegensatz zum sichtbaren Licht unter Vergrößerung seiner Wellenlänge. Die Wellenlänge des Streulichts ist um so größer, je größer der Streuwinkel θ ist. Rückwärtsstreuung mit $\theta = \pi$ liefert eine Wellenlängenzunahme um $4.85 \text{ pm} = 0.0485 \text{ \AA}$ (ngström), unabhängig von der eingestrahnten Wellenlänge⁵. Die fehlende Energie wird von den auftretenden ‘Rückstoßelektronen’, die beim Streuprozess aus dem Atom des streuenden Materials herausgeschlagen werden, weggetragen.

Betrachten wir nun die Kollision zwischen einem längs der x -Achse einlaufenden Photon mit Energie $h\nu$ und Impuls $\hbar k_x = h/\lambda$ und einem ruhenden Elektron, $\mathbf{p} = 0$. Die

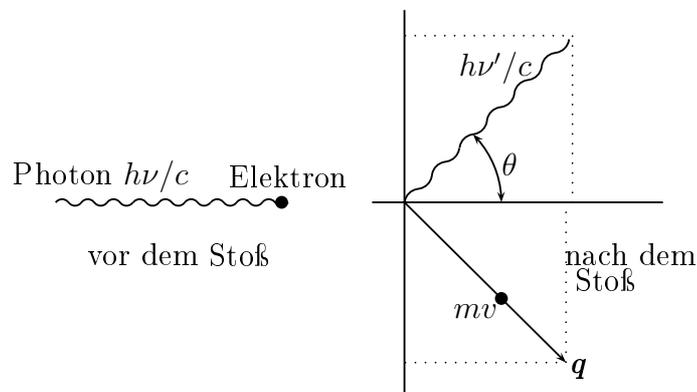


Abbildung 1.4: Die Streuung eines Photons an einem ruhenden Elektron. Die Erhaltungssätze für Energie und Impuls sind auch mikroskopisch streng gültig.

Impulserhaltung impliziert

$$\begin{aligned} \frac{h}{\lambda} &= q_x + \frac{h}{\lambda'} \cos \theta \\ 0 &= q_y + \frac{h}{\lambda'} \sin \theta \end{aligned}$$

und die Energieerhaltung

$$mc^2 + \frac{hc}{\lambda} = c\sqrt{m^2c^2 + q_x^2 + q_y^2} + \frac{hc}{\lambda'}$$

Bringen wir den rechten Term in der Energiebilanz nach links, dividieren durch c und

⁵ $1 \text{ \AA} (\text{ngström}) = 10^{-10} \text{ m} = 0.1 \text{ nm}$ und $1 \text{ Fermi} = 10^{-15} \text{ m} = 1 \text{ fm}$ sind Atom- und Kerndimensionen.

quadrieren, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \left(mc + h \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) \right)^2 &= (mc)^2 + q_x^2 + q_y^2 \\ &= (mc)^2 + h^2 \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\cos \theta}{\lambda'} \right)^2 + \left(\frac{h \sin \theta}{\lambda'} \right)^2, \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Gleichung die Impulserhaltung benutzten. Nach Ausmultiplikation ergibt sich

$$mc(\lambda' - \lambda) = h(1 - \cos \theta)$$

oder mit $1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \theta/2$ die Beziehung

$$\lambda' - \lambda = \Delta\lambda = \frac{2h}{mc} \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (1.20)$$

Das Experiment bestätigt diese Formel glänzend; speziell ist $2h/mc$ der bei einer Rückstreuung gefundene Wert von 0.0485\AA . Die Hälfte davon,

$$\lambda_c = \frac{h}{mc} = 0.0243\text{\AA}, \quad (1.21)$$

heißt *Compton-Wellenlänge des Elektrons*. Ein Photon mit Wellenlänge λ_c hat die Energie $h\nu = hc/\lambda_c = mc^2$, also die der Ruhemasse des Elektrons entsprechende Energie. Es würde bei Rückwärtsstreuung seine Wellenlänge verdoppeln. Die Annahme eines gestoßenen Elektrons in Ruhe ist gerechtfertigt, solange gilt

$$\frac{h}{\lambda} \gg |\mathbf{p}|.$$

1.5 Materiewellen

Die Schwierigkeit der klassischen Physik mit kleinen Strukturen, man denke an die Instabilität des Atoms, führten LOUIS DE BROGLIE auf die Idee, dass es in der Optik ähnlich sei [20]⁶: Für Beugung und Streuung von Licht an Objekten, die gross verglichen mit der Wellenlänge sind, kann man die Lichtausbreitung mit den Methoden der geo-

⁶de Broglie formulierte diese These 1923 in seiner Doktorarbeit. Sie war so revolutionär, dass der Prüfungsausschuss völlig im Dunkeln darüber tappte, was davon zu halten sei. Der bekannte Physiker Paul Langevin sandte ein Exemplar der Arbeit an Einstein mit der Bitte um Kritik. Auf Grund Einsteins positiver Fürsprache wurde die Arbeit akzeptiert.

metrischen Optik (Strahlenoptik) beschreiben, genauso wie in der klassischen Mechanik die Teilchenausbreitung mit klassischen Bahnen. Erst für kleine Objekte offenbart das Licht seinen Wellencharakter und Beugungserscheinungen treten auf. Sind auch Teilchen in Wirklichkeit *Materiewellen*? Falls ja, müssen die Frequenz und Wellenlänge der postulierten Materiewelle auf ganz bestimmte Weise mit den Teilchenparametern wie Masse und Impuls zusammenhängen.

Da auch Licht aus Teilchen, den Photonen, mit Energie

$$E = h\nu \quad (1.22)$$

besteht, ist es naheliegend diesen Zusammenhang für beliebige Teilchen zu übernehmen. Ein massives Teilchen, zum Beispiel ein Elektron, hat in seinem Ruhesystem die Energie $E_0 = m_0c^2$ und Frequenz

$$\nu_0 \stackrel{(1.22)}{=} m_0c^2/h. \quad (1.23)$$

Dem ruhenden Teilchen werde eine stationäre Welle

$$\psi = \psi_0 e^{2\pi i\nu_0 t} = \psi_0 e^{i\omega_0 t}$$

zugeordnet. In einem Inertialsystem, welches sich bezüglich dem Ruhesystem mit der Geschwindigkeit v in die negative x -Richtung bewegt, hat ein Punkt (t, x) die Koordinaten

$$t' = \gamma \left(t + \frac{v}{c^2} x \right) \quad , \quad x' = \gamma(vt + x), \quad \text{wobei} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

der relativistische γ -Faktor ist. In diesem System bewegt sich das Teilchen mit Geschwindigkeit v in die x -Richtung und wegen

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -v/c^2 \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix}$$

hat die Wellenfunktion in diesem System die Gestalt

$$\psi = \psi_0 e^{i\omega_0 t} = \psi_0 e^{i\omega_0 \gamma(t' - vx'/c^2)} = \psi_0 e^{i(\omega' t' - k' x')}.$$

Ein mit v bewegtes Teilchen hat also die Frequenz und den Wellenzahlvektor

$$\nu = \gamma\nu_0 \quad \text{und} \quad k = \frac{\omega_0 v}{c^2} \gamma.$$

Mit $\lambda = 2\pi/k$ findet man auch

$$\lambda = \frac{1}{\gamma} \frac{c^2}{\nu_0 v} \stackrel{(1.23)}{=} \frac{h}{p}, \quad \text{wobei } p = \gamma m_0 v$$

der relativistische Teilchenimpuls ist. Berücksichtigen wir noch, dass die Energie eines Teilchens gleich $E = \gamma m_0 c^2 = \gamma h \nu_0$ ist, so finden wir folgende Beziehungen zwischen den *Teilchengrößen* Energie und Impuls und den zugeordneten *Welleneigenschaften* Kreisfrequenz und Wellenzahlvektor:

$$E = \hbar \omega \quad \text{und} \quad \mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{v} = \hbar \mathbf{k}. \quad (1.24)$$

Wird ein Elektron aus der Ruhe auf die Geschwindigkeit $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m$ gebracht, indem man es eine Potentialdifferenz U durchlaufen lässt, so gilt gemäß dem Energiesatz im nichtrelativistischen Grenzfall

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2m} = eU \quad \text{mit} \quad \mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}, \quad |\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Aufgelöst nach der de Broglie-Wellenlänge des Elektrons,

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2meU}} \sim \left(\frac{150}{U[\text{V}]} \right)^{1/2} \text{ \AA}.$$

Für eine Spannung von 100 – 1000 Volt liegt diese im Röntgenbereich.

1.5.1 Elektronenstreuung

Wenn die Bewegung von Teilchen durch Materiewellen beschrieben wird, müssten sich auch Beugungs- und Interferenzerscheinungen nachweisen lassen. Dies wird in der Tat beobachtet. Allerdings wurde die Wellennatur der Elektronen erst nach Schaffung der Quantenmechanik überzeugend nachgewiesen. C. DAVISSON und L. GERMER sahen 1927 deutliche Interferenzmaxima bei der Reflexion von Elektronen an Nickeleinkristallen [21]. Im gleichen Jahr konnte G.P. THOMSON an Interferenzen beim Durchgang von Elektronen durch dünne Metallfolien die Beziehung von DE BROGLIE, $\lambda = h/mv$, gut prüfen und bestätigen [22]⁷. Auch bei Atomstrahlen wurden 1929 Andeutungen von Interferenzen gefunden, nämlich von O. STERN bei He-Strahlen an Steinsalzkrystallen [23], deutlichere von I. ESTERMANN und O. STERN mit He- und H₂-Strahlen an LiF-Kristallen [24].

⁷J.J. Thomson erhielt den Nobelpreis für den Nachweis, dass Elektronen Teilchen sind und sein Sohn G.P. Thomson für den Nachweis, dass sie Wellen sind.

Der Wellencharakter von Elektronen ist uns heutzutage von Elektronenmikroskopen [25] her wohlbekannt. Im Elektronenmikroskop begrenzt die de Broglie-Wellenlänge des Elektrons genauso das Auflösungsvermögen wie die optische Wellenlänge das im Lichtmikroskop. Das wohl einfachste Experiment, welches diesen Wellencharakter zeigt, ist die Streuung von Elektronen an einem langen, geraden und positiv geladenen Faden, siehe Abbildung (1.5). Das Biprisma von DÜKER und MÖLLENSTEDT trennt zwei Strahlen freier Elektronen, die aus der gleichen Quelle kommen, und lässt sie dann fast parallel wieder zusammenlaufen [26]. Als Quelle dient das elektronenoptisch auf 50nm verkleinerte Bild einer Elektronenquelle. Die Elektronen fliegen an einem positiv geladenen Metallfaden vorbei und werden von ihm zur Mitte hin abgelenkt. Man kann sich überzeugen, dass im Feld eines langen geraden Drahtes der Gesamtablenkwinkel nicht von dem Abstand abhängt, in dem das Elektron den Draht passiert, sondern nur von seiner Energie. Aus dem beobachteten Interferenzmuster für Elektronen mit 1eV kann man deren Wellenlänge bestimmen. Man misst $\lambda = 1.2\text{ nm}$. Dies ist genau die Wellenlänge, die wir aufgrund der de Broglie-Beziehung erwarten. Das erste *Doppelspalterexperiment* mit Elektronen wurde

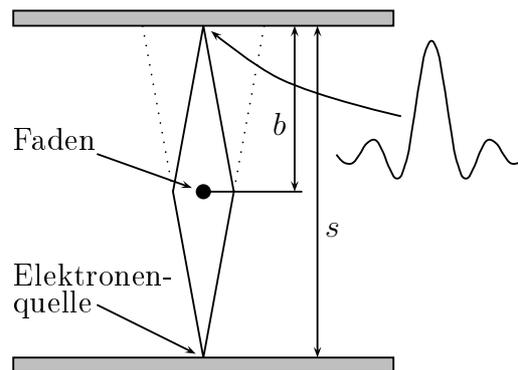


Abbildung 1.5: Elektronenbeugung am 'Biprisma' nach Düker und Möllenstedt [26].

von C. JÖNSSON 1960 in Tübingen durchgeführt⁸ [27] und danach schrittweise verbessert [28]. Elektronen wechselwirken stark mit Materie und auch deshalb verwendet man gerne Neutronen in Interferenzversuchen [29]. Da Neutronen etwa 2000-mal schwerer als Elektronen sind, müssen nach $\lambda = h/mv$ diese sehr langsam sein, damit ihre Wellenlänge noch messbar ist.

⁸In einer Umfrage des Organs der englischen physikalischen Gesellschaft „Physics World“ nach dem schönsten Experiment aller Zeiten, kam der Versuch von Claus Jönsson auf den ersten Platz.

1.6 Quantisierungsregeln von Bohr-Sommerfeld

Die ältere Quantentheorie beruht auf folgendem Verfahren: Man nehme an, dass Systeme materieller Teilchen den Gesetzen der klassischen Mechanik folgen. Man postuliere aber darüber hinaus, dass von allen Lösungen der Bewegungsgleichungen nur diejenigen übrig bleiben sollten, die bestimmten, *ad hoc* eingeführten Quantisierungsregeln genügen [30]. Die Regeln sondern spezielle Bewegungen aus, die auf Grund der Hypothese als allein realisierbar vorausgesetzt werden. Zu jeder dieser Bewegungen gehört ein bestimmter Wert der Energie. Die so ermittelten diskreten Energiewerte bilden das quantisierte Energiespektrum. In derselben Weise erhält man ein Spektrum von erlaubten Werten für die anderen Konstanten der Bewegung.

Das Aufstellen der 'Quantisierungsregeln' war vor allem eine Sache der Intuition: Man postulierte gewisse Regeln und verglich die sich daraus ergebenden Energiespektren mit den Experimenten. Bei dieser Suche spielte das Bohrsche Korrespondenzprinzip eine wertvolle Rolle. Dieses Prinzip besagt, dass die klassische Theorie makroskopisch richtig ist, d.h. im Grenzfall, wo die quantenhaften Unstetigkeiten noch als unendlich klein angesehen werden können. Oder anders ausgedrückt:

*Die Quantentheorie muss für große Quantenzahlen
asymptotisch in die klassische Theorie übergehen⁹.*

Insbesondere die Hohlraumstrahlung gehorcht dem Korrespondenzprinzip: Für hohe Temperaturen, $kT \gg h\nu$, wenn die typische Energie der Strahlungsmoden wesentlich größer als die Energiedifferenz $h\nu$ ist, geht die Plancksche Strahlungsformel in die klassische Strahlungsformel von Rayleigh-Jeans über.

Für periodische Systeme führt das Korrespondenzprinzip auf natürliche Weise zu folgender Quantisierungsbedingung:

$$S = \oint pdq = nh \quad (\text{PLANCK 1911, BOHR, SOMMERFELD 1913-17}) \quad (1.25)$$

Hier bedeutet \oint das Integral über eine volle Periode der Bewegung mit der Energie E . Offensichtlich ist S die von der Bahn eingeschlossene Fläche im Phasenraum, hat die Dimension einer Wirkung und wird Wirkungsintegral genannt.

Wir wollen diese Quantisierungsregel nun auf die *Oszillatoren der Hohlraumstrahlung* anwenden: Wir haben gesehen, dass die Moden mit Kreisfrequenz $2\pi\nu$ folgende Energie

⁹Eventuell muss man einige quantenmechanische Zustände mit großen Quantenzahlen überlagern, um einen klassischen Zustand zu erhalten.

haben,

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2).$$

Die Lösungen der Bewegungsgleichung $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$ sind

$$\begin{aligned} q(t) &= \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t \\ p(t) &= \omega \beta \cos \omega t - \omega \alpha \sin \omega t \end{aligned}$$

und haben die Energie $\frac{1}{2}\omega^2(\alpha^2 + \beta^2)$. Das Wirkungsintegral ist

$$S = \oint p dq = \oint p \dot{q} dt = \omega \pi (\alpha^2 + \beta^2).$$

Nach der Quantisierungsregel $S = nh$ muss also

$$H = \frac{\omega}{2\pi} \omega \pi (\alpha^2 + \beta^2) = \frac{\omega}{2\pi} nh = nh\nu$$

gelten, d.h. die Einsteinsche Lichtquantenhypothese folgt aus der Bedingung (1.25).

1.6.1 Bohrsches Modell des Wasserstoffatoms

Das Rutherfordsche Atommodell beschreibt wasserstoffähnliche Atome als einen winzigen Kern mit positiver Ladung Ze , um den das Elektron auf einer „Planetenbahn“ kreist. Am Elektron greift infolge der Kernladung Ze die Kraft

$$F_e = \frac{Ze^2}{r^2}$$

an, die entgegengesetzt gleich der Zentrifugalkraft

$$F_z = m\omega^2 r$$

ist. Entsprechend gilt

$$m\omega^2 r^3 = Ze^2. \tag{1.26}$$

Wird das umlaufende Elektron durch eine Welle beschrieben, dann entspricht seinem Impuls p eine Wellenlänge $\lambda = h/mv$. Man kann sich nun leicht vorstellen, dass nur solche Wellen erlaubt sind, bei denen auf den Umfang der entsprechenden Bahn eine ganze Anzahl von Wellenlängen passt; nur so entsteht eine stehende Welle und interferiert sich

nicht weg. Also muss gelten

$$2\pi r = n\lambda = n\frac{h}{mv} = n\frac{h}{m\omega r}. \quad (1.27)$$

Nun quadrieren wir diese Beziehung und eliminieren ω mit Hilfe von (1.26) mit dem Resultat

$$r_n = \frac{n^2\hbar^2}{Zme^2}.$$

Eingesetzt in (1.26) finden wir die erlaubten Kreisfrequenzen

$$\omega_n = \frac{mZ^2e^4}{n^3\hbar^3}.$$

Für die entsprechenden Energien findet man

$$E_n = \frac{m}{2}v_n^2 - \frac{Ze^2}{r_n} = \frac{m}{2}\omega_n^2 r_n^2 - \frac{Ze^2}{r_n} = -\frac{Z^2me^4}{2n^2\hbar^2}.$$

Führen wir den Bohrschen Radius und die Rydberg-Energie gemäß

$$\begin{aligned} r_B &= \frac{\hbar^2}{me^2} = 0.529 \cdot 10^{-8} \text{ cm} = 0.529 \text{ \AA} \\ \text{Ry} &= \frac{me^4}{2\hbar^2} = 13.6 \text{ eV} \end{aligned} \quad (1.28)$$

ein, so ergeben sich für die erlaubten Radien und Energien die Formeln

$$r_n = \frac{n^2}{Z} \cdot r_B \quad \text{und} \quad E_n = -\frac{Z^2}{n^2} \cdot \text{Ry}. \quad (1.29)$$

Je größer die Quantenzahl, desto ausgedehnter ist das Atom und desto dichter liegen die Energiewerte E_n . Zu denselben Schlüssen kommt man übrigens auch vermittels der Bohr-Sommerfeldschen Quantenbedingungen. Es ergeben sich drei Bedingungen der Art $\oint pdq = nh$, da das Elektron zu einer räumlichen Bewegung fähig ist. Da die zugrunde liegenden Annahmen heute überholt sind, wollen wir diese Rechnung hier nicht durchführen.

Die Bohrschen Postulate: Als neue, mit der klassischen Physik unvereinbare Postulate führte BOHR 1913 zur Deutung der Lichtemission folgende Postulate ein [30, 31]:

- Für jedes Atom gibt es eine Anzahl stationärer Zustände, in denen das Atom nicht

strahlt. Eine Änderung seines Energieinhaltes kann nur durch Übergang von einem stationären Zustand in einen anderen erfolgen.

- Die Frequenz der bei einem Übergang zwischen zwei stationären Zuständen ausgestrahlten oder absorbierten Wellen genügt der Bedingung

$$h\nu = E_m - E_n, \quad (1.30)$$

wobei E_n und E_m die Energien der stationären Zustände sind.

Nach diesen Postulaten kann ein Wasserstoffatom ($Z = 1$) also nur Licht mit den Frequenzen

$$\nu(n, m > n) = \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) R_\infty, \quad \text{wobei} \quad R_\infty = \frac{\text{Ry}}{h} = 3.2899 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1} \quad (1.31)$$

die Rydbergfrequenz ist, emittieren oder absorbieren. Für festes n erhält man verschiedene Serien von möglichen Frequenzen oder Wellenlängen. Die niedrigsten sind

Lyman-Serie (1906) im Ultravioletten [32]:

$$\nu(1, m) = R_\infty \left(1 - \frac{1}{m^2} \right), \quad \lambda_0 = 121,568 \text{ nm}, \quad \lambda_\infty = 91,176 \text{ nm}.$$

Balmer-Serie (1885) im Sichtbaren [33]:

$$\nu(2, m) = R_\infty \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{m^2} \right), \quad \lambda_0 = 656,470 \text{ nm}, \quad \lambda_\infty = 364,705 \text{ nm}.$$

Paschen-Serie (1908) im Infraroten [34]:

$$\nu(3, m) = R_\infty \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{m^2} \right), \quad \lambda_0 = 1.875,628 \text{ nm}, \quad \lambda_\infty = 820,587 \text{ nm}.$$

Brackett-Serie (1922) im Infraroten [35]:

$$\nu(4, m) = R_\infty \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{m^2} \right), \quad \lambda_0 = 4.052,283 \text{ nm}, \quad \lambda_\infty = 1458.822 \text{ nm}.$$

Pfund-Serie (1924) im Ultraroten [36]:

$$\nu(5, m) = R_\infty \left(\frac{1}{25} - \frac{1}{m^2} \right), \quad \lambda_0 = 7.459,884 \text{ nm}, \quad \lambda_\infty = 2.279,409 \text{ nm}.$$

Ähnliche Serienformeln findet man für die wasserstoffähnlichen Ionen He^+ , Li^{++} , ...

1.7 Emission, Absorption und Strahlungsgesetz

Die Strahlung im Hohlraum ist in Kontakt mit den Atomen der begrenzenden Wände. Ausgehend von der Bohrschen Atomtheorie nahm EINSTEIN bei der Herleitung der Formel für $\rho(T, \nu)$ an [37]:

- dass Atome Energie nur in wohldefinierten Beträgen aufnehmen oder abgeben können. Diese Beobachtung führte zur Annahme, dass Atome Zustände mit *diskreten Energien*

$$E_1 < E_2 < \dots < E_k < \dots$$

annehmen. Durch *Absorption von Licht* der Energie $h\nu = E_l - E_k$ kann das Atom im Zustand k mit Energie E_k in einen Zustand l mit größerer Energie E_l angeregt werden. Durch *Emission von Licht* derselben Frequenz kann l dann wieder in k 'zerfallen'.

- Die Zahl der Atome im Energieniveau E_k ist

$$N_k = A e^{-\beta E_k} \quad A \quad \text{aus} \quad \sum_k N_k = N_{\text{tot}}, \quad \beta = 1/kT.$$

Nun stellen wir die verschiedenen Möglichkeiten des Energieaustausches zwischen Atomen und Strahlung zusammen und geben die Häufigkeit der entsprechenden Ereignisse an:

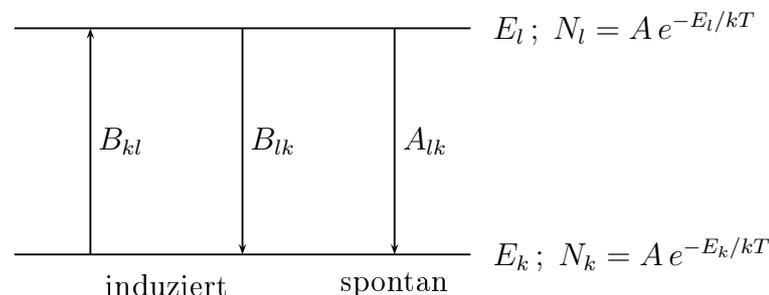


Abbildung 1.6: Übergangsraten mit entsprechenden Einsteinkoeffizienten.

- *Absorption:* Die Übergangsrate von k nach l durch Absorptionsprozesse ist proportional zu N_k und zur Intensität der Strahlung im entsprechenden Frequenzbereich

$$\dot{N}_{kl}^{\text{abs}} = B_{kl}\rho(T, \nu) \cdot N_k.$$

- *Induzierte Emission:* Man erwartet, dass es zum Prozess der induzierten Absorption auch den Umkehrprozess gibt: Das Strahlungsfeld sollte Übergänge aus dem Zustand l in den Zustand k induzieren. Diese induzierte (erzwungene) Emission ist entscheidend für das Funktionieren von Maser und Laser. Sie ist proportional zu N_l und ρ :

$$\dot{N}_{lk}^{\text{ind}} = B_{lk}\rho(T, \nu) \cdot N_l$$

- *Spontane Emission:* Angeregte Atome können auch spontan zerfallen wenn kein Strahlungsfeld vorhanden ist, ähnlich wie Atomkerne radioaktiv zerfallen können. Die Emissionsrate von l ist proportional zu N_l und entsprechend

$$\dot{N}_{lk}^{\text{spontan}} = A_{lk} \cdot N_l.$$

Die Gleichgewichtsbedingung lautet

$$\dot{N}_{kl}^{\text{abs}} = \dot{N}_{lk}^{\text{ind}} + \dot{N}_{lk}^{\text{spontan}}$$

oder

$$\rho(T, \nu)B_{kl}N_k = \rho(T, \nu)B_{lk}N_l + A_{lk}N_l.$$

Das Einsetzen der Boltzmannverteilung für N_k und N_l ergibt wegen $E_l - E_k = h\nu$

$$\rho(T, \nu)B_{kl}e^{\beta h\nu} = \rho(T, \nu)B_{lk} + A_{lk},$$

beziehungsweise

$$\rho(T, \nu) = \frac{A_{lk}}{B_{kl}e^{\beta h\nu} - B_{lk}}. \quad (1.32)$$

Die Einstein-Koeffizienten A_{lk} , B_{lk} , B_{kl} hängen von der Atomsorte ab, sind aber unabhängig von der Temperatur. Für $\beta h\nu \ll 1$, das heißt für große Temperaturen, muss nach dem

Korrespondenzprinzip das Rayleigh-Jeans-Gesetz gelten, also

$$\rho(T, \nu) \sim \frac{A_{lk}}{(B_{kl} - B_{lk}) + \beta h \nu B_{kl}} = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 kT. \quad (1.33)$$

Dies führt auf die wichtigen Einsteinschen Beziehungen:

$$B_{kl} = B_{lk} \quad \text{und} \quad \frac{A_{lk}}{B_{lk}} = 8\pi h \left(\frac{\nu}{c}\right)^3, \quad \text{mit} \quad h\nu = E_l - E_k. \quad (1.34)$$

Eingesetzt in (1.32) ergibt sich das Plancksche Gesetz

$$\rho(T, \nu) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1}.$$

1.8 Zusammenfassung

Der Wellencharakter des Lichts ist zum Beispiel durch Beugung an Strich- oder Kristallgittern glänzend bestätigt. Eine wichtige Konsequenz der Wellennatur der elektromagnetischen Strahlung sind die Unschärferelationen:

$$\Delta\omega \cdot \Delta t \geq 1 \quad \text{und} \quad \Delta x^j \Delta k_j \geq 1, \quad j = 1, 2, 3. \quad (1.35)$$

Die Zweite kann man folgendermaßen einsehen: Sei $u(t, x)$ ein Wellenpaket

$$u(t, x) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} a(k) e^{i[kx - \omega(k)t]} dk$$

d.h. eine Überlagerung von ebenen Wellen, deren Wellenzahlvektoren in die x -Richtung zeigen und Werte im Intervall

$$k_0 - \Delta k \leq k \leq k_0 + \Delta k$$

haben. Ist u zum Beispiel eine Komponente des elektrischen Feldes, dann lautet die Dispersionsrelation $\omega = c|k|$. Wir führen nun eine Variablensubstitution $\xi = k - k_0$ ein und entwickeln $\omega(k)$ in eine Potenzreihe in ξ , $\omega(k) = \omega_0 + \omega'_0 \xi + \dots$. Beschränken wir uns auf die ersten beiden Glieder, dann finden wir

$$u(t, x) = a(k_0) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{-\Delta k}^{\Delta k} d\xi e^{i(x - \omega'_0 t)\xi} = 2a(k_0) \frac{\sin(\Delta k [x - \omega'_0 t])}{x - \omega'_0 t} \cdot e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}.$$

Den Faktor vor der schnell oszillierenden Funktion $e^{i(k_0x - \omega_0t)}$ kann man als Amplitude der Funktion bezeichnen. Eine schematische Darstellung dieser Amplitude zur Zeit $t = 0$ zeigt die folgende Abbildung. Der Maximalwert der Amplitude ist $2a(k_0)\Delta k$ und gehört

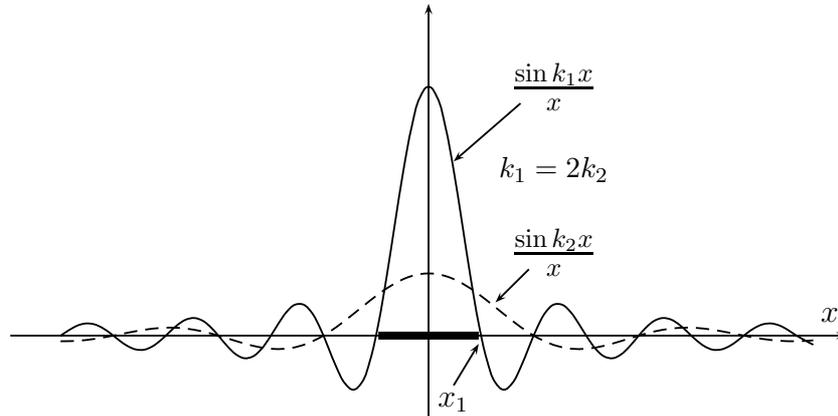


Abbildung 1.7: Die Amplitude des Wellenpaketes ist um $x = 0$ konzentriert

zum Wert $x = 0$. Für $x = x_n = n\pi/\Delta k$ mit $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ verschwindet die Amplitude. $\Delta x = 2x_1 = 2\pi/\Delta k$ kann man als minimale räumliche Ausdehnung des Wellenpaketes ansehen. Je kleiner Δk ist (die Streuung der Wellenzahlvektoren oder Photonenimpulse), desto größer ist die räumliche Ausdehnung des Paketes. Wir finden also

$$\Delta x \cdot \Delta k \geq 2\pi. \quad (1.36)$$

Der *Teilchencharakter* der Lichtquanten kommt im Wien-Planckschen Gesetz der Hohlraumstrahlung, im Photoeffekt und in der Comptonstreuung klar zum Ausdruck. Die wichtigsten Formeln, die die Einsteinsche Lichtquantenhypothese wiedergeben, sind

$$E = h\nu = \hbar\omega \quad \text{und} \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}. \quad (1.37)$$

Damit wird (1.35) zu

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar \quad \text{und} \quad \Delta x^j \cdot \Delta p_j \geq 2\pi\hbar. \quad (1.38)$$

Dies sind die *Heisenbergschen Unschärferelationen* [38].

Innerhalb einer klassischen, deterministischen Theorie kann man Interferenzerscheinungen, die auf dem Superpositionsprinzip der Wellentheorie beruhen, mit der Korpuskulartheorie des Lichts nicht vereinbaren. Nötig ist daher eine neue Theorie, die diese beiden komplementären Aspekte der elektromagnetischen Strahlung vereinigt. Eine solche Theo-

rie wird auf geeignet gestellte Fragen notwendigerweise nur *statistische Antworten* geben können. Zum Beispiel: Wo treffen Lichtquanten nach Beugung einer elektromagnetischen Welle am Spalt oder Gitter auf einem Schirm auf? Die statistische Antwort ist dann, dass die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Photons in einem kleinen Gebiet um \mathbf{x} des Schirms proportional zur Intensität des klassischen Interferenzmusters im Punkte \mathbf{x} des Schirmes ist. Diese Feststellung kann experimentell mit Hilfe des Photoeffektes getestet werden.

1.9 Anhang: Theorie der Hohlraumstrahlung

Jeder Körper tauscht mit seiner Umgebung Wärme aus. Dieser Austausch erfolgt auch, wenn er sich in einem evakuierten Raum befindet, so dass die gewöhnliche Wärmeleitung ausgeschaltet ist. Die Energieabgabe und -aufnahme erfolgt durch Emission und Absorption von Strahlung. Je nach Temperatur des Körpers oder seiner Umgebung ist diese Strahlung im infraroten, sichtbaren oder ultravioletten Bereich. Wir nennen diese Strahlung *Wärmestrahlung*. Das Wesen dieser Strahlung ist in einer Umwandlung eines Teiles der Wärmeenergie des strahlenden Körpers in Energie des elektromagnetischen Strahlungsfeldes zu suchen. Besteht zwischen einem Körper und seiner Umgebung eine Temperaturdifferenz, so wird diese Differenz durch Strahlung ausgeglichen. Bei Emission kühlt sich der Körper ab und umgekehrt erwärmt er sich bei Absorption von Wärmestrahlung. Im Gleichgewicht ist die ausgestrahlte Energie gleich der aus der Umgebung aufgenommenen. Die Strahlung hängt von der Temperatur des Strahlers und von der Beschaffenheit seiner Oberfläche ab. Die Ausstrahlung eines Körpers wird durch sein *Emissionsvermögen* E , die von der Flächeneinheit seiner Oberfläche in den Halbraum pro Zeiteinheit ausgestrahlte Energie, gemessen. Das Emissionsvermögen einer blanken Fläche ist bei gleicher Temperatur kleiner als das einer schwarzen. Das *Absorptionsvermögen* A ist das Verhältnis

$$0 \leq A = \frac{\text{absorbierte Strahlungsenergie}}{\text{auffallende Strahlungsenergie}} \leq 1.$$

Kirchhoffsches Gesetz: Der Quotient E/A ist von der stofflichen Beschaffenheit des Körpers unabhängig und hängt nur von der Temperatur des Körpers und der Frequenz der Strahlung ab. Ein Körper, der viel Strahlung emittiert, kann auch viel Strahlung absorbieren und umgekehrt.

Wäre dem nicht so, so kann man eine Vorrichtung konstruieren, mit deren Hilfe sich im Widerspruch zum zweiten Hauptsatz der Thermodynamik eine Wärmemenge von einem kälteren auf einen wärmeren Körper übertragen ließe: Es mögen sich zwei Platten mit gleicher Temperatur T wie in der Figur 1.8 gegenüberstehen. Die erste sei ein schwarzer

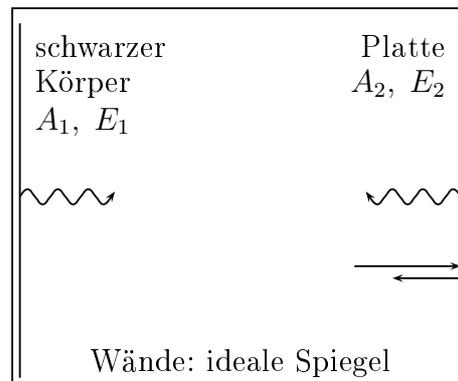


Abbildung 1.8: Zur Ableitung des Kirchhoffschen Gesetzes

Körper und absorbiere alle auffallende Strahlung, d.h. habe maximales Absorptionsvermögen $A_1 = 1$, und die zweite habe ein Absorptionsvermögen $A_2 < 1$. Der Raum zwischen den Platten sei durch ideale Spiegel nach außen abgeschlossen, so dass keine Strahlung entweichen kann. Die ganze Anordnung sei von adiabatischen Wänden eingeschlossen.

Die Emissionsvermögen der Platten seien E_1 und E_2 . Im Gleichgewicht muss die Ausstrahlung jeder Platte gleich der absorbierten Energie sein. Wäre dem nicht so, müsste eine Platte sich abkühlen, die andere sich erwärmen, im Widerspruch zum 2. Hauptsatz. Also:

$$\begin{aligned} \text{schwarze Platte:} \quad E_1 &= E_2 + E_1 \cdot (1 - A_2) \\ \text{andere Platte :} \quad E_2 &= A_2 \cdot E_1. \end{aligned}$$

Hieraus folgt $E_2/A_2 = E_1$ und der Kirchhoffsche Satz ist gezeigt. Wir haben zusätzlich gesehen, dass für jedes Material das Verhältnis E/A gleich dem Emissionsvermögen des schwarzen Körpers bei dieser Temperatur ist. Es ist ausschließlich eine Funktion von T und der Wellenlänge λ :

$$\frac{E}{A} = f(\lambda, T).$$

Nun erinnern wir uns an die beiden ersten Hauptsätze der Thermodynamik.

1. Hauptsatz: Die Konstruktion einer energie-erzeugenden Maschine (Perpetuum Mobile 1. Art) ist unmöglich.

Bezeichnet dU die Änderung der inneren Energie U des Systems, δQ die aufgenommene

Wärmemenge und δA die abgegebene Arbeit, dann ist

$$dU = \delta Q - \delta A.$$

Für ein einatomiges Gas ist $\delta A = pdV$ und für einen Magneten $\delta A = HdM$. Weiter gilt der

2. Hauptsatz: *Es ist unmöglich, eine periodisch arbeitende Maschine zu konstruieren, die nichts weiter macht als Arbeit zu leisten und dabei einen Wärmespeicher abzukühlen (Perpetuum Mobile 2. Art).*

Aus diesem Hauptsatz folgt, dass es eine Zustandsfunktion $S(U, V)$, genannt Entropie, gibt, so dass gilt

$$dS = \frac{\delta Q}{T}.$$

Stefan-Boltzmannsches Gesetz: Körper, die das Absorptionsvermögen 1 haben, die also alle auffallende Strahlung absorbieren, bezeichnet man als schwarze Körper. Es wurde bald erkannt, dass die schwarze Strahlung in einem Hohlraum mit metallischen Wänden (aus Platin-Iridium) realisiert ist. Wird die Hohlraumwandung auf einer festen Temperatur gehalten, dann bildet sich im Hohlraum die schwarze Strahlung aus. Bringt man in der Hohlraumwandung eine so kleine Öffnung an, dass das Strahlungsgleichgewicht nicht gestört wird, dann kann die durch diese Öffnung emittierte Strahlung in sehr guter Näherung als schwarze Strahlung angesehen werden.

K. STEFAN hat 1879 Messungen an Tyndall analysiert und dabei festgestellt, dass ein Probekörper bei einer Temperatur von 1473 K eine 11.7 mal größere Energie abstrahlt als bei einer Temperatur von 798 K. Er hat bemerkt, dass

$$11.7 \sim \left(\frac{1473}{798} \right)^4$$

ist, und daraus geschlossen, dass die gesamte Emissionsintensität eines schwarzen Körpers proportional zur vierten Potenz der Temperatur ist,

$$I(T) = \sigma T^4. \tag{1.39}$$

Bemerkenswert ist, dass erstens Tyndall nicht einmal annähernd ein schwarzer Körper ist und zweitens die Messung fehlerhaft war. Der richtige Quotient ist 18.6 und nicht 11.7. Hier hat offensichtlich eine fehlerhafte Messung ihre guten Dienste geleistet. BOLTZMANN verdanken wir die strenge thermodynamische Begründung des Gesetzes (1.39) und wir

wollen seine Herleitung nun geben:

Nach dem zweiten Hauptsatz ist das Strahlungsfeld in einem Hohlraum homogen, isotrop (keine Richtung ist ausgezeichnet) und unpolarisiert. Aus der Maxwellschen Theorie ergibt sich für die Energie der Strahlung

$$u = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)$$

und deren Spannungstensor

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \delta_{ij} - E_i E_j - B_i B_j \right).$$

Die Spur des Spannungstensors ist

$$3p = \text{Sp} T = \frac{3}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) - \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) = u$$

und entsprechend lautet die *Zustandsgleichung* für das Strahlungsfeld

$$u = 3p. \tag{1.40}$$

Die Strahlungsenergie im Hohlraum ist also gleich

$$U(T, V) = V u(T) = 3pV.$$

Nun folgt aus dem ersten und zweiten Hauptsatz

$$dU = \delta Q - pdV = TdS - pdV$$

oder

$$dS = \frac{dU + pdV}{T} = \frac{3d(pV) + pdV}{T} = \frac{\partial S}{\partial V} dV + \frac{\partial S}{\partial T} dT. \tag{1.41}$$

Durch Koeffizientenvergleich finden wir

$$\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{4p}{T} \quad \text{und} \quad \frac{\partial S}{\partial T} = \frac{3V}{T} \frac{dp}{dT}. \tag{1.42}$$

Wegen $S_{,VT} = S_{,TV}$ folgt dann

$$\frac{d}{dT} \left(\frac{4p}{T} \right) = \frac{3}{T} \frac{dp}{dT}$$

und damit

$$\frac{1}{T} \frac{dp}{dT} = \frac{4p}{T^2} \implies \frac{dp}{p} = 4 \frac{dT}{T}.$$

Nach Integration findet man den Druck $p(T) = aT^4/3$, woraus mit der Zustandsgleichung (1.40) sofort das Gesetz von Stefan und Boltzmann folgt,

$$u(T) = aT^4.$$

Die gesamte Emissionsintensität $I(T)$ eines absolut schwarzen Körpers ist [41]

$$I(T) = \frac{c}{4} u(T) = \frac{ca}{4} T^4$$

und damit folgt (1.39) mit der Stefan-Boltzmann-Konstante $\sigma = ca/4$. Aus (1.42) folgt weiter, dass

$$\frac{\partial S}{\partial T} = 4aVT^2 \quad \text{oder} \quad S(V, T) = \frac{4a}{3} VT^3 + S_0(V). \quad (1.43)$$

Abermalige Benutzung von (1.42) führt auf

$$\frac{\partial S}{\partial V} = 4 \frac{p}{T} = \frac{4a}{3} T^3 = \frac{4a}{3} T^3 + \frac{\partial S_0}{\partial V},$$

wobei wir beim letzten Schritt (1.43) benutzten. Also ist S_0 volumenunabhängig und

$$S(V, T) = \frac{4a}{3} VT^3, \quad (1.44)$$

wobei wir eine Version des 3. Hauptsatzes bemühten, nach der S für $T \searrow 0$ verschwindet.

Immer noch auf der Grundlage der klassischen Physik ist es WIEN 1894 gelungen, ein weiteres Gesetz aufzustellen, dem eine Kontrollfunktion zuerkannt werden kann. Als ersten Schritt hat er das folgende Gedankenexperiment ausgeführt: Stellen wir uns einen 'mit schwarzer Strahlung angefüllten' Hohlraum vor, der von einem verspiegelten und beweglichen Kolben verschlossen wird. Verringern wir mit Hilfe des Kolbens das Hohlraumvolumen langsam (adiabatisch), so dass

$$\delta Q = 0 \quad \text{oder} \quad dS = 0$$

gilt, dann nehmen Energieinhalt und Temperatur im Hohlraum zu, da vom Kolben Arbeit

geleistet wird:

$$dU = -pdV.$$

Wegen $p = U/3V$ ist

$$\frac{dU}{U} = -\frac{pdV}{U} = -\frac{U}{3V} \frac{dV}{U} \implies 3\frac{dU}{U} + \frac{dV}{V} = 0$$

und entsprechend sind das Volumen des Hohlraumes und die darin enthaltene Strahlungsenergie folgendermaßen verknüpft:

$$U^3V = \text{konstant.}$$

Aufgrund des Stefan-Boltzmannschen Gesetzes ist $U = aT^4V$ und damit

$$T^3V = \text{konstant.} \quad (1.45)$$

Wiensches Gesetz und Wiensches Verschiebungsgesetz: Durch eine Kombination von Thermodynamik und Lichttheorie gelang es W. WIEN 1886 zu zeigen, dass die auf Seite 13 eingeführte universelle Funktion $\nu^{-1} \cdot E(T, \nu)$ nur eine Funktion des Verhältnisses ν/T sein kann. Um dies einzusehen bemerken wir, dass die Mode des Strahlungsfeldes mit Koeffizient $\mathbf{a}(t, \mathbf{k})$ die Frequenz $c|\mathbf{k}|/2\pi$ hat, welche proportional zu $1/L$ ist. Deshalb werden die Frequenzen bei Vergrößerung des Hohlraumes gemäß

$$\nu^3V = \text{konstant} \quad (1.46)$$

rotverschoben. Wir wollen nun das Volumen des Hohlraumes adiabatisch vergrößern, das heißt $V = V(t)$ nehme mit der Zeit langsam zu. Der Beitrag der Strahlung im Frequenzintervall $[\nu_1, \nu_2]$ zum Strahlungsdruck,

$$p(\nu_1, \nu_2) = \frac{1}{3}u(\nu_1, \nu_2) = \frac{1}{3} \int_{\nu_1}^{\nu_2} \rho(T, \nu) d\nu$$

drückt auf die Wände und verrichtet bei einer infinitesimalen Vergrößerung des Kastens die Arbeit $\delta A = dt \dot{V}(t) \cdot p(\nu_1(t), \nu_2(t))$. Damit wird die verrichtete Leistung

$$\dot{A}(0) = \frac{1}{3} \dot{V}(0) \int_{\nu_1}^{\nu_2} \rho(T, \nu) d\nu, \quad (1.47)$$

wobei $\dot{A}(0)$ die Ableitung der Arbeit nach der Zeit zur Zeit $t = 0$ bedeutet.

Andererseits ist die Arbeit auch $\delta A = -dU$ und damit

$$A(t) = U_0 - U(t) = V_0 \int_{\nu_1}^{\nu_2} \rho(T, \nu) d\nu - V(t) \int_{\nu_1(t)}^{\nu_2(t)} \rho(T(\tau), \nu) d\nu, \quad V_0 = V(t=0). \quad (1.48)$$

Deshalb kann die verrichtete Leistung auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\dot{A}(0) = -\dot{V}(0) \int_{\nu_1}^{\nu_2} \rho(T, \nu) d\nu - V_0 \dot{\nu}(0) \rho(T, \nu)|_{\nu_1}^{\nu_2} - V_0 \int_{\nu_1}^{\nu_2} \frac{\partial \rho}{\partial T}(T, \nu) \dot{T}(0) d\nu. \quad (1.49)$$

Wegen (1.46,1.45) ist bei adiabatischer Expansion

$$T^3(\tau)V(\tau) = T_0^3 V_0 \quad \text{und} \quad \nu^3(\tau)V(\tau) = \nu_0^3 V_0. \quad (1.50)$$

Dies benutzen wir, um $V_0 \dot{\nu}(0)$ und $V_0 \dot{T}(0)$ durch $-\frac{1}{3}\nu_0 \dot{V}(0)$ und $-\frac{1}{3}T_0 \dot{V}(0)$ zu ersetzen. Der Vergleich von (1.47) und (1.49) ergibt die folgende Beziehung für $\rho(T, \nu)$:

$$\frac{1}{3} \int_{\nu_1}^{\nu_2} \rho d\nu = - \int_{\nu_1}^{\nu_2} \rho d\nu + \frac{1}{3} \int_{\nu_1}^{\nu_2} \frac{\partial \rho}{\partial T} T d\nu + \frac{1}{3} [\nu \rho]_{\nu_1}^{\nu_2}. \quad (1.51)$$

Die Ableitung dieser Gleichung nach ν_2 an der Stelle $\nu_2 = \nu$ ergibt

$$4\rho = T \frac{\partial \rho}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial \nu}(\nu \rho).$$

Diese partielle Differentialgleichung für die spektrale Energiedichte kann man leicht integrieren und dies führt auf das *Wiensche Gesetz* (1.9).

Wenn ρ als Funktion der Frequenz ein Maximum bei ν_{\max} hat, dann muss

$$\frac{d\rho}{d\nu}(T, \nu) = 3\nu^2 P\left(\frac{\nu}{T}\right) + \frac{\nu^3}{T} P'\left(\frac{\nu}{T}\right)$$

für $\nu = \nu_{\max}$ verschwinden. Dies ist gleichbedeutend mit

$$\left[\frac{3}{x} P(x) + P'(x) \right]_{x_{\max}} = 0, \quad \text{mit} \quad x = \nu/T.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist ein bestimmter Zahlenwert x_{\max} und

$$\frac{\nu_{\max}}{T} = x_{\max}, \quad (\text{Verschiebungsgesetz}) \quad (1.52)$$

Aus diesem Gesetz folgt eine Verschiebung des Maximums der Intensitätsverteilung mit wachsender Temperatur zu kürzeren Wellenlängen hin, deshalb der Name *Wiensches Verschiebungsgesetz*. Die der maximalen spektralen Energiedichte entsprechende Frequenz ist der Temperatur direkt proportional.

Gleichverteilungsgesetz: Ein sehr allgemeines Gesetz der klassischen Statistik, *der Gleichverteilungssatz*, bietet sich hier zur Anwendung an. Nach diesem Satz kommt auf jeden Freiheitsgrad die mittlere kinetische Energie $\frac{1}{2}kT$, wobei k die Boltzmannsche Konstante ist. Da für einen harmonischen Oszillator die mittlere kinetische Energie gleich der mittleren potentiellen Energie ist, sollten wir für die mittlere Energie $E(T, \nu)$ in (1.8) gleich kT wählen. Etwas genauer: Wir haben gesehen, dass jeder Freiheitsgrad des Strahlungsfeldes ein harmonischer Oszillator mit Kreisfrequenz $\omega = c|\mathbf{k}|$ ist. Nach der klassischen statistischen Mechanik ist die Wahrscheinlichkeit, den Oszillator mit Impuls in der Phasenraumzelle $dpdq$ um p, q herum zu finden, durch die Boltzmannverteilung

$$P(q, p) = \frac{1}{Z} e^{-\beta H(p, q)} \frac{dpdq}{h} \quad \text{mit} \quad H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2)$$

gegeben. Darin ist $\beta = 1/kT$ proportional zur inversen Temperatur. Die Division durch die Zustandssumme

$$Z = \int e^{-\beta H(p, q)} \frac{dpdq}{h} = \frac{2\pi}{\beta h \omega}$$

macht $P(p, q)$ zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß. Für die mittlere Energie des Oszillators ergibt sich dann wie erwartet

$$E(T, \nu) = \frac{1}{Z} \int H e^{-\beta H(p, q)} \frac{dpdq}{h} = kT.$$

1.10 Anhang: Einheitensysteme, Konstanten

Auf der 10. Generalkonferenz für Maß und Gewicht (1954) wurde die Einführung des sogenannten Internationalen Einheitensystems empfohlen (Systeme International d'Unites, Kurzbezeichnung: SI). In der Lehrbuchliteratur und Forschung ist aber bis heute neben diesem System auch noch das traditionelle Gaußsche Maßsystem weit verbreitet. Im fol-

genden gebe ich einen Überblick über beide Einheitensysteme (vgl. die Vorlesung über Elektrodynamik). Für weitere Informationen verweise ich auf die particle data group [39].

Internationales Einheitensystem:

Basisgrößen:

- Länge mit der Einheit Meter (m)
- Zeit mit der Einheit Sekunde (s)
- Masse mit der Einheit Kilogramm (kg)
- elektrische Stromstärke mit der Einheit Ampere (A)
- Temperatur mit der Einheit Kelvin (K)
- Stoffmenge mit der Einheit Mol (mol)
- Lichtstärke mit der Einheit Candela (cd)

Name, Symbol	Einheit	Einheitszeichen
elektrische Ladung Q, e	Coulomb	$C=As$
elektrischer Strom I	Ampere	$A=Cs^{-1}$
elektrische Feldstärke E		$ms^{-3}kg A^{-1}$
magnetischer Fluss Φ	Weber	$Wb=Vs$
magnetische Induktion B	Tesla	$Wb m^{-2}$
Vektorpotential A		$ms^{-2}kg A^{-1}$
skalares el. Potential ϕ	Volt	$V=WA^{-1}=m^2s^{-3} kg A^{-1}$
Frequenz ν	Hertz	$Hz=s^{-1}$
Kraft F	Newton	$N=ms^{-2}kg$
Energie E	Joule	$J=Nm=m^2s^{-2}kg$
Leistung P	Watt	$W=Js^{-1}$
Kapazität C	Farad	$F=CV^{-1}$
Induktivität L	Henry	$H=Wb A^{-1}$

Gaußsches Maßsystem:

Basisgrößen:

- Länge mit der Einheit Zentimeter (cm)

- Zeit mit der Einheit Sekunde (s)
- Masse mit der Einheit Gramm (g)

Name der Größe, Symbol	Einheit	Einheitszeichen
elektrische Ladung Q, e		$\text{cm}^{3/2}\text{s}^{-1}\text{g}^{1/2}$
elektrischer Strom I		$\text{cm}^{3/2}\text{s}^{-2}\text{g}^{1/2}$
elektrische Feldstärke E		$\text{cm}^{-1/2}\text{s}^{-1}\text{g}^{1/2}$
magnetischer Fluss Φ	Maxwell	$\text{cm}^{3/2}\text{s}^{-1}\text{g}^{1/2}$
magnetische Induktion B	Gauß	$\text{cm}^{-1/2}\text{s}^{-1}\text{g}^{1/2}$
Vektorpotential A		$\text{cm}^{1/2}\text{s}^{-1}\text{g}$
skalares elektrisches Potential ϕ		$\text{cm}^{1/2}\text{s}^{-1}\text{g}$
Frequenz ν	Hertz	$\text{Hz}=\text{s}^{-1}$
Kraft F	dyn	$\text{dyn}=\text{cm s}^{-2}\text{g}$
Energie E	erg	$\text{erg}=\text{cm}^2\text{s}^{-2}\text{g}$
Leistung		$\text{cm}^2\text{s}^{-3}\text{g}$
Kapazität		cm
Induktivität		cm^{-1}s^2

Die *Umrechnungsbeziehungen* zwischen diesen beiden Einheitensystemen lauten:

1 Coulomb	$2.997\,924\,58 \cdot 10^9 \text{cm}^{3/2}\text{s}^{-1}\text{g}^{1/2}$
1 Joule	10^7erg
1 Volt	$\frac{1}{300} \text{cm}^{1/2}\text{s}^{-1}\text{g}^{1/2}$
1 Elektronenvolt (eV)	$1.602\,177\,33 \cdot 10^{-12} \text{erg}$
1 eV/c ²	$1.782\,622\,70 \cdot 10^{-33} \text{g}$
kT bei 300 K	$(38.681\,49)^{-1} \text{eV}$

Die Zahlenwerte für die wichtigsten physikalischen Konstanten sind

Name	Symbol	Wert	Einheit
Zahl π	π	3.14159265359	
Zahl e	e	2.71828182846	
Euler's Konstante	$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n 1/k - \ln(n) \right)$	$= 0.577215665$	
Elementarladung	e	$1.60217733 \cdot 10^{-19}$	C
Feinstrukturkonstante	$\alpha = e^2/2hc\varepsilon_0$	$\approx 1/137$	
Lichtgeschwindigkeit	c	$2.99792458 \cdot 10^8$	m/s (def)
Influenzkonstante	ε_0	$8.854187 \cdot 10^{-12}$	F/m
Induktionskonstante	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$	H/m
$(4\pi\varepsilon_0)^{-1}$		$8.9876 \cdot 10^9$	Nm ² C ⁻²
Planck's Konstante	h	$6.6260755 \cdot 10^{-34}$	Js
Dirac's Konstante	$\hbar = h/2\pi$	$1.0545727 \cdot 10^{-34}$	Js
Bohrsches Magneton	$\mu_B = e\hbar/2m_e$	$9.2741 \cdot 10^{-24}$	Am ²
Bohrradius	a_0	0.52918	Å
Rydberg's Konstante	Ry	13.595	eV
Compton-Wellenlänge e^-	$\lambda_{Ce} = h/m_e c$	$2.4263 \cdot 10^{-12}$	m
Compton-Wellenlänge p	$\lambda_{Cp} = h/m_p c$	$1.3214 \cdot 10^{-15}$	m
red, Masse des H-Atoms	μ_H	$9.1045755 \cdot 10^{-31}$	kg
Stefan-Boltzmann Konst.	σ	$5.67032 \cdot 10^{-8}$	Wm ² K ⁻⁴
Wien's Konstante	k_W	$2.8978 \cdot 10^{-3}$	mK
Molare Gaskonstante	R	8.31441	J/mol
Avogadro-Konstante	N_A	$6.0221367 \cdot 10^{23}$	mol ⁻¹
Boltzmann-Konstante	$k = R/N_A$	$1.380658 \cdot 10^{-23}$	J/K
Elektronenmasse	m_e	$9.1093897 \cdot 10^{-31}$	kg
Protonenmasse	m_p	$1.6726231 \cdot 10^{-27}$	kg
Neutronenmasse	m_n	$1.674954 \cdot 10^{-27}$	kg
elementare Masseneinheit	$m_u = \frac{1}{12}m(^{12}_6\text{C})$	$1.6605656 \cdot 10^{-27}$	kg
Kern-Magneton	μ_N	$5.0508 \cdot 10^{-27}$	J/T