

# **Quantenfeldtheorie**

**Vorlesungs-Skriptum**

**Andreas Wipf**

Theoretisch-Physikalisches-Institut  
Friedrich-Schiller-Universität Jena

5. Auflage SS 2020 (1. Auflage SS 1995)

©2020 Andreas Wipf, Universität Jena

Kopieren für den privaten Gebrauch unter Angabe des Autors gestattet.

Kommerzielle Verwertung ist nicht gestattet.

Hinweise auf Druckfehler nehme ich gerne entgegen ([wipf@tpi.uni-jena.de](mailto:wipf@tpi.uni-jena.de))



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>3</b>
1.1	Literatur und Voraussetzungen: . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Anfänge der Quantenfeldtheorie</b>	<b>7</b>
2.1	Konstanten und Einheiten . . . . .	7
2.1.1	Längenskalen im Wasserstoffatom . . . . .	9
2.2	Struktur von Raum und Zeit . . . . .	9
2.2.1	Poincare Transformationen . . . . .	11
2.2.2	Kausalstruktur . . . . .	12
2.2.3	Die Lie-Algebra der Lorentz-Gruppe . . . . .	13
2.2.4	Poincaré Algebra . . . . .	15
2.3	Relativistische Wellenmechanik . . . . .	17
2.4	Aufgaben . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Klassische Feldtheorien</b>	<b>23</b>
3.1	Klassische Felder . . . . .	23
3.1.1	Tensorfelder und Spinorfelder . . . . .	23
3.2	Variationsprinzip . . . . .	24
3.3	Noether Theorem . . . . .	26
3.3.1	Innere Symmetrien . . . . .	26
3.3.2	Raumzeit-Symmetrien . . . . .	28
3.3.3	Lorentztransformationen und Drehimpuls . . . . .	29
3.4	Kanonischer Formalismus . . . . .	31
3.4.1	Hamiltonfunktion für das Skalarfeld . . . . .	32
3.4.2	Impulsraum . . . . .	33
3.5	Anfangswertproblem und Pauli-Jordan-Funktion . . . . .	34
3.6	Aufgaben . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Das freie massive Skalarfeld</b>	<b>39</b>
4.1	Kanonische Quantisierung . . . . .	39
4.1.1	Energie und Impuls des Quantenfeldes . . . . .	41
4.1.2	Hilbertraum für freie skalare Teilchen . . . . .	42
4.2	Zeitentwicklung . . . . .	44
4.3	Kausalität . . . . .	46
4.3.1	Pauli-Jordan Funktion . . . . .	48

4.4	Propagatoren . . . . .	49
4.4.1	Geschmierte Feldoperatoren im Fockraum . . . . .	52
4.5	Das komplexe Skalarfeld . . . . .	55
4.6	Teilchenproduktion . . . . .	57
4.7	Berechnung von $W(x)$ . . . . .	59
4.8	Aufgaben . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Elektrodynamik</b>	<b>67</b>
5.1	Klassische Theorie . . . . .	67
5.1.1	Normalmoden in Coulombbeziehung . . . . .	68
5.2	Quantisierung des Strahlungsfeldes . . . . .	70
5.2.1	Energie, Impuls und Drehimpuls . . . . .	72
5.3	Kausalität und Unbestimmtheit . . . . .	74
5.4	Kommutatoren der Feldoperatoren . . . . .	74
5.4.1	Unbestimmtheitsrelationen . . . . .	77
5.5	Casimir Effekt . . . . .	77
5.5.1	Regularisierung der Nullpunktsenergie . . . . .	79
5.5.2	Experimentelle Situation . . . . .	81
5.6	Aufgaben . . . . .	82
<b>6</b>	<b>Wechselwirkende Skalarfelder</b>	<b>85</b>
6.1	Eigenschaften einer wechselwirkenden Theorie . . . . .	86
6.1.1	Axiome von Gårding und Wightman . . . . .	86
6.1.2	Wightman Distributionen . . . . .	87
6.2	Källen-Lehmann-Darstellung . . . . .	89
6.3	Die Notwendigkeit zu renormieren . . . . .	92
<b>7</b>	<b>Störungstheorie</b>	<b>97</b>
7.1	Die Formel von Gell-Mann und Low . . . . .	97
7.1.1	Wechselwirkungs-Bild . . . . .	97
7.1.2	Grundzustände der freien und wechselwirkenden Theorie . . . . .	99
7.1.3	Erzeugendes Funktional für das freie Feld . . . . .	101
7.2	Das Wick'sche Theorem . . . . .	104
7.2.1	Zur Kombinatorik . . . . .	106
7.3	Feynman Diagramme . . . . .	107
7.3.1	Zweite Ordnung Störungstheorie . . . . .	109
7.3.2	Verbundenen Diagramme . . . . .	113
7.4	Aufgaben . . . . .	115
<b>8</b>	<b>Streuprozesse</b>	<b>117</b>
8.1	Ein lösbares Modell . . . . .	117
8.2	Streuoperator im allgemeinen Fall . . . . .	121
8.3	Streuamplituden und Wirkungsquerschnitte . . . . .	125
8.3.1	Streuung von $2 \rightarrow 2$ . . . . .	128

8.3.2	Mandelstam-Variablen . . . . .	129
8.4	Die LSZ-Reduktionsformel . . . . .	132
8.5	Aufgaben . . . . .	135
<b>9</b>	<b>Fermionen</b>	<b>141</b>
9.1	Diracgleichung . . . . .	141
9.2	Lösungen der freien Diracgleichung . . . . .	143
9.3	Quantisierung des Diracfeldes . . . . .	146
9.3.1	Zweipunktsfunktionen . . . . .	147
9.4	Aufgaben . . . . .	149
<b>10</b>	<b>Kovariante Quantisierung</b>	<b>153</b>
10.1	Kovariante Eichfixierung . . . . .	153
10.2	Quantisierung des Photonfeldes . . . . .	155
10.3	Raum der physikalischen Zustände . . . . .	157
<b>11</b>	<b>Quantenelektrodynamik</b>	<b>161</b>
11.1	QED in der Coulomb-Eichung . . . . .	162
11.2	Streuung am äußeren Potential . . . . .	164
11.3	Paarvernichtung . . . . .	168
11.4	Feynman-Regeln der QED . . . . .	173
11.4.1	Feynmangraphen im Impulsraum . . . . .	175
11.5	Compton-Streuung und Eichinvarianz . . . . .	178
11.6	Møller-Streuung und Photonpropagator . . . . .	180
11.7	Wirkungsquerschnitte . . . . .	183
11.8	Aufgaben . . . . .	183
<b>12</b>	<b>Abkürzungen</b>	<b>185</b>
12.1	Spezielle Funktionen und Distributionen . . . . .	185
12.2	Entwicklung von Feldoperatoren . . . . .	185



# 1 Einführung

Eine relativistische Quantenfeldtheorie ist

- eine Vereinigung von Quantenmechanik und spezieller Relativitätstheorie,
- eine Erweiterung der Quantenmechanik auf unendlich viele Freiheitsgrade,
- eine geeignete Sprache zur Beschreibung von Elementarteilchen,
- eine der umfangreichsten und komplexesten Theorien der Physik,
- einem ständigen Wandel unterworfen.

*Nichtrelativistische Quantenfeldtheorien* sind die Grundlage für Festkörper- und Kernphysik und sind eng verwandt mit der Vielteilchentheorie. Sie werden zum Beispiel zur Beschreibung der Elektron-Phonon Wechselwirkungen, kalten Fermigasen, Bosekondensaten oder Flüssigkeitsmodellen für Kernmaterie eingesetzt.

*Relativistische Quantenfeldtheorien* bilden die Grundlage zur Beschreibung aller bekannten Elementarteilchen und ihrer gegenseitigen Wechselwirkung, mit Ausnahme der Gravitation. Dies sind die elektromagnetische Wechselwirkung zwischen elektrisch geladenen Teilchen, die schwache Wechselwirkung, die sich zum Beispiel im  $\beta$ -Zerfall manifestiert und die starke Wechselwirkung zwischen den Quarks.

Die Quantenfeldtheorie (QFT) geht vom Wellencharakter der Materie aus. Korpuskulare Aspekte wie zum Beispiel die Erzeugung und Vernichtung von Teilchen werden in einem zweiten Schritt durch eine „Quantisierung“ einer klassischen Feldtheorie eingeführt. Man spricht dann von *Feldquantisierung* oder etwas irreführend von *zweiter Quantisierung*<sup>1</sup>. Im Artikel von BORN und JORDAN [17] wird schon die Quantisierung des elektromagnetischen Feldes skizziert. In der anschließenden bahnbrechenden „Drei-Männer-Arbeit“ von BORN, HEISENBERG und JORDAN wurde die Quantisierung eines Systems mit einer beliebigen Anzahl Freiheitsgrade ausgearbeitet.

Die Quantenfeldtheorie wurde zur Beschreibung der Wechselwirkung zwischen Elementarteilchen entwickelt und zuerst auf die Wechselwirkung der Photonen mit Atomen angewandt. In ersten Arbeiten studierte P. DIRAC die Wechselwirkung zwischen Strahlungsfeld  $A_\mu(x)$  und Atomen und legte dabei das Fundament zur *Quantenelektrodynamik* [19]. Indem

---

<sup>1</sup>Dieser Begriff geht auf P. Jordan zurück.

er im Sinne der Quantenmechanik das Strahlungsfeld an jedem Raumzeitpunkt als Operator auffasste, gelang ihm eine Überwindung der semiklassischen Beschreibung von Photonemission und Absorption bei Strahlungsübergängen. Damit verband er die Quantenmechanik von HEISENBERG und SCHRÖDINGER mit der Quantentheorie der Strahlung im Sinne von PLANCK oder EINSTEIN. Die Materie wurde dabei allerdings noch im Teilchenbild behandelt. Die vollständige und mit der speziellen Relativitätstheorie verträgliche Quantisierung der Elektrodynamik gelang P. JORDAN, W. PAULI und W. HEISENBERG [20]. Hierin wurden die wechselwirkenden Dirac- und Maxwellfelder quantisiert. In ihrer Arbeit von 1929 führen HEISENBERG und PAULI die Lagrange-Funktion für Felder ein, sprechen von kanonisch konjugierten Variablen und benutzten eine Quantisierungsvorschrift, die wir heute *kanonisch* nennen. Die Feldgleichungen folgten nun aus einem Wirkungsprinzip. Dieser Zugang zur Feldtheorie hat sich durchgesetzt und gilt auch heute noch als das Verfahren zur Konstruktion von Feldtheorien. Die Probleme mit der Einteilcheninterpretation des quantisierten Skalarfeldes wurde einige Jahre später von PAULI und WEISSKOPF gelöst [21].

In Quantenfeldtheorien werden zunächst die freien, nichtwechselwirkenden Felder einer Teilchensorte quantisiert und die Wechselwirkung der als punktförmig angenommenen Teilchen danach durch eine lokale, d.h. in jedem Raumzeitpunkt als Produkt der wechselwirkenden Felder oder deren Ableitungen definierte Wechselwirkungsichte eingeführt. Dieses Vorgehen führt jedoch bei einer direkten Berechnung zu *divergenten Ausdrücken* für physikalische Größen, zum Beispiel zu unendlich großen Selbstenergien. Dieses Problem führte auf das Renormierungsverfahren, dessen Ursprung bereits in den Untersuchungen von DIRAC, HEISENBERG, WEISSKOPF, PAULI, FIERZ und KRAMERS zu finden ist und in den bekannten Arbeiten von TOMONAGA, SCHWINGER, FEYNMAN und DYSON nach dem zweiten Weltkrieg im Wesentlichen vollendet wurde. Für sogenannte renormierbare Quantenfeldtheorien gibt es ein konsistentes Verfahren, bestehend aus einer Regularisierung und anschließenden Renormierung der Felder und Kopplungskonstanten, so dass die Theorien nach Festlegung von wenigen physikalischen Parametern (im Wesentlichen Massen und Kopplungsstärken) in jeder Ordnung der Störungstheorie Vorhersagen für alle weiteren Größen macht.

Die *Quantenelektrodynamik* (QED) ist die am besten studierte renormierbare Quantenfeldtheorie. Hier tritt die elektromagnetische Wechselwirkung in reiner Form in Erscheinung. Die beispiellose Genauigkeit der Berechnungen der QED basieren auf dem Gebrauch der Störungstheorie; dabei dient die dimensionslose Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante  $\alpha = e^2/\hbar c \sim 1/137$  als Entwicklungsparameter. Am weitesten wurde die Berechnung des magnetischen Moments des Elektrons vorangetrieben, für das die Glieder der Ordnungen  $\alpha$ ,  $\alpha^2$ ,  $\alpha^3$  und  $\alpha^4$  bestimmt wurden. Die Rechnungen stimmen bis zur zehnten Stelle hinter dem Komma mit den experimentellen Werten überein.

Neben der weiteren Entwicklung von Rechentechniken im Rahmen der Störungstheorie waren die Jahre zwischen 1930 und 1960 dem *formalen Ausbau der Feldtheorie* gewidmet. Der Zusammenhang zwischen Spin und Statistik wurde entdeckt, das CPT-Theorem fand seine erste Formulierung und die Darstellungstheorie der Vertauschungsregeln wurde entwickelt. *Symmetrieprinzipien* traten zunehmend in den Vordergrund. Gerade im Rahmen der QED



wurden viele fundamentale Begriffe und Gesetzmäßigkeiten der Quantenfeldtheorien entdeckt und formuliert.

In Verallgemeinerung ihres Vorbildes wurden die komplizierteren *Theorien der starken und schwachen Wechselwirkung* und auch die Modelle der großen Vereinheitlichung (GUTS) konstruiert. Die letzten Jahrzehnte waren geradezu geprägt von unseren Bemühungen, das allgemeine Grundkonzept aus den Gründerjahren 1927-29 auf diese sogenannten Eichtheorien zu erweitern. Während die *QED* eine Eichtheorie mit Abelscher Eichgruppe  $U(1)$  ist, sind die Yang-Mills-Theorien Eichtheorien mit nicht-Abelschen Eichgruppen. Zuerst schien es, als ob die in der *QED* so erfolgreiche Störungstheorie auf die anderen Wechselwirkungen nicht anwendbar sei. Die schwache Wechselwirkung, die zum Beispiel für den radioaktiven Beta-Zerfall verantwortlich ist, schien zu schwach zu sein als dass höhere Ordnungen der Störungstheorie eine Rolle spielen könnten. Auf die starke Wechselwirkung, welche zum Beispiel die Nukleonen zusammenhält, schien dagegen wegen ihrer Stärke die Störungstheorie nicht anwendbar.

Die Theorie der *elektroschwachen Wechselwirkung*, sie ist die Vereinheitlichung der elektromagnetischen und schwachen Wechselwirkungen, wurde von GLASHOW, WEINBERG und SALAM [22] entwickelt. Für die Kraft zwischen den schwach wechselwirkenden Teilchen sorgen die etwa 80 GeV schweren  $W$ - und  $Z$ -Bosonen, ähnlich wie die Photonen für die elektromagnetischen Kräfte verantwortlich sind. Das Weinberg-Salam Modell ist eine spontan gebrochene Eichtheorie in der viele Teilchen ihre Massen über die Wechselwirkung mit einem Bosekondensat erhalten. Als G. 'T HOOFT im Jahr 1972 bewies, dass *spontan gebrochene Eichtheorien* renormierbar sind, war das Weinberg-Salam Modell auch theoretisch abgesichert.

Etwa zur gleichen Zeit im Jahr 1973 zeigte sich, dass die der *starken Wechselwirkung* zugrundeliegende Quantenchromodynamik (QCD) - die Eichtheorie für Quarks und Gluonen - asymptotisch frei ist, so dass bei sehr hohen Energien oder sehr kleinen Distanzen die Kopplung schwächer wird und die Störungstheorie angewandt werden darf. In den frühen 1990ern waren bereits die meisten Korrekturen zweiter Ordnung zu den wichtigen QCD-Prozessen berechnet. In Bereichen in denen die Störungstheorien anwendbar sind stimmen theoretische und experimentelle Resultate überein. Gerade im elektroschwachen Sektor ist diese Übereinstimmung hervorragend.

Ein tieferes, nicht auf der Störungsentwicklung fußendes, Verständnis der Renormierung wurde mit Hilfe des Euklidischen *Funktionalintegralformulierung* von Quantenfeldtheorien erreicht. Diese ist die Euklidische Version des Feynmanschen Pfadintegrals [23]. Dabei wird die Zeitvariable zu imaginären Werten fortgesetzt [24]. Wird die Raumzeit durch ein Gitter approximiert, dann wird eine Euklidische Quantenfeldtheorie zu einem speziellen klassisch-statistischen System. Diese Beobachtung liefert eine fruchtbare Verbindung zwischen *Quantenfeldtheorie und statistischer Mechanik*. In den 70er Jahren wurden Gitterfeldtheorien und insbesondere Gittereichtheorien zunehmend zu einem wesentlichen Bereich der theoretischen Hochenergiephysik. Nach Vorarbeiten von WEGNER [25] formulierte WILSON 1974 eine Gittereichtheorie, deren Kontinuumslimites einer Euklidischen Version

der Quantenchromodynamik entspricht [26].

## 1.1 Literatur und Voraussetzungen:

Es existieren gute Lehrbücher über Quantenfeldtheorie. Zur Begleitung dieser Vorlesung kann ich Ihnen eines der Bücher [1]-[15] empfehlen. Insbesondere die Bücher

- M.E. Peskin, D.V. Schroeder: An Introduction To Quantum Field Theory, Taylor and Francis (2019)
- G. Münster, Von der Quantenfeldtheorie zum Standardmodell: Eine Einführung in die Teilchenphysik, de Gruyter (2019)
- M. Maggiore, A Modern Introduction to Quantum Field Theory, Oxford University Press (2005)
- A. Zee, Quantum Field Theory in a Nutshell, Princeton University Press,(2003)
- S. Weinberg, The Quantum Theory of Fields, Volume 1, Foundations, Cambridge University Press (2005)

## 2 Anfänge der Quantenfeldtheorie

In dieser Vorlesung wird die QFT in ihrer logischen und nicht historischen Entwicklung dargestellt. Aber man sollte doch die wichtigsten Etappen auf dem Weg von den Anfängen der relativistischen Quantentheorie bis zu den modernen Eichfeldtheorien kennen.

### 2.1 Konstanten und Einheiten

In dieser Vorlesung werden *relativistische* und *quantisierte* Feldtheorien behandelt. Eine relativistische Behandlung wird nötig wenn typische Geschwindigkeiten der betrachteten Objekte der Lichtgeschwindigkeit

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s} \quad (2.1)$$

nahe kommen. Im formalen Grenzfall  $c \rightarrow \infty$  findet man die Gesetze der nichtrelativistischen Physik. Eine quantentheoretische Behandlung wird nötig für *mikroskopische* Systeme wie Atome, Kerne oder Elementarteilchen. Die charakteristische Größe ist das Wirkungsquant, das auch als Plancksche Konstante bezeichnet wird,

$$\hbar = 1.054\,571\,597 \times 10^{-34} \text{ Js}, \quad (2.2)$$

mit der Dimension einer Wirkung, also Energie  $\times$  Zeit oder Impuls  $\times$  Länge. Die quantenmechanische Beschreibung wird dann gebraucht, wenn kleine Wirkungen von der Größe  $\hbar$  auftreten. Der klassische Grenzfall wird dagegen erreicht für  $S/\hbar \gg 1$ .

Wir betrachten ein Teilchen der Masse  $m$ . Legt das Teilchen eine Strecke  $\ell$  zurück, dann braucht es dafür mindestens die Zeit  $\ell/c$  und die entsprechende Wirkung ist

$$S = \text{Energie} \times \text{Zeit} \geq mc^2 \times \frac{\ell}{c} = mc\ell. \quad (2.3)$$

Die Wirkung ist gleich dem Wirkungsquant  $\hbar$  wenn  $\ell$  gleich der reduzierten Compton-Wellenlänge des Teilchens ist,

$$\ell = \lambda = \frac{\hbar}{mc}. \quad (2.4)$$

Zum Beispiel ist die *Compton-Wellenlänge* des Elektrons gleich  $\lambda_e = \hbar/m_e c \approx 2.43 \times 10^{-12} \text{ m}$ . Wenn wir versuchen ein Teilchen mit der Genauigkeit  $\lambda$  zu lokalisieren so werden Quanteneffekte wie die Paarproduktion wichtig. Diese Compton-Wellenlänge eines Teilchens kann als seine lineare Ausdehnung angesehen werden.

Nachdem wir die Bedeutung der Naturkonstanten  $c$  und  $\hbar$  betont haben wählen wir meistens *natürliche Einheiten* in denen sie Eins gesetzt werden! Dies bedeutet, dass wir alle Wirkungen in Einheiten von  $\hbar$  und alle Geschwindigkeiten als Vielfache der Lichtgeschwindigkeit messen. In diesen Einheiten sind Wirkungen und Geschwindigkeiten dimensionslos. Jede Signalgeschwindigkeit ist kleiner gleich der Lichtgeschwindigkeit und in natürlichen Einheiten kleiner gleich 1. Der Gebrauch von natürlichen Einheiten erleichtert die Rechnungen. Nach Wahl einer Energieeinheit hat man bereits ein vollständiges Einheitensystem. Die Einheit jeder physikalischen Größe ist eine Potenz der Energie. Zum Beispiel ist die Masse des Protons

$$m_p \equiv m_p c^2 \cong 1 \text{ GeV}.$$

Etwas allgemeiner gilt

$$[\text{Masse}] = [\text{Energie}] = [\text{Impuls}] \quad , \quad [\text{Länge}] = [\text{Zeit}] = \frac{1}{[\text{Masse}]}.$$

Ist der Wert einer Observablen in natürlichen Einheiten gegeben, so können die gewünschten physikalischen Einheiten (zum Beispiel in Meter, Kilogramm und Sekunde) mit dimensionaler Analysis stets rekonstruiert werden. Wir geben einige Beispiele.

**Längen:** Zur Umrechnung von Energie- in Längeneinheiten brauchen wir die *Umrechnungsformel*,

$$1 = \hbar c = 3.16 \times 10^{-26} \text{ Jm} = 197 \text{ MeV fm}, \quad (2.5)$$

wobei wir mit  $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$  die typische Längenskala der Kernphysik einführen. Deshalb ist die Compton-Wellenlänge eines Pions (Ruhemasse  $\approx 140 \text{ MeV}$ ) etwa  $1 \text{ fm}$  und diejenige eines Protons etwa  $0.2 \text{ Fermi}$ .

**Elektrische Ladung:** Zu den Größen in der Elektrodynamik gelangt man über die dimensionslose *Feinstrukturkonstante*

$$\alpha = \frac{\text{elektrostatische Energie zweier Elektronen im Abstand } \lambda_e}{\text{Ruheenergie des Elektrons}},$$

welche die Stärke der elektromagnetischen Kopplung misst. Man findet

$$\alpha = \frac{e^2/(4\pi\lambda)}{m_e c^2} = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \equiv \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137} \ll 1, \quad (2.6)$$

also eine relativ kleine Elementarladung die für eine schwache elektromagnetische Wechselwirkung verantwortlich ist. In (2.6) benutzen wir *Heaviside-Lorentz-Einheiten* mit Elementarladung

$$e \equiv e_{\text{HL}} = 5.38 \times 10^{-14} \text{ N}^{1/2} \text{ m}. \quad (2.7)$$

und  $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$ . In diesem Einheitensystem erscheint der Faktor  $4\pi$  im Coulomb-Gesetz und nicht in den Maxwellgleichungen. Der numerische Wert der Elementarladung hängt vom Einheitensystem ab, im Gegensatz zum dimensionslosen  $\alpha$ .

### 2.1.1 Längenskalen im Wasserstoffatom

Die Bindungsenergie eines Elektrons im  $H$ -Atom kann wie folgt abgeschätzt werden: wegen der Unbestimmtheitsrelation  $p \geq 1/r$  können wir für die Energie

$$E_B = \frac{p^2}{2m_e} - \frac{\alpha}{r}, \quad (2.8)$$

eine untere Schranke angeben,

$$E_B \geq \frac{1}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} \equiv E(r). \quad (2.9)$$

$E(r)$  ist minimal für den „Gleichgewichtsabstand“

$$r = a_0 = \frac{1}{m\alpha} \approx 5.3 \cdot 10^{-9} \text{ cm} = 0.53 \text{ \AA} \quad (2.10)$$

Dies ist der Bohrsche Radius – die Längenskala der Atomphysik. Diese ist wesentlich größer als die typische subatomare Längenskala der QED,  $\lambda_e = 1/m$ . Die beiden Skalen unterscheiden sich durch den Faktor  $\alpha$ .

Die minimale Energie ist gerade die Grundzustandsenergie des Wasserstoffatoms,

$$E_0 = E(a_0) = -\frac{1}{2}m\alpha^2 = -13.6 \text{ eV}. \quad (2.11)$$

Für den typischen Elektronenimpuls findet man mit Hilfe der Unbestimmtheitsrelation,  $p = 1/a_0 = m\alpha$ , und dies ergibt die typische Geschwindigkeit  $v = p/m \approx \alpha = 1/137$ . Wegen  $v \ll c$  kann das Wasserstoffatom in guter Näherung mit der nicht-relativistischen Quantenmechanik behandelt werden. Für atomare Systeme hat man also folgende Hierarchie von Skalen,

$$|E_0| \ll p \ll m \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{2}m\alpha^2 \ll m\alpha \ll m. \quad (2.12)$$

Bindungsenergie, Impuls und Ruheenergie unterscheiden sich jeweils um den Faktor  $\alpha$ . Eine entsprechende Hierarchie gilt für die Längenskalen,

$$r_e \ll \lambda \ll a_0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\alpha}{m} \ll \frac{1}{m} \ll \frac{1}{m\alpha}, \quad (2.13)$$

wobei  $r_e$  den klassischen Elektronenradius bezeichnet.

## 2.2 Struktur von Raum und Zeit

Es bezeichne  $M$  den 4-dimensionalen affinen *Minkowski-Raum* dessen Punkte als (idealisierte) Punktereignisse angesehen werden. Ein Punktereignis ist beliebig genau in Raum und Zeit lokalisiert. Unser Bezugssystem sei ein Inertialsystem  $I$  (durch Fixsterne gegeben). Ereignisse werden durch ihre Zeit, gemessen mit Uhren, welche relativ zum System

ruhen und durch Lichtsignale synchronisiert sind, und ihre kartesischen Koordinaten in  $I$  charakterisiert.

In einem System wird ein Ereignis durch seine Zeit- und Ortskoordinaten, also durch die 4-Koordinaten

$$x = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

eindeutig charakterisiert. Oft schreiben wir auch  $x = (x^\mu)$ ;  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . Die Differenzen von Ereignissen definieren einen 4-dimensionalen Vektorraum  $V$ , den *Tangentialraum* zu  $M$ . In einem Koordinatensystem haben Elemente aus  $V$  die Form

$$\xi^T = (\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3) \quad \text{bzw.} \quad \xi = (\xi^\mu).$$

Auf dem Tangentialraum  $V$  führen wir eine Bilinearform ein,

$$(\xi, \chi) = \xi^0 \chi^0 - \xi^1 \chi^1 - \xi^2 \chi^2 - \xi^3 \chi^3, \quad (2.15)$$

welche mit Hilfe des *metrischen Tensors*

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (\eta_{\mu\nu}) \quad \text{bzw.} \quad \eta^{-1} = (\eta^{\mu\nu})$$

folgendermaßen geschrieben werden kann

$$(\xi, \chi) = \sum_{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} \xi^\mu \chi^\nu = \xi^T \eta \chi. \quad (2.16)$$

Dann ist der lorentzinvariante Abstand zweier Ereignisse mit Raumzeit-Koordinaten  $x$  und  $y$  gleich

$$d(x, y) = (\xi, \xi), \quad \text{wobei} \quad \xi = y - x \quad (2.17)$$

der Differenzvektor zwischen den Ereignissen ist. Indices werden mit  $\eta_{\mu\nu}$  und  $\eta^{\mu\nu}$  hinunter- oder heraufgezogen, zum Beispiel gelten

$$\xi_\mu = \eta_{\mu\nu} \xi^\nu \quad \text{bzw.} \quad \xi^\mu = \eta^{\mu\nu} \xi_\nu, \quad \text{so dass} \quad (\xi, \chi) = \xi^\mu \chi_\mu = \xi_\mu \chi^\mu.$$

Wir betrachten nun ein zweites Inertialsystem  $I'$  (das gestrichene System), welches relativ zum ursprünglichen ungestrichenen System in konstanter gleichförmiger Bewegung ist. Das Äquivalenzprinzip der speziellen Relativitätstheorie besagt nun, dass die Naturgesetze in allen Inertialsystemen gleich aussehen. Insbesondere ist die Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen gleich (*Michelson-Morley-Experiment*).

### 2.2.1 Poincare Transformationen

Aus diesem Prinzip der speziellen Relativitätstheorie folgt nun, dass der Übergang von einem Inertialsystem  $I$  mit Koordinaten  $(x^\mu)$  in ein Inertialsystem  $I'$  mit Koordinaten  $x'^\mu$  mit Hilfe einer Poincare-Transformation geschieht,

$$x' = \Lambda x + a \iff x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu. \quad (2.18)$$

Dabei erfüllen die reellen  $4 \times 4$ -Matrizen  $\Lambda$  die Bedingung

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \iff \Lambda^\alpha_\mu \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\beta_\nu = \eta_{\mu\nu}. \quad (2.19)$$

Poincare-Transformationen lassen das relativistische Abstandsquadrat von Punktereignissen im Minkowski-Raum invariant – dieses ist unabhängig vom Inertialsystem,

$$(x' - y')^2 = (x' - y')^T \eta (x' - y') = (x - y)^T \eta (x - y) = (x - y)^2. \quad (2.20)$$

Die Transformationen (2.18) zwischen zwei Inertialsystemen bilden die sogenannte *Poincaré-Gruppe* oder inhomogene Lorentz-Gruppe, die mit  $iL$  bezeichnet wird,

$$iL = \{(\Lambda, a) \mid a \in V, \Lambda \in \mathcal{L}(V), \Lambda^T \eta \Lambda = \eta\}, \quad (2.21)$$

mit der Gruppenmultiplikation

$$(\Lambda_2, a_2)(\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2 \Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2). \quad (2.22)$$

Die Poincaré-Gruppe ist das semidirekte Produkt von

- der normalen Untergruppe der *Raumzeit-Translationen*  $x \rightarrow x' = x + a$  (diese enthalten Verschiebungen im Raum und in der Zeit),
- mit der Untergruppe der *Lorentztransformationen*  $x \rightarrow x' = \Lambda x$  (bestehend aus räumlichen Drehungen und Lorentzboosts).

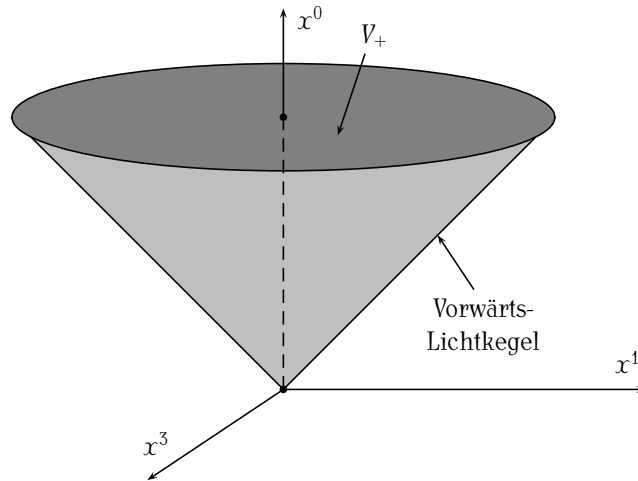
Die Bedingung (2.19) impliziert für die Determinante von  $\Lambda$

$$\det \Lambda^T \det \Lambda = (\det \Lambda)^2 = 1 \quad \text{oder} \quad \det \Lambda = \pm 1.$$

Lorentztransformationen mit verschiedenen Determinanten liegen deshalb in verschiedenen Zusammenhangskomponenten der Lorentz-Gruppe. Die Raumspiegelung und Zeitumkehr in

$$P = -T = \eta$$

sind spezielle Lorentztransformationen mit Determinante  $-1$ . Dagegen hat die Raumzeit-spiegelung  $PT = -\eta^2 = -\mathbb{1}_4$  die Determinante  $1$ .

Abbildung 2.1: Vorwärtslichtkegel des Ereignisses bei  $x = 0$ 

### 2.2.2 Kausalstruktur

Zwei Punktereignisse bei  $x$  und  $y$  können in kausalen Kontakt treten, wenn ihr Differenzvektor  $\xi = y - x$  die Bedingung  $(\xi, \xi) \geq 0$  erfüllt. Für das Gleichheitszeichen sind die Ereignisse lichtartig getrennt und können nur mit Lichtsignalen in Verbindung treten. Man unterscheidet deshalb zwischen zeitartigen Vektoren mit  $(\xi, \xi) > 0$ , raumartigen Vektoren mit  $(\xi, \xi) < 0$  und lichtartigen Vektoren mit  $(\xi, \xi) = 0$ . Diese Eigenschaften sind unabhängig vom Bezugssystem und deshalb bildet jede Lorentztransformation den *Vorwärtslichtkegel*

$$V_+ = \{\xi | (\xi, \xi) > 0, \xi^0 > 0\} \quad (2.23)$$

entweder in sich, oder in den *Rückwärtslichtkegel*

$$V_- = \{\xi | (\xi, \xi) > 0, \xi^0 < 0\} \quad (2.24)$$

ab. Im zweiten Fall wird die Zeitrichtung umgekehrt. Transformationen, welche die Zeitrichtung umkehren, können nicht in Transformationen deformiert werden, die dies nicht tun. Zum Beweis schreiben wir die 00-Komponente der Matrixgleichung (2.19) aus,

$$\Lambda_0^\alpha \eta_{\alpha\beta} \Lambda_0^\beta = 1 = (\Lambda_0^0)^2 - \sum_i (\Lambda_0^i)^2.$$

Sie bedingt die Ungleichung  $|\Lambda_0^0| \geq 1$ . Für  $\Lambda_0^0 \geq 1$  wird der Vorwärtslichtkegel in sich abgebildet und für  $\Lambda_0^0 \leq -1$  in den Rückwärtslichtkegel. Die Determinante von  $\Lambda$  und das Vorzeichen von  $\Lambda_0^0$  definieren die vier *Zusammenhangs-Komponenten* der Lorentz-Gruppe,

$$L = L_+^\uparrow \cup L_-^\uparrow \cup L_+^\downarrow \cup L_-^\downarrow, \quad (2.25)$$

mit folgender Bedeutung der Indizes:

$$\pm : \det \Lambda = \pm 1, \quad \uparrow : \text{keine Zeitumkehr } (\Lambda_0^0 \geq 1), \quad \downarrow : \text{Zeitumkehr } (\Lambda_0^0 \leq -1).$$



Mit Hilfe der Raum- und Zeitspiegelung können wir auch schreiben

$$L_+^\uparrow \cup PL_+^\uparrow \cup TL_+^\uparrow \cup PTL_+^\uparrow. \quad (2.26)$$

Die Menge  $L_+^\uparrow$  der eigentlich orthochronen Lorentztransformationen enthalten weder Zeitumkehr noch Spiegelungen und bilden eine normale Untergruppe der Lorentz-Gruppe. Insbesondere ist  $\mathbb{1} \in L_+^\uparrow$ . Die Transformationen in  $PL_+^\uparrow$  heißen uneigentlich orthochron, diejenigen in  $TL_+^\uparrow$  zeitspiegelungsartig und diejenigen in  $PTL_+^\uparrow$  raumzeitspiegelungsartig. Mit der Lorentz-Gruppe zerfällt auch die Poincare-Gruppe in 4 *Zusammenhangskomponenten*

$$iL = iL_+^\uparrow \cup iL_-^\uparrow \cup iL_+^\downarrow \cup iL_-^\downarrow. \quad (2.27)$$

### 2.2.3 Die Lie-Algebra der Lorentz-Gruppe

Die Gruppe der Lorentztransformationen enthält alle reellen  $4 \times 4$ -Matrizen, welche

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \quad \text{oder} \quad \Lambda_\mu^\alpha \eta_{\alpha\beta} \Lambda_\nu^\beta = \eta_{\mu\nu} \quad (2.28)$$

erfüllen. Es ist die einfache Liegruppe bestehend aus 4 Zusammenhangskomponenten. Die Matrizen mit  $\det \Lambda = 1$  bilden die Untergruppe  $SO(1, 3)$ . Sie hat nur noch zwei Zusammenhangskomponenten.

Ähnlich wie bei den Drehungen im Raum betrachtet man eine Kurve  $\Lambda(s)$  mit  $\Lambda(0) = \mathbb{1}_4$  in der Zusammenhangskomponente  $L_+^\uparrow$  und definiert die *infinitesimale Erzeugende*

$$\omega = \left. \frac{d}{ds} \Lambda(s) \right|_{s=0} \quad \text{bzw.} \quad \omega_\beta^\alpha = \left. \frac{d}{ds} \Lambda_\beta^\alpha \right|_{s=0}. \quad (2.29)$$

Leiten wir (2.28) an der Stelle  $s = 0$  ab, dann finden wir folgende lineare Bedingung für eine infinitesimale Erzeugende:

$$\omega^T \eta + \eta \omega = 0 \quad \text{bzw.} \quad \omega_\mu^\alpha \eta_{\alpha\nu} + \eta_{\mu\beta} \omega_\nu^\beta \equiv \omega_{\nu\mu} + \omega_{\mu\nu} = 0. \quad (2.30)$$

Jede Linearkombination von Erzeugenden ist wieder eine Erzeugende und deshalb bilden die Erzeugenden einen linearen Raum. Der Kommutator zweier Erzeugenden,

$$[\omega_1, \omega_2] = \omega_1 \omega_2 - \omega_2 \omega_1 = -[\omega_2, \omega_1] \quad (2.31)$$

ist ebenfalls ein erzeugendes Element. Es gilt die *Jacobi-Identität*

$$[\omega_1, [\omega_2, \omega_3]] + [\omega_3, [\omega_1, \omega_2]] + [\omega_2, [\omega_3, \omega_1]] = 0.$$

Ein Vektorraum mit einem bilinearen schiefsymmetrischen Produkt das die Jacobi-Identität erfüllt nennt man *Lie-Algebra*. Die infinitesimalen Lorentztransformationen formen eine derartige Lie-Algebra, es ist die Lorentz-Algebra  $so(1, 3)$ . Gemäß (2.30) kann die  $so(1, 3)$

(nach herunterziehen eines Indizes) mit den schiefsymmetrischen reellen  $4 \times 4$ -Matrizen identifiziert werden. Die Erzeugenden können wie folgt parametrisiert werden:

$$\omega(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}) = (\omega_{\nu}^{\mu}) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ -\alpha_1 & 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ -\alpha_2 & \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\alpha_3 & -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

Für  $\boldsymbol{\alpha} = 0$  beschreibt die 1-parametrische Untergruppe

$$\Lambda(0, \boldsymbol{\theta} \mathbf{e}) = e^{\omega(0, \mathbf{e})\boldsymbol{\theta}}, \quad \text{mit } \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = 1,$$

Drehungen um die feste Achse  $\mathbf{e}$  mit variablem Winkel  $\boldsymbol{\theta}$ . Die eigentlichen Drehungen bestehend aus den Matrizen

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & R \end{pmatrix}, \quad R \in SO(3)$$

bilden eine Untergruppe der Lorentz-Gruppe.

Für  $\boldsymbol{\theta} = 0$  beschreibt die 1-parametrische Untergruppe

$$\Lambda(\boldsymbol{\alpha} \mathbf{e}, 0) = e^{\omega(\mathbf{e}, 0)\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} \cosh(\boldsymbol{\alpha}) & -\sinh(\boldsymbol{\alpha}) \cdot \mathbf{e}^T \\ -\sinh(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{e} & \mathbb{1}_3 + (\cosh(\boldsymbol{\alpha}) - 1) \mathbf{e} \mathbf{e}^T \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

Lorentzboosts in Richtung des festen Einheitsvektors  $\mathbf{e}$ . Wie man leicht sieht (man transformiere z.B. den Impulsvektor eines ruhenden Teilchens) hängen  $\boldsymbol{\alpha}$  und  $\mathbf{e}$  mit der Relativ-Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  der beiden Inertialsysteme wie folgt zusammen:

$$\cosh(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \equiv \gamma, \quad \sinh(\boldsymbol{\alpha}) \cdot \mathbf{e} = -\gamma \mathbf{v}. \quad (2.34)$$

Bewegt sich zum Beispiel das Inertialsystem  $I$  relativ zum Inertialsystem  $I'$  mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_1$ , dann lautet die Lorentz-Transformation

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v & 0 & 0 \\ \gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

und entsprechend ist

$$x'^0 = \gamma(x^0 + vx^1), \quad x'^2 = x^2 \quad (2.36)$$

$$x'^1 = \gamma(vx^0 + x^1), \quad x'^3 = x^3. \quad (2.37)$$

Ruht ein Teilchen im Ursprung des Inertialsystems  $I$ , so bewegt es sich mit der Geschwindigkeit  $v$  in 1-Richtung im Inertialsystem  $I'$ .

Für den *Kommutator* zweier infinitesimalen Erzeugenden findet man

$$[\omega(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}), \omega(\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\theta}')] = \omega(\boldsymbol{\alpha}' \wedge \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\theta}', \boldsymbol{\theta} \wedge \boldsymbol{\theta}' - \boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\alpha}'). \quad (2.38)$$

Als Basis der Lorentz-Algebra wählen wir die Matrizen  $\Lambda_i$  und  $\Omega_i$  in der Entwicklung

$$\omega(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \Lambda_i + \sum_{i=1}^3 \theta_i \Omega_i. \quad (2.39)$$

Diese haben die explizite Form

$$\Lambda_1 = - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_3 = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

und

$$\Omega_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Wegen (2.38) lauten die Kommutatoren dieser Basiselemente

$$[\Lambda_i, \Lambda_j] = -\epsilon_{ijk} \Omega_k, \quad [\Omega_i, \Omega_j] = \epsilon_{ijk} \Omega_k, \quad [\Lambda_i, \Omega_j] = \epsilon_{ijk} \Lambda_k. \quad (2.42)$$

Im Gegensatz zur Drehgruppe ist die Lorentz-Gruppe eine nicht-kompakte Liesche Gruppe vom Rang 2. Es können also genau zwei Erzeugende aus  $so(1, 3)$ , zum Beispiel  $\Lambda_3$  und  $\Omega_3$ , gleichzeitig diagonalisiert werden.

## 2.2.4 Poincaré Algebra

Wir führen eine Basis der 6-dimensionalen Lorentz-Algebra ein, ähnlich den Matrizen  $\Lambda_i$  und  $\Omega_i$ , und bezeichnen die 6 Matrizen mit  $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$ . Die  $\mu, \nu$  bezeichnen nicht etwa Indexe einer Matrix  $M$  sondern für jedes Paar  $\mu \neq \nu$  ist  $M_{\mu\nu}$  eine 4-dimensionale Matrix. Ein beliebiges Element der Lorentz-Algebra ist eine Linarkombination dieser Matrizen,  $\omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu} \equiv (\omega, M)$ , und erfüllt

$$(\omega, M)^T \eta + \eta (\omega, M) = 0.$$

Diese Bedingung bedeutet, dass jede der 6 Matrizen  $M_{\mu\nu}$  nach herunterziehen der Indexe antisymmetrisch ist,

$$(M_{\mu\nu})_{\rho\sigma} = -(M_{\mu\nu})_{\sigma\rho}.$$

Als unabhängige antisymmetrische Matrizen wählen wir

$$(M_{\mu\nu})_{\rho\sigma} = -i(\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\rho}\eta_{\mu\sigma}). \quad (2.43)$$

Der Faktor  $i$  wurde eingeführt, damit die  $M_{\mu\nu}$  hermitesche Matrizen sind. Zum Beispiel sind

$$M_{01} = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Erzeugenden erfüllen die Kommutationsregeln

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} - \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma}). \quad (2.44)$$

Sie sind die relativistische Verallgemeinerung der gekannten Kommutationsregeln für die Komponenten des Drehimpulses. Da die Lorentz-Gruppe die Drehungen als Untergruppe enthalten, müssen die Erzeugenden der Drehgruppe, also die Drehimpulse, eine Lie-Unteralgebra der Lorentz-Algebra bilden. In der Tat, setzen wir  $J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M_{jk}$ , dann folgen aus (2.44) folgende Kommutationsregeln für die Erzeugenden  $J_i$ ,

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k. \quad (2.45)$$

Die verbleibenden Generatoren  $M_{0i}$  erzeugen Lorentzboosts.

Eine Lorentztransformation in der Komponente  $L_+^\dagger$  hat dann die Form

$$(\Lambda, 0) = e^{\frac{i}{2}(\omega, M)} = \mathbb{1} + \frac{i}{2}(\omega, M) + O(\omega^2). \quad (2.46)$$

Die normale Untergruppe der *Translationen* besteht aus den Elementen

$$(\mathbb{1}, a) = e^{ia^\mu P_\mu} = e^{i(a, P)} = \mathbb{1} + i(a, P) + O(a^2). \quad (2.47)$$

Zwei Translationen vertauschen, so dass die Erzeugenden kommutierenden,

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad \mu, \nu = 0, \dots, 3.$$

Die Kommutationsregeln zwischen infinitesimalen Lorentz-Transformationen und Translationen folgen aus

$$(\Lambda, 0)(\mathbb{1}, a)(\Lambda, 0)^{-1} = (\mathbb{1}, \Lambda a) \quad \text{bzw.} \quad e^{\frac{i}{2}(\omega, M)} e^{i(a, P)} e^{-\frac{i}{2}(\omega, M)} = e^{i(\Lambda a, P)}$$

Ein Vergleich der Terme linear in  $\omega$  und  $a$  ergibt

$$[\omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu}, a^\alpha P_\alpha] = \omega^{\mu\nu} (M_{\mu\nu} a, P).$$

Da dies für beliebige Koeffizienten  $\omega^{\mu\nu}$  und  $a^\alpha$  gilt folgern wir

$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = (M_{\mu\nu})^\sigma_\rho P_\sigma = i(\eta_{\mu\rho}P_\nu - \eta_{\nu\rho}P_\mu).$$

Zusammengefasst erhalten wir die wichtigen Kommutationsregeln der Erzeugenden der Poincare-Gruppe,

$$\begin{aligned} [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= i(\eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} - \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma}) \\ [M_{\mu\nu}, P_\rho] &= i(\eta_{\mu\rho}P_\nu - \eta_{\nu\rho}P_\mu) \\ [P_\mu, P_\nu] &= 0 \end{aligned} \quad (2.48)$$

## 2.3 Relativistische Wellenmechanik

Die relativistische Wellenmechanik geht auf LOUIS DE BROGLIE und ERWIN SCHRÖDINGER zurück. Ersterer suchte 1923 eine relativistische Quantenmechanik für eine feste Anzahl Teilchen. Materielle Teilchen werden dabei durch ebene Wellen mit Kreisfrequenz  $\omega$  und Wellenzahlvektor  $\mathbf{k}$  beschrieben,

$$\psi \sim e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})/\hbar}. \quad (2.49)$$

Die Phase ist lorentzinvariant, wenn bei einem Wechsel der Inertialsysteme  $(k^\mu) = (\omega/c, \mathbf{k})$  und  $(x^\mu) = (ct, \mathbf{x})$  gleich transformieren. Frequenz und Wellenzahlvektor bilden demnach einen 4-er Vektor. Die Einsteinsche Relation  $E = h\nu = \hbar\omega$  für Photonen legt dann folgende Beziehung zwischen dem 4-er Impuls und 4-er Wellenzahlvektor von materiellen Teilchen nahe

$$(p^\mu) = \begin{pmatrix} E/c \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hbar\omega/c \\ \hbar\mathbf{k} \end{pmatrix} = (\hbar k^\mu). \quad (2.50)$$

Der Wellencharakter von Teilchen wurde 1927 von ELSASSER durch Interferenzeffekte bei der Streuung von Elektronen an Kristallen nachgewiesen.

Bei seinen Arbeiten zur Wellenmechanik fand SCHRÖDINGER zuerst eine relativistische Wellengleichung, welche die Feinstruktur des Wasserstoffatoms allerdings nicht erklären konnte. KLEIN und GORDON haben diese Wellengleichung einige Monate ebenfalls entdeckt und heute trägt die Gleichung ihren Namen. Die Wellengleichung kann folgendermaßen begründet werden: Für ein Teilchen der Masse  $m$  und Ladung  $e$  in einem äußeren elektromagnetischen Feld, gegeben durch ein Vektorpotential  $\mathbf{A}$  und ein skalares Potential  $\varphi$ , sind Energie und Impuls wie folgt verknüpft,

$$(E - e\varphi)^2 - c^2 \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 = (mc^2)^2. \quad (2.51)$$

Wir wollen annehmen, dass die Korrespondenzregeln für freie Teilchen

$$E = \hbar\omega \longrightarrow i\hbar\partial_t \quad \text{und} \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \longrightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla, \quad (2.52)$$

auf Teilchen im äußeren Feld übertragbar sind. Dem Teilchen wird eine Wellenfunktion  $\psi$  zugeordnet, welche dann in natürlichen Einheiten die Wellengleichung

$$\left( (i\partial_t - e\varphi)^2 - (i\nabla + e\mathbf{A})^2 - m^2 \right) \psi(t, \mathbf{x}) = 0 \quad (2.53)$$

erfüllt. Die relativistische Kovarianz wird klarer, wenn wir das 4-er Potential

$$(A^\mu) = (\varphi, \mathbf{A}) \quad \text{oder} \quad (A_\mu) = (\varphi, -\mathbf{A}) \quad (2.54)$$

einführen. Dann schreibt sich die Wellengleichung (2.53) folgendermaßen,

$$\eta^{\mu\nu} (i\partial_\mu - eA_\mu) (i\partial_\nu - eA_\nu) \psi - m^2 \psi = 0. \quad (2.55)$$

Ähnlich wie im nichtrelativistischen Grenzfall kann man im statischen Coulombfeld  $\varphi = e/4\pi r$  und  $\mathbf{A} = 0$  die Zeit abspalten,  $\psi(t, \mathbf{x}) = \exp(-iEt)\psi(\mathbf{x})$ , und findet folgende Energieeigenwerte für das Wasserstoffatom,

$$\frac{E_{n,\ell}}{mc^2} = 1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{\alpha^4}{2n^4} \left( \frac{n}{\ell + 1/2} - \frac{3}{4} \right) + \dots, \quad n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \ell \leq n-1. \quad (2.56)$$

Der in der Sommerfeldschen Feinstrukturkonstante  $\alpha$  quadratische Term erklärt die Grobstruktur des Wasserstoffspektrums. Der Term proportional zu  $\alpha^4$  war aber im Widerspruch zu PASCHENS Messungen der Feinstruktur im Jahr 1916. Nach der Arbeit von UHLENBECK und GOUDSMIT über den Elektronenspin im Jahre 1925 wurde klar, dass die bis dahin unverstandene Feinstruktur auf den Spin zurückzuführen war. Kurz danach, in den Jahren 1926 und 1927 modifizierten HEISENBERG, JORDAN und DARWIN das Schrödingersche Resultat durch Einführung der *Spin-Bahn Kopplung*. Sie fanden die korrekte Feinstruktur der Energieeigenwerte,

$$\frac{E_{n,j}}{mc^2} = 1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{\alpha^4}{2n^4} \left( \frac{n}{j + 1/2} - \frac{3}{4} \right) + \dots, \quad j \in \mathbb{N} - \frac{1}{2}. \quad (2.57)$$

Im Jahre 1928 fand DIRAC die nach ihm benannte Wellengleichung erster Ordnung für das 4-komponentige Elektronenfeld  $\psi$ . Diese relativistisch kovariante Gleichung beschreibt den Elektronenspin von Beginn an und führt auf das (beinahe) korrekte magnetische Moment des Elektrons und das exakte Spektrum des Wasserstoffatoms. Die Notwendigkeit einer Wellengleichung ersten Ordnung kann folgendermaßen plausibel gemacht werden. Versucht man für die relativistische Klein-Gordon-Gleichung, ähnlich wie für die nicht-relativistische Schrödinger-Gleichung eine im Feld quadratische Dichte mit zeitunabhängigem Raumintegral zu finden, so erhält man notwendigerweise  $\rho \propto \Im \psi^* (\partial_t - ie\varphi)\psi$ . Nun sieht man aber leicht ein, dass diese Dichte negativ werden kann und damit als Wahrscheinlichkeitsdichte nicht in Frage kommt. Es gibt keine Wahrscheinlichkeitsdichte für die relativistische Schrödinger-Gleichung. Die Ursache ist das Auftreten der zweiten Ableitung nach der Zeit in der Wellengleichung. Will man die Wahrscheinlichkeitsinterpretation der nicht-relativistischen Quantenphysik beibehalten, dann braucht man eine Wellengleichung mit nur erster Zeitableitung. In einer relativistisch Wellengleichung können die Raumableitungen dann ebenfalls nur von ersten Ordnung sein. Dies führt auf den Ansatz

$$E\psi = H\psi, \quad H = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + m\beta, \quad E = i\partial_t, \quad \mathbf{p} = \frac{1}{i}\nabla, \quad (2.58)$$

mit Matrizen  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  und  $\beta$ . Diese Gleichung impliziert folgende Gleichung zweiter Ordnung

$$E^2\psi = H^2\psi,$$

die mit der relativistischen Energie-Impuls Beziehung  $E^2 = \mathbf{p}^2c^2 + m^2$  verträglich sein soll. Dies führt auf die Bedingungen

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}\mathbb{1}, \quad \beta^2 = \mathbb{1} \quad \text{und} \quad \{\beta, \alpha_i\} = 0. \quad (2.59)$$

Wir multiplizieren obige Wellengleichung erster Ordnung mit  $\beta$  und setzen

$$\beta\alpha_i = \gamma^i \quad \text{und} \quad \beta = \gamma^0. \quad (2.60)$$

Dann ergibt sich die kovariante Form der Dirac-Gleichung für ein freies Teilchen,

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\psi = 0, \quad \text{mit} \quad p_\mu = i\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv i\partial_\mu. \quad (2.61)$$

Die Gamma-Matrizen  $\gamma^\mu$  erfüllen die Antikommutationsregeln

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1}_4. \quad (2.62)$$

Bei Anwesenheit eines äußeren elektromagnetischen Feldes  $A_\mu$  ergibt die minimale Substitution die Dirac-Gleichung

$$i\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu)\psi - m\psi = 0. \quad (2.63)$$

Diese Wellengleichung lässt in der Tat eine zeitlich erhaltene und positive Größe zu,

$$Q = \int d\mathbf{x} \rho(t, \mathbf{x}), \quad (2.64)$$

worin die Dichte wie in der nichtrelativistischen Theorie die 0-Komponente eines kovariant erhaltenen 4-er Stroms ist,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \mathbf{j} = 0, \quad \rho = \psi^\dagger \psi, \quad \mathbf{j} = \psi^\dagger \boldsymbol{\alpha} \psi. \quad (2.65)$$

Im Jahre 1928 bestimmten DARWIN und GORDON die Energie-Eigenwerte der zeitunabhängigen Dirac-Gleichung für ein Elektron im Coulombfeld,

$$\frac{E_{n,j}}{mc^2} = 1 + \frac{\alpha^2}{\left(n - j - 1/2 + \sqrt{(j + 1/2)^2 - \alpha^2}\right)^2}. \quad (2.66)$$

Die Entwicklung in Potenzen in der Feinstrukturkonstante  $\alpha$  reproduziert das Resultat von HEISENBERG, JORDAN und DARWIN.

Die Dirac-Gleichung hat einige ungewöhnliche Eigenschaften. Zum Beispiel hat die Wellenfunktion 4 Komponenten,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}, \quad (2.67)$$

und nicht nur eine wie in der nichtrelativistischen Wellenmechanik oder nicht nur zwei wie in der Pauli-Gleichung für ein nicht-relativistisches Elektron mit Spin. Problematisch war auch, dass die Gleichung Lösungen mit negativen Energien hat. Zum Beispiel lösen ebene Wellen

$$\psi(t, \mathbf{x}) = e^{i(\mathbf{p}\mathbf{x} - Et)}\psi_0 \quad (2.68)$$

mit konstantem Spinor  $\psi_0$  die freie Dirac-Gleichung für positive und negative Energien,

$$E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \quad \text{und} \quad E = -\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}. \quad (2.69)$$

Von jeder Sorte gibt es zwei linear unabhängige Lösungen. Das Problem mit den negativen Energie hat man schon in der klassischen Mechanik. Auch die Einsteinsche Relation  $E^2 = m^2 + \mathbf{p}^2$  in der relativistischen Mechanik hat die beiden Lösungen (2.69). Wir nehmen aber an, dass physikalische Teilchen nur positive Energien haben, da sonst die Energie eines Teilchens mit zunehmender Geschwindigkeit abnehmen würde.

In der Quantenmechanik wird man aber die Zustände mit negativer Energie nicht so schnell los. Die Wechselwirkung von geladenen Teilchen positiver Energie mit der Strahlung kann diese in Teilchen mit negative Energie umwandeln. Es stellt sich dann die Frage, warum Materie stabil ist. Zur Lösung dieses Stabilitätsproblem postulierte DIRAC, dass alle (oder fast alle) Zustände mit negativen Energien besetzt seien. Die Gesamtheit der Zustände mit negativer Energie wird mit *Dirac-See* bezeichnet. Im Vakuum sind alle Seezustände gefüllt. Löcher im See sind Teilchen mit umgekehrten Quantenzahlen als Elektronenzustände mit positiver Energie. DIRAC hat anfänglich Löcher im See mit Protonen identifiziert. OPPENHEIMER und TAMM zeigten jedoch, dass mit dieser Annahme die Elektron-Proton Vernichtungsrate in Atomen zu groß wäre. Die Lochzustände sollten auch die gleiche Masse wie die Elektronen haben und deshalb postulierte Dirac 1931 ein neues Teilchen mit Elektronenmasse aber positiver elektrischer Ladung – das *Positron*. Ein Jahr später wurde dieses Teilchen von ANDERSON auch entdeckt.

Die relativistische Klein-Gordon-Gleichung spielt in der modernen Teilchenphysik eine ähnlich wichtige Rolle wie die Dirac-Gleichung. Es existieren Teilchen mit Spin 0, welche durch die Klein-Gordon-Gleichung erfolgreich beschrieben werden. So wird das Spektrum von pionischen Atomen, zum Beispiel von Atomen bei denen das Elektron durch ein negativ geladenes Pion ersetzt wurde, mit dieser Gleichung erklärt. Auch das Problem mit den negativen „Wahrscheinlichkeitsdichten“ ist gelöst. Die Wellenfunktion wird in einer Theorie der quantisierten Felder uminterpretiert: Sie ist keine Wahrscheinlichkeitsamplitude sondern wird zu einem *Feldoperator*, der Teilchen erzeugt und vernichtet.

## 2.4 Aufgaben

### Aufgabe 1: Natürliche Einheiten

Drücken Sie die Gravitationskonstante  $G_N = 6.67 \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$  in Einheiten von GeV aus. Wie groß ist die Planck-Masse  $m_{\text{pl}} = G_N^{-1/2}$ .

Welcher Länge, Zeit, Energie und Masse (in SI-Einheiten) entspricht 1 GeV (in natürlichen Einheiten)

### Aufgabe 2: Intervalle im Minkowski-Raum

Zwei Ereignisse  $P_1$  und  $P_2$  seien durch ein 1) raumartiges, 2) zeitartiges und 3) lichtartiges



Intervall getrennt. Zeigen Sie, dass

1. ein Inertialsystem existiert, in dem die  $P_i$  gleichzeitig sind und das ihre Zeitreihenfolge durch eine geeignete Wahl des Systems vertauscht werden kann,
2. ein Inertialsystem existiert, in dem die  $P_i$  am selben Raumpunkt sind.
3. Bestimmen Sie die Hyperfläche in der Raumzeit, auf der  $P_2$  bezüglich  $P_1$  liegen kann.

Hinweis: Wählen Sie  $P_1$  als Koordinatenursprung.

### Aufgabe 3: Lorentz-Gruppe

Zeigen Sie, daß die homogenen Lorentztransformationen eine Gruppe bilden. Benutzen Sie dabei, dass die  $\Lambda$  in  $x \rightarrow \Lambda x$  die Bedingung

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta, \quad \eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

erfüllen müssen. Finden Sie mindestens zwei echte Untergruppen der Lorentz-Gruppe. Wiederholen Sie dies für die Poincare-Transformationen,  $x \rightarrow \Lambda x + a$ , wobei  $a$  ein beliebiger Vierervektor ist und  $\Lambda$  die Matrix einer Lorentztransformation.

### Aufgabe 4: Infinitesimale Lorentztransformationen I

Unter Lorentztransformationen transformiert ein Skalarfeld wie folgt,

$$\phi'(x') = \phi(x), \quad x' = \Lambda x.$$

Jede eigentliche Lorentztransformation hat die Form

$$(\Lambda^\mu{}_\nu) = \Lambda = e^\omega$$

mit infinitesimalen Erzeugenden  $\omega = (\omega^\mu{}_\nu)$ , die nach Herunterziehen des ersten Indexes antisymmetrisch wird,  $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ . Berechne die infinitesimale Form der obigen Lorentztransformation.



## 3 Klassische Feldtheorien

Mit der Entdeckung der Maxwell'schen Gleichungen im 19'ten Jahrhundert hielten die klassischen Feldtheorien Einzug in der Physik. Relativistische Feldgleichungen besitzen Wellenlösungen und das sorgfältige Studium der Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen führte dann auch zur speziellen Relativitätstheorie. Wie in den meisten Darstellungen der Feldtheorie wählen auch wir den Weg über das Variationsprinzip. In diesem Zugang ist die Behandlung der wichtigen Symmetrien in Feldtheorien relativ durchsichtig.

### 3.1 Klassische Felder

In jeder relativistischen Feldtheorie gibt es eine Vorschrift, wie die Felder bei Wechsel des Inertialsystems zu transformieren sind. Die Vorschrift ist einfach für Tensorfelder, die Bosonen mit ganzzahligem Spin beschreiben. Für Fermionen mit halbganzen Spins braucht es Spinorfelder. Im Folgenden seien  $x$  die Koordinaten im Inertialsystem  $I$  und  $x'$  die Koordinaten im Inertialsystem  $I'$ . Der Übergang zwischen den Inertialsystemen geschieht mit Hilfe einer Poincare-Transformation

$$x' = \Lambda x + a, \quad (3.1)$$

wobei, wie im Abschnitt 2.2 gezeigt wurde, die vierdimensionale reelle Matrix  $\Lambda$  die Bedingung  $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$  erfüllen muss.

#### 3.1.1 Tensorfelder und Spinorfelder

Ein *Skalarfeld* ordnet jedem Ereignis eine reelle oder komplexe Zahl zu,  $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Im Inertialsystem mit Koordinaten  $x$  ordnet es jedem  $x$  eine reelle Zahl zu,

$$x \longrightarrow \phi(x) \in \mathbb{R}.$$

Der Wert des Feldes in einem Punkt ist gleich in allen Inertialsystemen: Ist  $\phi$  das Feld in  $I$  und  $\phi'$  das Feld in  $I'$ , dann gilt

$$\phi'(x') = \phi(x). \quad (3.2)$$

Skalare Felder beschreiben spinlose Teilchen.

Ein *Vektorfeld* ordnet jedem Ereignis einen Vektor zu,  $A : M \rightarrow \mathbb{R}^4$ . Im Bezugssystem mit Koordinaten  $x$

$$x \longrightarrow A_\mu(x) \in \mathbb{R}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

Wechselt man das Bezugssystem, dann transformieren die Komponenten des Vektorfelds wie folgt,

$$A'_\mu(x') = \Lambda_\mu^\alpha A_\alpha(x). \quad (3.3)$$

Vektorfelder beschreiben Teilchen mit Spin 1, zum Beispiel Photonen.

Allgemeiner ordnet ein *Tensorfeld* jedem Punkt einen Tensor zu. Ein Tensorfeld  $T_{\mu\nu}$  zweiter Stufe transformiert unter Poincare-Transformationen gemäß

$$T'_{\mu\nu}(x') = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta T_{\alpha\beta}(x). \quad (3.4)$$

*Spinorfelder* beschreiben Fermionen mit halbganzen Spins. Sie transformieren nicht wie Tensoren sondern wie Spinoren. Zum Beispiel hat das Diracfeld  $\psi$  des Elektrons 4 komplexe Komponenten und transformiert unter Poincare-Transformationen gemäß

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x). \quad (3.5)$$

Dabei ist  $S(\Lambda)$  die zur Lorentztransformation  $\Lambda$  gehörige Spinrotation. Die Abbildung muss eine Darstellung der Lorentzgruppe sein,  $S(\Lambda_1\Lambda_2) = S(\Lambda_1)S(\Lambda_2)$  und  $S(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ . Genau genommen ist es wegen  $S(-\Lambda) = S(\Lambda)$  nur eine Darstellung der universellen Überlagerung  $SL(2, \mathbb{C})$  der Lorentzgruppe. Dies sollte uns nicht wundern, weil ja schon die zweikomponentige Wellenfunktion eines nicht-relativistischen Elektrons bei Raumdrehungen mit  $SU(2)$  und nicht mit  $SO(3)$  transformiert. Mehr zum Transformationsverhalten von Spinorfelder besprechen wir im Kapitel über die Quantisierung von Spinorfeldern. Im Folgenden wollen wir Felder  $\Phi$  mit beliebigem Spin behandeln.

## 3.2 Variationsprinzip

Für alle fundamentalen Feldgleichungen existiert ein *Variationsprinzip*, nachdem die Feldgleichung die Euler-Lagrange-Gleichung einer Wirkung

$$S[\Phi] = \int dt L[\Phi, \dot{\Phi}], \quad (3.6)$$

ist. Die Lagrangefunktion hänge nur vom Feld und seiner ersten Zeitableitung ab. Dann kann das Anfangswertproblem nach Angabe von  $\Phi$  und  $\dot{\Phi}$  zu einer festen Zeit gelöst werden. Die Lagrangefunktion  $L$  ist ihrerseits das Raumintegral einer Lagrange-Dichte

$$L[\Phi, \dot{\Phi}] = \int d\mathbf{x} \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi). \quad (3.7)$$

In einer lorentzinvarianten Theorie müssen auch die ersten Ableitung nach den Raumkoordinaten auftreten wenn die erste Ableitung nach der Zeit auftritt.

Die Wirkung in (3.6) ist also das Raumzeit-Integral der Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}$ ,

$$S[\Phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi). \quad (3.8)$$

Wollen wir das starke Äquivalenzprinzip erfüllen, dann sollte die Wirkung eines Feldes in allen Inertialsystemen gleich sein. Dies ist der Fall wenn die Lagrange-Dichte ein Skalarfeldes ist,

$$\mathcal{L}(x) \equiv \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi)(x) = \mathcal{L}(\Phi', \partial'_\mu \Phi')(x') \equiv \mathcal{L}'(x'). \quad (3.9)$$

Die Invarianz von  $S$  folgt aus der Invarianz der Volumenform in (3.8),

$$d^4x' = \det(\Lambda) d^4x = d^4x.$$

Eine stationäre Konfiguration  $\Phi$  einer invarianten Wirkung ist stationär in allen Inertialsystemen. Deshalb führt jede Lorentz Transformation eine Lösung in eine Lösung über. Dies bedeutet, dass die Euler-Lagrange-Gleichungen einer Lorentz invarianten Wirkung kovariante Feldgleichungen sind.

Um die Euler-Lagrange-Gleichungen zu finden betrachten wir eine kleine Änderung (Variation)  $\delta\Phi(x)$  von  $\Phi(x)$  und entwickeln die Wirkung (3.8) in Potenzen von  $\delta\Phi$ ,

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \partial_\mu \delta\Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta\Phi \right) + O(\delta\Phi^2) \\ &= \int d^4x \left( -\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \right) \delta\Phi + O(\delta\Phi^2). \end{aligned}$$

In der letzten Zeile haben wir partiell integriert was erlaubt ist, wenn die Variation in alle Richtungen (räumliche und zeitliche) genügend schnell abfällt. Bis auf diese Einschränkung ist die Variation  $\delta\Phi$  beliebig und deshalb ist  $S$  genau dann stationär, wenn die Euler-Lagrange Gleichung erfüllt ist

$$\frac{\delta S}{\delta\Phi(x)} = 0 \implies \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi(x))} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi(x)} = 0. \quad (3.10)$$

**Skalarfeld:** Die Lagrangedichte des freien reellen Skalarfeldes ist

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2) \quad (3.11)$$

und die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung ist die Klein-Gordon-Gleichung,

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} = 0 \iff \square \phi + m^2 \phi = 0. \quad (3.12)$$

**Photonenfeld:** In der *Elektrodynamik* führen wir den Feldstärketensor als 4-er Rotation des Viererpotentials ein,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad A^\mu = (A^0, \mathbf{A}). \quad (3.13)$$

Die Einträge des Feldstärketensors sind die Komponenten des elektrischen und magnetischen Feldes,

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Die Lagrangedichte des elektromagnetischen Feldes lautet

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (3.15)$$

Mit Hilfe der Ableitung

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -F^{\mu\nu} \quad (3.16)$$

führt das Variationsprinzip auf die Maxwellgleichungen im Vakuum,

$$\frac{\delta S}{\delta A_\mu} = 0 \iff \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \quad (3.17)$$

Die Wirkung für das Feld von Elektronen und Positronen diskutieren wir später.

## 3.3 Noether Theorem

Symmetrien sind Transformationen der Felder die Lösungen in Lösungen überführen. Können die Feldgleichungen aus einem Variationsprinzip gewonnen werden, dann ist eine Transformation der Felder eine Symmetrie, wenn sie die Wirkung invariant lässt. In einer relativistischen Theorie ist die Wirkung Poincare-invariant. Neben dieser Invarianz kann sie weitere Symmetrien zulassen, zum Beispiel innere Symmetrien oder Supersymmetrien.

### 3.3.1 Innere Symmetrien

Innere Symmetrietransformationen wirken nicht auf die Koordinaten. Wir wollen annehmen, dass die Transformationen linear sind,  $\Phi \rightarrow \Phi' = U\Phi$  und die Wirkung nicht ändern. Da die Transformationen nicht auf die Koordinaten wirken, ist dann sogar die Lagrangedichte invariant. Führt man zwei Symmetrietransformationen hintereinander aus, dann erhält man wieder eine Symmetrietransformation. Damit bilden die Transformationen  $U$  eine Gruppe, die Symmetriegruppe. Wir wollen annehmen, dass die Gruppenelemente  $U$  von  $n$  reellen Parametern abhängen und stetig in die Einheit  $\mathbb{1}$  deformiert werden können. Eine

Transformation nahe der Einheit können wir mit einer infinitesimalen Erzeugenden approximieren,  $U \approx \mathbb{1} + iX$ . Die entsprechende infinitesimale Änderung des Feldes ist dann

$$\Phi \longrightarrow U\Phi \approx \Phi + iX\Phi = \Phi + \delta_X\Phi. \quad (3.18)$$

Nach dem wichtigen Theorem von EMMY NOETHER gehört zu jedem der  $n$  Parameter der Symmetriegruppe eine erhaltene Ladung. Zum Beweis bemerken wir, dass aus der Invarianz der Lagrangedichte folgt

$$0 = \delta_X\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)} \partial_\mu(\delta_X\Phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi} \delta_X\Phi$$

Hier benutzen wir die Euler-Lagrange-Gleichungen (3.10) um im letzten Term die Ableitung von  $\mathcal{L}$  nach  $\Phi$  zu eliminieren. Dies führt auf die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\mu J_X^\mu = 0, \quad J_X^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)} \delta_X\Phi. \quad (3.19)$$

Damit haben wir für jede infinitesimale Erzeugende  $X$  einen erhaltenen Noether-Strom konstruiert, und zwar für jede linear unabhängige Erzeugende eine Strom. Die Anzahl unabhängiger Ströme ist gleich der Anzahl Parameter der Symmetriegruppe. Die erhaltenen Noetherladungen erhält man durch Integration über den Raum,

$$\frac{dQ_X}{dt} = 0 \quad \text{mit} \quad Q_X = \int_{x^0} dx \, J_X^0, \quad J_X^0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\Phi)} \delta_X\Phi. \quad (3.20)$$

### $U(1)$ Eichtransformationen und elektrische Ladung

Um elektrisch geladene Teilchen zu beschreiben braucht es komplexe oder mehrere reelle Felder. Als Beispiel betrachten wir die Lagrange-Dichte eines komplexen und selbstwechselwirkenden Skalarfeldes,

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi - m^2\phi^\dagger\phi - \lambda(\phi^\dagger\phi)^2. \quad (3.21)$$

Die zugehörigen Euler-Lagrange Gleichungen sind folgende nicht-lineare Verallgemeinerung der linearen Klein-Gordon-Gleichung

$$\square\phi + m^2\phi + 2\lambda(\phi^\dagger\phi)\phi = 0. \quad (3.22)$$

Die Lagrange-Dichte ist invariant unter globalen Phasentransformationen

$$\phi \longrightarrow e^{i\lambda}\phi \sim \phi + \delta_\lambda\phi, \quad \text{mit} \quad \delta_\lambda\phi = i\lambda\phi, \quad \delta_\lambda\phi^\dagger = -i\lambda\phi^\dagger, \quad (3.23)$$

und der zugehörige Noetherstrom hat die Form

$$J_\lambda^\mu = \lambda j^\mu, \quad j_\mu = i(\partial_\mu\phi^\dagger\phi - \phi^\dagger\partial_\mu\phi). \quad (3.24)$$

Mit Hilfe der Feldgleichung beweist man leicht, dass diese Stromdichte kovariant erhalten ist,  $\partial_\mu j^\mu = 0$ . Die erhaltene Noetherladung ist die vom Feld getragene elektrische Ladung,

$$Q = i \int_t d\mathbf{x} \left( \dot{\phi}^\dagger \phi - \phi^\dagger \dot{\phi} \right), \quad (3.25)$$

und kann beide Vorzeichen haben. Es existieren weitere wichtige innere Symmetrien in der Natur mit ihren zugehörigen Noetherladungen. Am bekanntesten sind die Eichsymmetrien und Eichladungen.

### 3.3.2 Raumzeit-Symmetrien

Bei Symmetrien der Raumzeit transformiert das Argument  $x$  des Feldes. Am bekanntesten sind die früher besprochenen Translationen in Raum und Zeit und die Lorentztransformationen.

#### Translationen und Energie-Impuls-Tensor

Unter Translationen in der Raumzeit transformiert ein Feld gemäß

$$\Phi(x - a) \sim \Phi(x) - a^\mu \partial_\mu \Phi(x) = \Phi(x) + \delta_a \Phi(x). \quad (3.26)$$

Da der Punkt  $x$  transformiert ist die Lagrange-Dichte nicht mehr invariant. Aber die Wirkung sollte trotzdem invariant sein, damit Translationen Lösungen in Lösungen überführen. Sie ist in der Tat invariant, da die Änderung der Lagrange-Dichte, die ja ein skalares Feld ist, nach (3.26) eine totale Divergenz ist,

$$\delta_a \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \partial_\mu (\delta_a \Phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta_a \Phi = -a^\nu \partial_\nu \mathcal{L}. \quad (3.27)$$

Unter Zuhilfenahme der Euler-Lagrange-Gleichungen (3.10) ergibt sich die Identität

$$0 = \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} a^\nu \partial_\nu \Phi \right) - a^\nu \partial_\nu \mathcal{L}, \quad \text{bzw.} \quad \partial_\mu J_a^\mu = 0 \quad (3.28)$$

mit kovariant erhaltenem *kanonischen Energie-Impuls-Tensor* als Noetherströme für die 4 Translationen in Raum und Zeit,

$$J_a^\mu = a^\nu T_{\nu}^\mu, \quad T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \Phi)} \partial_\nu \Phi - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (3.29)$$

Die erhaltenen Ladungen sind die Gesamtenergie und der Gesamtimpuls des Feldes,

$$P^\mu = \int_t d\mathbf{x} T^{0\mu}, \quad \dot{P}^\mu = 0. \quad (3.30)$$



**Skalarfeld:** Für das reelle Skalarfeld mit Lagrange-Dichte (3.11) finden wir den symmetrischen und erhaltenen Energie-Impuls-Tensor

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (3.31)$$

und dies führt auf die erhaltene Gesamtenergie

$$H = \frac{1}{2} \int D\mathbf{x} \left( \dot{\phi}^2 + \nabla \phi \nabla \phi + m^2 \phi^2 \right) \quad (3.32)$$

und den erhaltenen Feldimpuls

$$\mathbf{P} = - \int D\mathbf{x} \dot{\phi} \nabla \phi. \quad (3.33)$$

**Elektrodynamik:** Die lorentzinvariante Lagrange-Dichte des elektromagnetischen Feldes (3.15) ist quadratisch in den Feldern und die Ableitung nach  $\partial_\mu A_\nu$  ist proportional zum Feldstärketensor, siehe (3.16). Mit diesem Resultat findet man folgenden *kanonischen* Energie-Impuls Tensor,

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\rho)} \partial_\nu A_\rho - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L} = -F_\mu^\rho \partial_\nu A_\rho + \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}. \quad (3.34)$$

Dieser Tensor definiert vier erhaltene Noetherströme, nämlich  $T^{\mu\nu}$  mit  $\nu = 0, \dots, 3$ . Leider ist er weder invariant unter Eichtransformationen noch symmetrisch in den beiden kovarianten Indexen. Wegen der fehlenden Eichinvarianz kann er nicht beobachtbar sein. Wegen der fehlenden Symmetrie kann er nicht in den Einsteinschen Feldgleichungen benutzt werden.

### 3.3.3 Lorentztransformationen und Drehimpuls

Die Berechnung der zur Lorentzinvarianz gehörenden Noetherströme ist etwas aufwändiger. Unter einer Lorentztransformation  $\Lambda = e^\omega$  transformiert ein Feld gemäß

$$\begin{aligned} \Phi(x) &\longrightarrow S\Phi(\Lambda^{-1}x) = e^{\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}S_{\mu\nu}}\Phi\left(e^{-\frac{i}{2}(\omega,M)}x\right) \\ &\approx \left(\mathbb{1} + \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}S_{\mu\nu}\right)\left(\Phi(x) - \frac{i}{2}(\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}x)^\alpha\partial_\alpha\Phi(x)\right) \\ &\approx \phi(x) + \delta_\omega\phi(x). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Mit Hilfe der expliziten Darstellung der Erzeugenden  $M_{\mu\nu}$  in (2.43) findet man

$$\omega^{\mu\nu}(M_{\mu\nu})^{\alpha\beta}x_\alpha\partial_\beta = i\omega^{\mu\nu}(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu).$$

Deshalb haben die Erzeugenden  $J_{\mu\nu}$  der Lorentztransformationen in

$$\delta_\omega\Phi = \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}J_{\mu\nu}\Phi \quad (3.36)$$

folgende explizite Darstellung,

$$J_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + S_{\mu\nu} = \frac{1}{i} (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) + S_{\mu\nu}. \quad (3.37)$$

Die Differentialoperatoren  $L_{\mu\nu}$  kommutieren mit den Matrizen  $S_{\mu\nu}$  und sowohl die  $\{L_{\mu\nu}\}$  als auch die  $\{S_{\mu\nu}\}$  erfüllen die Lorentzalgebra (2.44). Damit erfüllen die  $\{J_{\mu\nu}\}$  ebenfalls die Lorentzalgebra. Für räumliche Indexe beschreibt  $L_{ij}$  den orbitalen Drehimpuls und  $S_{ij}$  den Spin des Teilchens.

Ähnlich wie bei den Translationen ist die Variation der Lagrange-Dichte bei infinitesimalen Lorentztransformationen eine totale Divergenz. Da  $\mathcal{L}$  wie ein skalares Feld transformiert, gilt

$$\delta_\omega \mathcal{L} = \frac{i}{2} (\omega, M) \mathcal{L} = \partial_\mu V^\mu \quad \text{mit} \quad V^\mu = -\omega^{\mu\rho} x_\rho \mathcal{L}. \quad (3.38)$$

Der Term proportional zur Variation  $\delta_\omega \Phi$  im kovariant erhaltenen Noetherstrom

$$J_\omega^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \Phi)} \delta_\omega \Phi - V^\mu \quad (3.39)$$

hat wegen (3.36) die einfache Form

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \Phi)} \delta_\omega \Phi = \frac{i}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \omega^{\rho\sigma} J_{\rho\sigma} \Phi.$$

Die Subtraktion von  $V^\mu$  führt dann auf die Stromdichte

$$J_\omega^\mu = \frac{\omega^{\rho\sigma}}{2} \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \Phi)} (x_\rho \partial_\sigma - x_\sigma \partial_\rho) \Phi - (\delta_\sigma^\mu x_\rho - \delta_\rho^\mu x_\sigma) \mathcal{L} + i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} S_{\rho\sigma} \Phi \right). \quad (3.40)$$

Die spinunabhängigen Terme sind gerade  $x_\rho T_\sigma^\mu - x_\sigma T_\rho^\mu$ , und deshalb gilt

$$J_\omega^\mu = \omega_{\rho\sigma} J^{\mu\rho\sigma}, \quad J^{\mu\rho\sigma} = \frac{1}{2} (x^\rho T^{\mu\sigma} - x^\sigma T^{\mu\rho}) + \frac{i}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} S^{\rho\sigma} \Phi. \quad (3.41)$$

Offensichtlich ist  $J^{\mu\rho\sigma} = -J^{\mu\sigma\rho}$  und deshalb existiert zu jedem  $\rho < \sigma$  ein unabhängiger Noetherstrom. Die 6 Noetherladungen sind

$$Q^{\rho\sigma} = -Q^{\sigma\rho} = \int_t d\mathbf{x} J^{0\rho\sigma}. \quad (3.42)$$

Die Raum-Zeit und Raum-Raum Komponenten sind

$$\begin{aligned} Q^{i0} &= \frac{1}{2} \int_{x^0} d\mathbf{x} (x^i \mathcal{H} - x^0 \Pi \partial^i \Phi - i\pi S^{0i} \Phi) \\ Q^{ij} &= \frac{1}{2} \int_{x^0} d\mathbf{x} \Pi (x^i \partial^j \Phi - x^j \partial^i \Phi + iS^{ij} \Phi). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Eine Rechnung zeigt, dass diese Ladungen die Lorentztransformationen erzeugen,

$$\{\Phi, Q^{\mu\nu}\} = \frac{i}{2} J^{\mu\nu} \Phi. \quad (3.44)$$

Zum Beispiel ist in der Elektrodynamik

$$Q^{\mu\rho\sigma} = \left( \frac{1}{4} \eta^{\mu\rho} x^\sigma F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - F^{\mu\xi} x^\sigma \partial^\rho A_\xi - F^{\mu\rho} A^\sigma \right) - (\rho \leftrightarrow \sigma). \quad (3.45)$$

Für Theorien mit Fermionen ist der Energie-Impulstensor nicht mehr symmetrisch und sollte verbessert werden. Für rein bosonische Theorien kann man relativ leicht einen verbesserten Energie-Impulstensor konstruieren indem man die Felder ans Gravitationsfeld koppelt und die resultierende Wirkung nach der Metrik variiert. Koppelt man fermionische Felder ans Gravitationsfeld dann muss man ein Vielbein einführen. Variiert man die Wirkung nach dem Vielbein, dann findet man zwar einen erhaltenen, aber im Allgemeinen unsymmetrischen Tensor.

### 3.4 Kanonischer Formalismus

Wie für Langrange Systeme mit einer endlichen Anzahl von Freiheitsgraden führen wir nun in der Feldtheorie den kanonisch konjugierten Impuls ein. Dazu müssen wir eine Aufspaltung der Raumzeit in Raum und Zeit vornehmen. Diese Aufspaltung ist abhängig vom gewählten Inertialsystem, so dass der kanonische Formalismus nicht manifest lorentz-kovariant ist. Berechnet man Größen oder Prozesse im Hamiltonschen Formalismus, dann sollte die Rechnung aber am Ende auf ein lorentzinvariantes Resultat führen.

In einer Feldtheorie ist der zu einem Feld kanonisch konjugierte Impuls ebenfalls ein Feld oder eine Dichte. Wie in der Mechanik gewinnt man die Impulsdichte durch Ableiten der Lagrangefunktion nach der Geschwindigkeit, im vorliegenden Fall nach der Zeitableitung des Feldes,

$$\Pi(\mathbf{x}) = \frac{\delta L}{\delta \dot{\Phi}(\mathbf{x})} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}(\mathbf{x})}. \quad (3.46)$$

Der Übergang von einem System mit vielen Freiheitsgraden, beschrieben durch Phasenraumvariablen  $(q^i, p_i)$ , zu einer Feldtheorie mit unendlich vielen Freiheitsgraden geschieht durch die Ersetzungen

$$q \longrightarrow \Phi, \quad p \longrightarrow \Pi, \quad i \longrightarrow \mathbf{x}. \quad (3.47)$$

Damit ist die Beziehung (3.46) die unmittelbare Übersetzung von

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}. \quad (3.48)$$

Die fundamentalen Poissonklammern von Feld und kanonisch konjugierter Impulsdichte zur gleichen Zeit ergeben sich entsprechend

$$\{\Phi(t, \mathbf{x}), \Pi(t, \mathbf{y})\} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \{\Phi(\mathbf{x}), \Phi(\mathbf{y})\} = \{\Pi(\mathbf{x}), \Pi(\mathbf{y})\} = 0. \quad (3.49)$$

Nun können wir mit Hilfe der Impulsdichte (3.46) die Noetherladung (3.20) wie folgt schreiben,

$$Q_X = \int_{x^0} d\mathbf{x} \Pi(\mathbf{x}) \delta_X \Phi(\mathbf{x}). \quad (3.50)$$

Nach dem Theorem von Emmy Noether führt eine Symmetrie der Wirkung unter einer kontinuierlichen Symmetriegruppe zu erhaltenen Ladungen. Nun zeigen wir in gewissem Sinne die Umkehrung, dass nämlich umgekehrt jede Noetherladung eine Symmetrie erzeugt. Dazu benutzen wir die Derivationsregel  $\{A, BC\} = B\{A, C\} + \{A, B\}C$  und erhalten für die Poissonklammer des Feldes mit der Ladung

$$\{\Phi(\mathbf{x}), Q_X\} = \int d\mathbf{y} \{\Phi(\mathbf{x}), \Pi(\mathbf{y})\delta_X\Phi(\mathbf{y})\} = \delta_X\Phi(\mathbf{x}). \quad (3.51)$$

Wir haben vorausgesetzt, dass  $\delta_X\Phi$  impulsunabhängig ist. Dieses Resultat zeigt, dass die erhaltene Ladung via Poissonklammern die Symmetrie erzeugt, aus der sie hervorging.

Ähnlich wie in der Mechanik kann man die Poissonklammern zwischen zwei beliebigen Funktionen  $F(\Phi, \Pi)$  und  $G(\Phi, \Pi)$  auf dem Phasenraum wie folgt berechnen,

$$\{F, G\} = \int dz \left( \frac{\delta F}{\delta\Phi(z)} \frac{\delta G}{\delta\Pi(z)} - \frac{\delta F}{\delta\Pi(z)} \frac{\delta G}{\delta\Phi(z)} \right). \quad (3.52)$$

Dies beweist man mit Hilfe der fundamentalen Poissonklammern und der Derivationsregel zuerst für Monome und dann für beliebige Polynome und folgert dann für alle Funktionen, die durch Polynome approximiert werden können.

### 3.4.1 Hamiltonfunktion für das Skalarfeld

Für ein reelles Skalarfeld haben Energie und Impuls die Form

$$P^0 \equiv H = \int_t d\mathbf{x} (\Pi\dot{\Phi} - \mathcal{L}) \quad \text{und} \quad P^i = \int_t d\mathbf{x} \pi \partial^i\Phi. \quad (3.53)$$

Diese Noether-Ladungen erzeugen die Translationen in Raum und Zeit,

$$\{\phi, P_\mu\} = \partial_\mu\phi. \quad (3.54)$$

Die Hamilton-Funktion ist die Legendre-Transformierte der Lagrange-Funktion

$$H[\Pi, \Phi] = \int d\mathbf{x} \Pi(\mathbf{x})\dot{\Phi}(\mathbf{x}) - L[\Phi, \dot{\Phi}] = \int d\mathbf{x} \mathcal{H}(\Pi, \Phi), \quad (3.55)$$

wobei auf der rechten Seite die Hamiltondichte auftritt. Für das Klein-Gordon Feld mit Lagrangefunktion

$$L = \int d\mathbf{x} \frac{1}{2} (\dot{\phi}^2 - (\nabla\phi)^2 - m^2\phi^2) \quad (3.56)$$

ist die Impulsdichte  $\pi = \dot{\phi}$  und entsprechend ist

$$H = \int d\mathbf{x} \mathcal{H}(\pi, \phi), \quad \mathcal{H}(\pi, \phi) = \frac{1}{2} (\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2). \quad (3.57)$$

Wir wollen uns davon überzeugen, dass die kanonischen Gleichungen dieser Hamilton-Funktion äquivalent zur Klein-Gordon-Gleichung sind. Wie erwartet ist die Zeitableitung des Feldes  $\dot{\phi}(\mathbf{x}) = \{\phi(\mathbf{x}), H\}$  gleich dem Impulsfeld,

$$\dot{\phi}(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{z} \frac{\delta\phi(\mathbf{x})}{\delta\phi(\mathbf{z})} \frac{\delta H}{\delta\pi(\mathbf{z})} = \int d\mathbf{z} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \pi(\mathbf{z}) = \pi(\mathbf{x}). \quad (3.58)$$

Für die Zeitableitung von  $\dot{\pi}(\mathbf{x}) = \{\pi(\mathbf{x}), H\}$  finden wir analog

$$\begin{aligned} \dot{\pi}(\mathbf{x}) &= - \int d\mathbf{z} \frac{\delta\pi(\mathbf{x})}{\delta\pi(\mathbf{z})} \frac{\delta H}{\delta\phi(\mathbf{z})} \\ &= \int d\mathbf{z} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}) (\Delta - m^2) \phi(\mathbf{z}) = \Delta\phi(\mathbf{x}) - m^2\phi(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (3.59)$$

wobei wir eine partielle Integration bezüglich  $\mathbf{z}$  vornahmen. Berücksichtigen wir noch (3.58), dann folgt wieder die Klein-Gordon-Gleichung für das Skalarfeld.

### 3.4.2 Impulsraum

Nun zerlegen wir das Skalarfeld und die konjugierte Impulsdichte in Normalmoden. Im flachen Raum kann man ebene Wellen wählen,

$$u_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \equiv \kappa e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \quad (3.60)$$

Diese sind auf die Delta-Distribution normiert,

$$(u_{\mathbf{p}}, u_{\mathbf{q}}) \equiv \int d\mathbf{x} u_{\mathbf{p}}^*(\mathbf{x}) u_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{x} e^{i\mathbf{x}\cdot(\mathbf{q}-\mathbf{p})} = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad (3.61)$$

und erfüllen die bekannten Vollständigkeitsrelationen

$$\int d\mathbf{p} u_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) u_{\mathbf{p}}^*(\mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.62)$$

Die Entwicklungen der klassischen Felder  $\phi$  und  $\pi$  nach diesem vollständigen Satz von Normalmoden enthalten die Fourierkoeffizienten  $\phi_{\mathbf{p}}$  und  $\pi_{\mathbf{p}}$ ,

$$\phi(\mathbf{x}) = \int d\mu(\mathbf{p}) \phi_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}), \quad \pi(\mathbf{x}) = \int d\mu(\mathbf{p}) \pi_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}). \quad (3.63)$$

Die Integration über die 3-er Impulse geschieht mit dem Mass

$$d\mu(\mathbf{p}) = \frac{d\mathbf{p}}{2\omega_{\mathbf{p}}} \quad \text{mit} \quad \omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}. \quad (3.64)$$

In den Übungen werden wir beweisen, dass  $d\mu$  ein lorentzinvariantes Mass auf der Massenschale  $p^2 = m^2$  ist. Die Umkehrtransformationen lauten

$$\phi_{\mathbf{p}} = 2\omega_{\mathbf{p}}(u_{\mathbf{p}}, \phi) = \phi_{-\mathbf{p}}^*, \quad \pi_{\mathbf{p}} = 2\omega_{\mathbf{p}}(u, \pi) = \pi_{-\mathbf{p}}^*, \quad (3.65)$$

wobei die letzten Gleichheitszeichen für ein reelles Feld gelten. Die Poisson-Klammern im Ortsraum (3.49) sind äquivalent zu den Poisson-Klammern

$$\{\phi_{\mathbf{p}}, \pi_{\mathbf{q}}\} = (2\omega_{\mathbf{p}})^2 \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \quad (3.66)$$

im Impulsraum. Um die Feldenergie durch die Fouriermoden auszudrücken, bemerken wir

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{x} |\pi(\mathbf{x})|^2 &= \int d\mu(\mathbf{p}) d\mu(\mathbf{q}) \pi_{\mathbf{p}} \pi_{\mathbf{q}}(u_{\mathbf{q}}^*, u_{\mathbf{p}}) = \int d\mu(\mathbf{p}) \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}} \pi_{\mathbf{p}} \pi_{\mathbf{p}}^* \\ \int d\mathbf{x} |\nabla\phi(\mathbf{x})|^2 &= i^2 \int d\mu(\mathbf{p}) d\mu(\mathbf{q}) (\mathbf{p}\mathbf{q}) \phi_{\mathbf{p}} \phi_{\mathbf{q}}(u_{\mathbf{q}}^*, u_{\mathbf{p}}) = \int d\mu(\mathbf{p}) \frac{\mathbf{p}^2}{2\omega_{\mathbf{p}}} \phi_{\mathbf{p}} \phi_{\mathbf{p}}^* \end{aligned}$$

und damit erhalten wir für die Feldenergie (3.57) den einfachen Ausdruck

$$H = \frac{1}{4} \int d\mu(\mathbf{p}) \left( \frac{1}{\omega_{\mathbf{p}}} \pi_{\mathbf{p}} \pi_{\mathbf{p}}^* + \omega_{\mathbf{p}} \phi_{\mathbf{p}} \phi_{\mathbf{p}}^* \right). \quad (3.67)$$

Setzen wir schlussendlich noch

$$\phi_{\mathbf{p}} = a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^*, \quad \pi_{\mathbf{p}} = -i\omega_{\mathbf{p}}(a_{\mathbf{p}} - a_{-\mathbf{p}}^*) \quad (3.68)$$

mit Koeffizienten  $a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^*$ , die folgende Poisson-Klammern haben

$$\{a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}\} = \{a_{\mathbf{p}}^*, a_{\mathbf{q}}^*\} = 0, \quad \{a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^*\} = -2i\omega_{\mathbf{p}} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad (3.69)$$

dann schreibt sich die Energie wie folgt:

$$H = \frac{1}{2} \int d\mu(\mathbf{p}) \omega_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^* + a_{\mathbf{p}}^* a_{\mathbf{p}}) = \int d\mu(\mathbf{p}) \omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^* a_{\mathbf{p}}. \quad (3.70)$$

Die Poisson-Klammern (3.69) werden bei der Quantisierung der Feldtheorie zu Kommutatoren der  $a_{\mathbf{p}}$  und  $a_{\mathbf{p}}^*$  zugeordneten Operatoren.

## 3.5 Anfangswertproblem und Pauli-Jordan-Funktion

Ist das Feld und die Impulsdichte zu einer festen Zeit gegeben, dann existiert eine eindeutige globale Lösung der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$\dot{\phi} = \pi \quad \text{und} \quad \dot{\pi} = \Delta\phi - m^2\phi. \quad (3.71)$$

Zur Lösung des Anfangswertproblems führen wir die *Pauli-Jordan-Funktion*  $\Delta_m$  ein, dies ist die spezielle Lösung der Klein-Gordan-Gleichung zur Anfangsbedingung

$$\Delta_m(t, \mathbf{x})|_{t=0} = 0 \quad \text{und} \quad \left. \frac{\partial \Delta_m(t, \mathbf{x})}{\partial t} \right|_{t=0} = -\delta(\mathbf{x}). \quad (3.72)$$

Für ein anfängliches Feld  $\phi_0(\mathbf{x})$  und eine anfängliche Impulsdichte  $\pi_0(\mathbf{x})$  lautet die eindeutige Lösung der Klein-Gordon Gleichung

$$\phi(t, \mathbf{x}) = - \int d\mathbf{y} (\partial_t \Delta_m(t, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \phi_0(\mathbf{y}) + \Delta_m(t, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \pi_0(\mathbf{y})). \quad (3.73)$$

Offensichtlich ist  $\phi(0, \mathbf{x}) = \phi_0(\mathbf{x})$ . Die Pauli-Jordan-Funktion wechselt das Vorzeichen bei Zeitumkehr, so dass auch ihre zweite Zeitableitung bei  $t = 0$  verschwindet. Daraus folgt sofort  $\partial_t \phi(t, \mathbf{x})|_{t=0} = \pi_0(\mathbf{x})$ , womit bewiesen wäre, dass  $\phi$  die geforderten Anfangsbedingung erfüllt. Das Faltungsintegral (3.73) definiert auch eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung, da nach Voraussetzung  $D$  eine Lösung ist.

Zur Konstruktion der Pauli-Jordan-Funktion erinnern wir an die Identität

$$\int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{x}), \quad (3.74)$$

woraus folgende Fourierdarstellung für die gesuchte Lösung resultiert,

$$\Delta_m(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{k}}{\omega_{\mathbf{k}}} \sin(\omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}), \quad \omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}. \quad (3.75)$$

Die Dispersionsrelation zwischen Kreisfrequenz und Wellenzahlvektor garantiert, dass  $\Delta_m$  die Klein-Gordon-Gleichung löst. Offensichtlich ist  $\Delta_m(-t, \mathbf{x}) = -\Delta_m(t, \mathbf{x})$ , so dass die Pauli-Jordan-Funktion und ihre zweite Zeitableitung bei  $t = 0$  verschwinden. Weithin ist

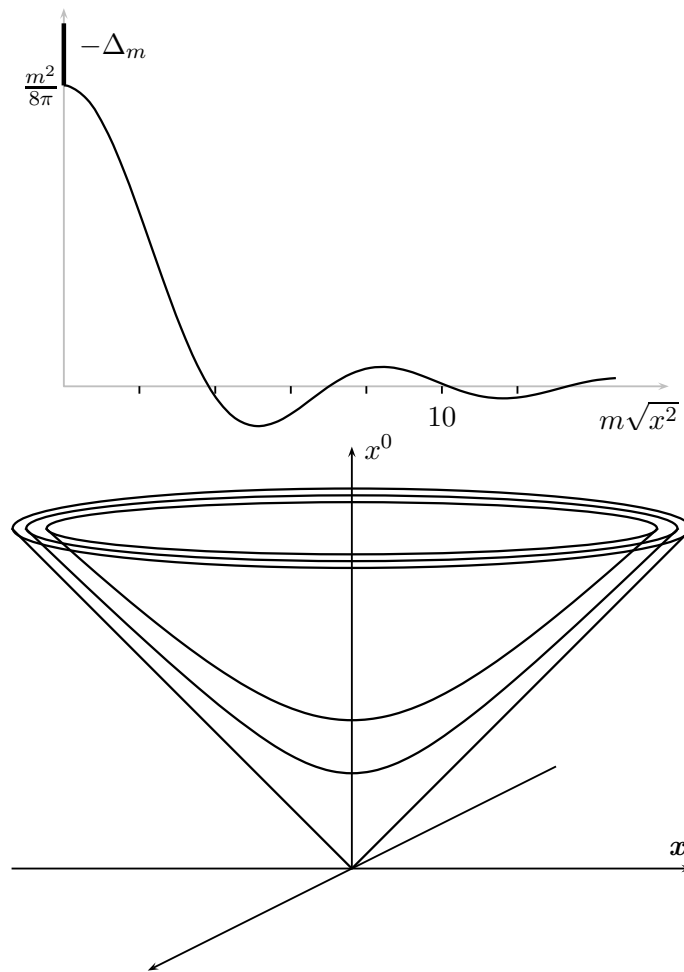
$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta_m(t, \mathbf{x})|_{t=0} = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) = -\delta^3(\mathbf{x}),$$

womit die Anfangsbedingungen (3.72) für die Lösung  $\Delta_m$  bewiesen sind.

Die Fouriertransformation in (3.75) kann ausgeführt werden und führt auf folgende Formel für die Pauli-Jordan-Funktion,

$$\Delta_m(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \epsilon(t) \delta(x^2) + \frac{m}{4\pi\sqrt{x^2}} \theta(x^2) \epsilon(t) J_1(m\sqrt{x^2}), \quad (3.76)$$

worin die Vorzeichenfunktion  $\epsilon$ , die Stufenfunktion  $\theta$  und die erste Besselfunktion  $J_1$  auftreten. Die Lösung ist gerade unter Raumspiegelung, ungerade unter Zeitumkehr und deshalb ungerade unter der Raumzeit-Spiegelung. Die Stufenfunktion  $\theta$  verschwindet für negative Argumente  $x^2$ , und als Konsequenz verschwindet die Pauli-Jordan-Funktion außerhalb des Lichtkegels. Ein Anfangswert  $\phi_0(\mathbf{y}), \pi_0(\mathbf{y})$  in (3.73) kann die Feldamplitude zur Zeit  $t$  am Ort  $\mathbf{x}$  also nur beeinflussen, wenn die Ereignisse  $(0, \mathbf{y})$  und  $(t, \mathbf{x})$  kausal verbunden sind.



Nun sind wir in der Lage die Poissonklammern des freien Feldes zu verschiedenen Zeiten zu berechnen,

$$\{\phi(t, \mathbf{x}), \phi(0, \mathbf{y})\} = - \int d\mathbf{z} \Delta_m(t, \mathbf{x} - \mathbf{z}) \{\pi(0, \mathbf{z}), \phi(0, \mathbf{y})\} = \Delta_m(t, \mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (3.77)$$

oder noch etwas allgemeiner

$$\{\phi(x), \phi(y)\} = \Delta_m(x - y). \quad (3.78)$$

Die quantentheoretische Version dieses Resultats spielt eine wichtige Rolle für das quantisierte Klein-Gordon Feld.

## 3.6 Aufgaben

### Aufgabe 1: Funktionalableitung



Funktionale Differentiation  $\delta/\delta\phi(x)$  kann definiert werden durch die Bedingung, dass die gewöhnlichen algebraischen Regeln für Ableitungen gelten,

$$\frac{\delta}{\delta\phi(x)}(F_1[\phi] + F_2[\phi]) = \frac{\delta}{\delta\phi(x)}F_1[\phi] + \frac{\delta}{\delta\phi(x)}F_2[\phi], \quad (\text{Linearität}) \quad (3.79)$$

$$\frac{\delta}{\delta\phi(x)}(F_1[\phi]F_2[\phi]) = F_1[\phi]\frac{\delta}{\delta\phi(x)}F_2[\phi] + F_2[\phi]\frac{\delta}{\delta\phi(x)}F_1[\phi], \quad (\text{Leibniz Regel}) \quad (3.80)$$

wobei  $F_i[\phi]$  Funktionale von  $\phi$  sind, und dass zusätzlich gilt:

$$\frac{\delta}{\delta\phi(y)}\phi(x) = \delta^{(D)}(x - y). \quad (3.81)$$

Verifizieren Sie, dass

$$\frac{\delta}{\delta\phi(y)} \int_x \phi(x)J(x) = J(y),$$

$$\frac{\delta}{\delta\phi(y)} \exp\left(\int_x \phi(x)J(x)\right) = J(y) \exp\left(\int_x \phi(x)J(x)\right) \quad (3.82)$$

$$\frac{\delta}{\delta\phi(y)} \int_x \partial_\mu\phi(x) v^\mu(x) = -\partial_\mu v^\mu(y), \quad (3.83)$$

wobei  $\int_x \equiv \int d^D x$ .

### Aufgabe 2: Variationsprinzip

Beweise, dass die Lagrangedichten in (3.11) und (3.15) wie Skalarfelder unter Lorentztransformationen ändern und deshalb die zugehörigen Feldgleichungen kovariant sein müssen.

### Aufgabe 3: Komplexes Skalarfeld

Es  $\phi$  ein komplexes Skalarfeld, welches die Klein-Gordon-Gleichung erfüllt. Die zugehörige Wirkung ist

$$S = \int d^4x (\partial_\mu\phi^* \partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi).$$

Finde die zu  $\phi$  und  $\phi^*$  kanonisch konjugierten Impulsfelder. Berechne die Heisenberg-Gleichungen und zeige, dass diese äquivalent zu der Klein-Gordon Gleichung sind.

### Aufgabe 4: Infinitesimale Lorentztransformationen II

Die zu den Lorentztransformationen gehörenden 6 Noetherströme sind

$$J^{\rho\mu\nu} = \frac{1}{2} (x^\mu T^{\rho\nu} - x^\nu T^{\rho\mu})$$

und führen auf 6 erhaltenen Noether-Ladungen  $Q_{\mu\nu} = \int d^3x M_{0\mu\nu} = -Q_{\nu\mu}$ . Zeigen Sie, dass für ein reelles Skalarfeld

1. Diese Ladungen im Hamiltonschen Formalismus folgende Form haben:

$$Q_{ij} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \pi(x) (x_i \partial_j - x_j \partial_i) \phi(x)$$

$$Q_{i0} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} (x_i \mathcal{H}(x) - \pi(x) x_0 \partial_i \phi(x)),$$

wobei  $\mathcal{H}$  die Hamiltondichte des Skalarfeldes bezeichnet.

2. Die Poisson-Klammern der  $Q_{\mu\nu}$  mit dem Feld lauten

$$[Q_{\mu\nu}, \phi(x)] = \frac{1}{2} L_{\mu\nu} \phi(x), \quad L_{\mu\nu} = \frac{1}{i} (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu), \quad \partial_0 \phi = \pi.$$

Interpretieren Sie das Resultat!!

### Aufgabe 5: Ein integrables System

Es sei  $u(x)$  eine reelle Funktion der Variablen  $x \in \mathbb{R}$  und  $u_x$  die erste,  $u_{xx}$  die zweite usw. Ableitung von  $u$  nach  $x$ . Beweise, dass die Variationsableitung eines Funktionals  $F$  mit lokaler Dichte,  $F[u] = \int dx f(u, u_x, u_{xx}, \dots)$ , folgende Form hat:

$$\frac{\delta F}{\delta u(x)} = \frac{\partial f}{\partial u(x)} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial u_x(x)} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial f}{\partial u_{xx}(x)} - \dots$$

Definiere nun folgende Klammern zwischen zwei Funktionalen,

$$\{F, G\} = \int dx \frac{\delta F}{\delta u(x)} \frac{d}{dx} \frac{\delta G}{\delta u(x)}.$$

Beweise, dass dies Poisson-Klammern sind. Die Hamiltonfunktion sei

$$H = \int dx \left( u^3 + \frac{1}{2} u_x^2 \right).$$

Bestimme die Hamiltonschen Bewegungsgleichung für  $u(t, x)$ . Recherchieren Sie ob dies eine bekannte Gleichung der Physik ist.

## 4 Kanonische Quantisierung des Freien Skalarfeldes

Die kanonische Quantisierung wurde für nicht-relativistische Systeme mit einer endlichen Anzahl von Freiheitsgraden entwickelt. Es keinesfalls selbstverständlich, dass die Quantisierungsregeln für derartige Systeme auf relativistische Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden übertragbar sind. Es zeigt sich, dass dies möglich ist und Anlass zu konsistenten relativistischen Quantenfeldtheorien gibt, welche viele experimentelle Befunde in unterschiedlichen Teilgebieten der Physik hervorragend beschreiben. In diesem Kapitel betrachten wir zuerst ein reelles Skalarfeld, welches die klassische Klein-Gordon-Gleichung erfüllt,

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0, \quad \square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu, \quad (4.1)$$

und quantisieren dieses Feld auf kanonische Art. Der Parameter  $m$  ist die inverse Compton-Wellenlänge des durch  $\phi$  beschriebenen ungeladenen und spinlosen Teilchens. Die Quantisierung des Skalarfeldes ist einfacher als diejenige des elektromagnetischen Feldes da es keine verschiedenen Polarisierungen gibt. Wir werden das Feld als Linearkombination seiner Normalmoden schreiben und erhalten dann eine unendliche Menge von ungekoppelten harmonischen Oszillatoren, die wir nach den Regeln der Quantenmechanik behandeln.

### 4.1 Kanonische Quantisierung

In der kanonischen Quantisierung wird das Feld und das kanonisch konjugierte Impulsfeld zu operatorwertigen Feldern – man sagt auch Quantenfelder – im Hilbert-Raum der Quantenfeldtheorie,

$$\phi(\mathbf{x}) \longrightarrow \hat{\phi}(\mathbf{x}) \quad , \quad \pi(\mathbf{x}) \longrightarrow \hat{\pi}(\mathbf{x}). \quad (4.2)$$

Den Hut über Operatoren werden wir in späteren Abschnitten wieder weglassen um die Notation zu vereinfachen. Funktionen der Felder werden bei der Quantisierung zu Funktionen der Quantenfelder und die fundamentalen Poisson-Klammern (3.49) gehen gemäß der Vorschrift

$$\{F, g\} \mapsto \frac{1}{i\hbar} [\hat{F}, \hat{G}] \quad (4.3)$$

in Kommutatoren über. Insbesondere erhalten wir die fundamentalen Vertauschungsrelationen

$$[\hat{\phi}(\mathbf{x}), \hat{\pi}(\mathbf{y})] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mathbb{1} \quad , \quad [\hat{\phi}(\mathbf{x}), \hat{\phi}(\mathbf{y})] = [\hat{\pi}(\mathbf{x}), \hat{\pi}(\mathbf{y})] = 0. \quad (4.4)$$

Den Hamiltonoperator gewinnt man, wenn man in der klassischen Hamiltonfunktion (3.55) die Felder durch die entsprechenden Quantenfelder ersetzt. Die Zeitentwicklung der Feldoperatoren im Heisenberg-Bild folgt dann aus den Heisenberg-Gleichungen

$$i\dot{\hat{\phi}}(\mathbf{x}) = [\hat{\phi}(\mathbf{x}), \hat{H}] \quad \text{und} \quad i\dot{\hat{\pi}}(\mathbf{x}) = [\hat{\pi}(\mathbf{x}), \hat{H}]. \quad (4.5)$$

Bei den expliziten Rechnungen benutzt man, dass der Kommutator genauso wie die Poissonklammer antisymmetrisch und bilinear ist und die Leibniz-Regel (Derivationsregel) sowie Jacobi-Identität erfüllt.

Nun zerlegen wir das freie quantisierte Skalarfeld und seine kanonisch konjugierte Impulsdichte in Normalmoden, genauso wie wir dies für die klassischen Felder auf Seite 33 machten,

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}) = \int d\mu(\mathbf{p}) \hat{\phi}_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}), \quad \hat{\pi}(\mathbf{x}) = \int d\mu(\mathbf{p}) \hat{\pi}_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) \quad (4.6)$$

Die Koeffizienten  $\hat{\phi}_{\mathbf{p}}$  und  $\hat{\pi}_{\mathbf{p}}$  in der Entwicklung sind nun operatorwertig, Ihre Kommutationsregeln folgen aus denen für Feld und Impulsdichte (4.4) und der Vollständigkeitsrelation (3.62)

$$[\hat{\phi}_{\mathbf{p}}, \hat{\pi}_{\mathbf{q}}] = i(2\omega_{\mathbf{p}})^2 \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q}). \quad (4.7)$$

Ähnlich wie in der klassischen Feldtheorie, siehe (3.68), betrachten wir die Linearkombinationen

$$\hat{\phi}_{\mathbf{p}} = \hat{a}_{\mathbf{p}} + \hat{a}_{-\mathbf{p}}^{\dagger}, \quad \hat{\pi}_{\mathbf{p}} = -i\omega_{\mathbf{p}}(\hat{a}_{\mathbf{p}} - \hat{a}_{-\mathbf{p}}^{\dagger}), \quad (4.8)$$

und diese operatorwertigen Koeffizienten gehorchen den zu den Poissonklammern (3.69) gehörigen wichtigen Vertauschungsrelationen

$$[\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{q}}] = [\hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger}, \hat{a}_{\mathbf{q}}^{\dagger}] = 0 \quad \text{und} \quad [\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{q}}^{\dagger}] = 2\omega_{\mathbf{p}} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}). \quad (4.9)$$

Diese erinnern uns an die Vertauschungsrelationen von Auf- und Absteigeoperator eines harmonischen Oszillators. In der Feldtheorie nennen wir sie *Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren* da sie, wie wir sehen werden, Feldquanten erzeugen und vernichten. Ersetzen wir die  $\hat{\phi}_{\mathbf{p}}, \hat{\pi}_{\mathbf{p}}$  in (4.6) gemäß (4.8) so schreiben sich die Quantenfelder als Linearkombinationen der Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren,

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}) = \int d\mu(\mathbf{p}) \left( \hat{a}_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) + \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger} u_{\mathbf{p}}^*(\mathbf{x}) \right) \quad (4.10)$$

$$\hat{\pi}(\mathbf{x}) = \frac{1}{i} \int d\mu(\mathbf{p}) \omega_{\mathbf{p}} \left( \hat{a}_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) - \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger} u_{\mathbf{p}}^*(\mathbf{x}) \right). \quad (4.11)$$

### 4.1.1 Energie und Impuls des Quantenfeldes

Um den Hamilton-Operator durch diese Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren auszudrücken, berechnen wir

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{x} \hat{\pi}(\mathbf{x})\hat{\pi}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \int d\mu(\mathbf{p}) \omega_{\mathbf{p}} \left( \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathbf{p}} + \hat{a}_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger} - \hat{a}_{\mathbf{p}}\hat{a}_{-\mathbf{p}} - \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger}\hat{a}_{-\mathbf{p}}^{\dagger} \right) \\ \int d\mathbf{x} \nabla\hat{\phi}(\mathbf{x})\nabla\hat{\phi}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \int d\mu(\mathbf{p}) \frac{\mathbf{p}^2}{\omega_{\mathbf{p}}} \left( \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathbf{p}} + \hat{a}_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger} + \hat{a}_{\mathbf{p}}\hat{a}_{-\mathbf{p}} + \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger}\hat{a}_{-\mathbf{p}}^{\dagger} \right) \\ m^2 \int d\mathbf{x} \hat{\phi}(\mathbf{x})\hat{\phi}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \int d\mu(\mathbf{p}) \frac{m^2}{\omega_{\mathbf{p}}} \left( \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathbf{p}} + \hat{a}_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger} + \hat{a}_{\mathbf{p}}\hat{a}_{-\mathbf{p}} + \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger}\hat{a}_{-\mathbf{p}}^{\dagger} \right). \end{aligned}$$

Addieren wir die Terme und berücksichtigen die Beziehung zwischen Impuls  $\mathbf{p}$  und Kreisfrequenz  $\omega_{\mathbf{p}}$ , dann ergibt sich für die Energie des Quantenfeldes der Ausdruck

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d\mu(\mathbf{p}) \omega_{\mathbf{p}} \left( \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathbf{p}} + \hat{a}_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger} \right) = \int d\mu(\mathbf{p}) \omega_{\mathbf{p}} \left( \hat{N}_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} [\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger}] \right). \quad (4.12)$$

Der zweitletzte Term enthält den Operator

$$\hat{N}_{\mathbf{p}} = \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathbf{p}} \quad (4.13)$$

mit folgenden Vertauschungsregeln mit den Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren

$$[\hat{N}_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}] = -2\omega_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}}\delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad , \quad [\hat{N}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{q}}^{\dagger}] = +2\omega_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger}\delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}). \quad (4.14)$$

Im letzten Term in (4.12) erkennen wir die vom harmonischen Oszillator bekannte und in der Quantenfeldtheorie divergente Nullpunktsenergie des Skalarfeldes

$$E_0 = \frac{1}{2} \int d\mu(\mathbf{p}) \omega_{\mathbf{p}} [\hat{a}_{\mathbf{p}}, \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger}] = \frac{1}{2} \int d^3p \omega_{\mathbf{p}} \delta(\mathbf{0}) \mathbb{1}. \quad (4.15)$$

Der divergente Anteil  $\delta(\mathbf{0})$  kommt davon, dass wir das skalare Feld im gesamten Raum  $\mathbb{R}^3$  quantisierten. Bei einer Quantisierung in einem Raum mit endlichen Volumen ist dieser Faktor endlich – er ist proportional zum Volumen des Raums. Man spricht von einer infrarot-Divergenz (IR-Divergenz) da sie von Moden mit beliebig großen Wellenlängen verursacht wird. Der Faktor

$$\int d^3p \omega_{\mathbf{p}} = \frac{4\pi}{2} \int_0^{\infty} dp \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + m^2}} \quad (4.16)$$

ist ebenfalls divergent. Diesmal rührt die Divergenz von den Moden mit sehr hohen Impulsen oder sehr kleinen Wellenlängen. Man spricht hier von einer Ultraviolett-Divergenz (UV-Divergenz).

Im Minkowski-Raum ignorieren wir die IR- und UV-divergente additive Konstante zur Energie in (4.15) und ersetzen  $\hat{H}$  durch den normal-geordneten Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d\mu(\mathbf{p}) \omega_{\mathbf{p}} N_{\mathbf{p}}, \quad \hat{N}_{\mathbf{p}} = \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger}\hat{a}_{\mathbf{p}}. \quad (4.17)$$

da bei Vernachlässigung der gravitativen Wechselwirkung keine absoluten Energien sondern nur Energiedifferenzen messbar sind. Die divergente Nullpunktsenergie trägt auch nicht bei zu den Kommutatoren von Energie und Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren,

$$[\hat{H}, \hat{a}_p] = \int d\mu(\mathbf{q}) \omega_{\mathbf{q}} [\hat{N}_{\mathbf{q}}, \hat{a}_p] = -\omega_p \hat{a}_p \quad \text{und} \quad [\hat{H}, \hat{a}_p^\dagger] = \omega_p \hat{a}_p^\dagger. \quad (4.18)$$

Diese bedeuten, dass  $\hat{a}_p$  die Feldenergie um  $\omega_p$  verringert und  $\hat{a}_p^\dagger$  diese um  $\omega_p$  erhöht.

Aus der Form des klassischen Energie-Impuls Tensors für das Skalarfeld ,

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (4.19)$$

lesen wir die Impulsdichte  $-\pi \nabla \phi$  ab, deren Integral über den Raum den erhaltenen Feldimpuls ergibt. Wir ersetzen die klassischen Felder wieder durch die entsprechenden Feldoperatoren und benutzen die Entwicklungen (4.10) und (4.11). Dies führt auf

$$\hat{\mathbf{P}} = - \int d\mathbf{x} \hat{\pi}(\mathbf{x}) \nabla \hat{\phi}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int d\mu(\mathbf{p}) \mathbf{p} \left( \hat{a}_p \hat{a}_{-\mathbf{p}} + \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{p}}^\dagger + \hat{a}_p \hat{a}_p^\dagger + \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p \right).$$

Die Terme  $\hat{a}_p \hat{a}_{-\mathbf{p}}$  und  $\hat{a}_p^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{p}}^\dagger$  sind symmetrisch im Impuls und tragen zum Integral nicht bei. Deshalb finden wir den Feldimpuls

$$\hat{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} \int d\mu(\mathbf{p}) \mathbf{p} \left( \hat{a}_p \hat{a}_p^\dagger + \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p \right) = \int d\mu(\mathbf{p}) \mathbf{p} \hat{N}_p. \quad (4.20)$$

Im Gegensatz zur Energie tritt kein divergender Beitrag auf. Die Kommutationsregeln

$$[\hat{\mathbf{P}}, \hat{a}_p] = -\mathbf{p} \hat{a}_p \quad \text{und} \quad [\hat{\mathbf{P}}, \hat{a}_p^\dagger] = \mathbf{p} \hat{a}_p^\dagger \quad (4.21)$$

bedeuten, dass  $\hat{a}_p$  den Impuls eines Zustands um  $\mathbf{p}$  erniedrigt und  $\hat{a}_p^\dagger$  diesen um  $\mathbf{p}$  erhöht.

Energie und Impuls (und damit Masse) sind gerade diejenigen Quantenzahlen, die ein freies, ungeladenes und spinloses Elementarteilchen charakterisieren und seinen Zustand eindeutig festlegen. Deshalb interpretieren wir die Operatoren  $\hat{a}_p$  oder  $\hat{a}_p^\dagger$  als Operatoren die ein Teilchen mit Energie  $\omega_p$  und Impuls  $\mathbf{p}$  vernichten oder erzeugen. Der hermitesche Operator

$$\hat{N} = \int d\mu(\mathbf{p}) \hat{N}_p \quad \text{mit} \quad [\hat{N}, \hat{a}_p] = -\hat{a}_p, \quad [\hat{N}, \hat{a}_p^\dagger] = \hat{a}_p^\dagger \quad (4.22)$$

mit  $\hat{N}_p$  aus (4.13) hat dann die Interpretation eines Teilchenzahloperators: er zählt die Gesamtzahl Teilchen in einem Zustand und nach (4.22) verringert  $\hat{a}_p$  die Teilchenzahl um Eins und  $\hat{a}_p^\dagger$  erhöht sie um Eins.

## 4.1.2 Hilbertraum für freie skalare Teilchen

Jedes Paar  $\hat{a}_p$  und  $\hat{a}_p^\dagger$  entspricht dem Absteige- und Aufsteigeoperator eines harmonischen Oszillators der Frequenz  $\omega_p$ . Das freie Skalarfeld kann als eine unendliche Zahl von nicht-wechselwirkenden Oszillatoren – für jeden Impuls  $\mathbf{p}$  ein Oszillator – aufgefasst werden.

Ohne Wechselwirkung weil der Hamiltonoperator (4.17) die Summe von wechselwirkenden Operatoren  $\hat{N}_p$  ist. Also dürfen wir die bei der Quantisierung des harmonischen Oszillators gewonnenen Ergebnisse benutzen. Speziell konstruieren wir den Zustandsraum des freien quantisierten Skalarfeldes ähnlich wie man den Hilbertraum des harmonischen Oszillators mithilfe von des Aufsteigeoperators aus einem Zustand tiefster Energie gewinnt.

### Auf- und Absteigeoperator des Oszillators

Wir erinnern hier kurz an die algebraische Lösung des harmonischen Oszillators mit Hilfe des hermiteschen *Anzahloperators*  $N = a^\dagger a$ . Der Hamiltonoperator ist bis auf eine additive Konstante proportional zu  $\hat{N}$ , der Absteigeoperator  $a$  erniedrigt die Eigenwerte von  $\hat{N}$  um Eins und der Aufsteigeoperator  $\hat{a}^\dagger$  erhöht diese um Eins,

$$\hat{H} = \omega \hat{N} + \frac{\omega}{2}, \quad [\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a} \quad \text{und} \quad [\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger. \quad (4.23)$$

Ist  $|n\rangle$  ein normierter Eigenzustand von  $\hat{N} \geq 0$  zum Eigenwert  $n \geq 0$ , so gelten

- $n = 0 \iff \hat{a}|n\rangle = 0$ ,
- $\hat{a}^\dagger|n\rangle$  ist ebenfalls Eigenzustand von  $\hat{N}$  zum Eigenwert  $n + 1$ ,
- für  $n > 0$  ist  $\hat{a}|n\rangle$  ebenfalls Eigenzustand von  $\hat{N}$  zum Eigenwert  $n - 1$ .

Es folgt, dass das Spektrum von  $\hat{N}$  aus den natürlichen Zahlen inklusive 0 besteht. In einer irreduziblen Darstellung der Operatoren  $\hat{a}$  und  $\hat{a}^\dagger$  ist jeder Eigenwert einfach. Es gelten die Beziehungen (siehe die Vorlesung über Quantenmechanik)

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle, \quad \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (4.24)$$

Insbesondere vernichtet  $\hat{a}$  den Zustand  $|0\rangle$ . Durch Iteration erhält man die Beziehung

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle. \quad (4.25)$$

Für den späteren Gebrauch notieren wir die nicht-verschwindenden Matrixelemente

$$\langle n-1 | \hat{a} | n \rangle = \sqrt{n}, \quad \langle n+1 | \hat{a}^\dagger | n \rangle = \sqrt{n+1}. \quad (4.26)$$

### Vakuum und Fockraum

Wir konstruieren nun den Zustandsraum für das freie, spinlose und ungeladene Quantenfeld. Wir nehmen an, es existiere ein Vakuumzustand  $|0\rangle$  mit minimaler endlicher Energie. Da die Vernichtungsoperatoren die Energie erniedrigen, muss der Vakuumzustand von allen Vernichtungsoperatoren annihilert werden,

$$\hat{a}_p |0\rangle = 0 \quad \text{für alle } p. \quad (4.27)$$

Daraus folgt unmittelbar, dass  $|0\rangle$  weder Teilchen, Energie noch Impuls enthält,

$$\hat{N}_{\mathbf{p}}|0\rangle = 0 \implies \hat{H}|0\rangle = 0 \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{P}}|0\rangle = 0, \quad (4.28)$$

was bedeutet, wir später noch näher erläutern werden, dass  $|0\rangle$  ein translationsinvarianter Zustand ist. *Einteilchenzustände* erhalten wir durch Anwendung der Aufsteigeoperatoren  $\hat{a}_p^\dagger$  auf den Vakuumzustand,  $|\mathbf{p}\rangle = \hat{a}_p^\dagger|0\rangle$ . Diese sind folgendermaßen normiert

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{q} \rangle = \langle 0 | \hat{a}_p \hat{a}_q^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | [\hat{a}_p, \hat{a}_q^\dagger] | 0 \rangle \stackrel{(4.9)}{=} 2\omega_{\mathbf{p}} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}). \quad (4.29)$$

Bekanntermaßen sind räumliche Volumen nicht lorentzinvariant: Ein Kasten mit dem Volumen  $V$  im Ruhesystem hat für einen bewegten Beobachter das kontrahierte Volumen  $V/\gamma$ . Deshalb ist die einfache Normierung  $\langle \mathbf{p} | \mathbf{q} \rangle = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q})$  nicht lorentz-invariant. Wir bevorzugen die invariante Normierung (4.29), die mit unserer Wahl der Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren einhergeht [5]. Andere Autoren definieren  $\hat{a}$  und  $\hat{a}^\dagger$  derart, dass im letzten Kommutator in (4.9) nur eine Delta-Distribution steht. Mit dieser Wahl sollte man dann die Einteilchenzustände gemäß  $\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}\hat{a}_p^\dagger|0\rangle$  definieren, um zu einer Lorentz invarianten Normierung zu gelangen [11].

Vernachlässigen wir die Nullpunktsenergie, beschreibt der normierte *Fock-Zustand*

$$|\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \hat{a}_{\mathbf{p}_1}^\dagger \cdots \hat{a}_{\mathbf{p}_n}^\dagger |0\rangle \quad (4.30)$$

$n$  Teilchen mit Gesamtenergie und Gesamtimpuls

$$E = \sum_i E_{\mathbf{p}_i}, \quad \mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i \quad (4.31)$$

Man erinnere sich daran, dass in natürlichen Einheiten  $E_{\mathbf{p}} = \omega_{\mathbf{p}}$ . Wir schreiben  $E_{\mathbf{p}}$  wenn der Teilchencharakter betont werden soll.

Mithilfe der Vertauschungsregeln für Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren kann man die Skalarprodukte der nicht-normierbaren Eigenzustände von Energie und Impuls in (4.30) bestimmen

$$\langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n | \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \rangle = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} \prod_{i=1}^n 2\omega_{\mathbf{p}_i} \delta(\mathbf{p}_i - \mathbf{q}_{\pi(i)}) \quad (4.32)$$

worin über alle  $n!$  Permutationen  $\pi$  der Indexmenge  $\{1, 2, \dots, n\}$  summiert wird.

## 4.2 Zeitentwicklung

Die Kommutatoren (4.18) bestimmen über die Heisenberg Gleichungen auch die Zeitentwicklung des Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren,

$$\hat{a}_p(t) = e^{-i\omega_{\mathbf{p}}t} \hat{a}_p \quad \text{und} \quad \hat{a}_p^\dagger(t) = e^{i\omega_{\mathbf{p}}t} \hat{a}_p^\dagger, \quad (4.33)$$



wobei  $\hat{a}_p$  den Heisenberg Operator zur Anfangszeit bezeichnet. Eingesetzt in (4.10) finden wir für den Feldoperator im Heisenberg Bild die folgende Zeitabhängigkeit,

$$\hat{\phi}(x) = \hat{\phi}(t, \mathbf{x}) = \int d\mu(\mathbf{p}) \left( \hat{a}_p u_p(x) + \hat{a}_p^\dagger u_p^*(x) \right), \quad (4.34)$$

wobei wir die ebenen-Wellen Lösungen der Klein-Gordon Gleichung einführen,

$$u_p(x) = e^{-i\omega_p t} u_p(\mathbf{x}) = \kappa e^{-i\omega_p t + i\mathbf{p}\mathbf{x}} = \kappa e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} \Big|_{p_0=\omega_p}, \quad \kappa = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}. \quad (4.35)$$

Der Feldoperator zur Zeit  $t$  wirkt auf die Eigenzustände von Energie und Impuls in (4.30) wie folgt

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(x) |\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n u_{p_i}(x) |\mathbf{p}_1, \dots, \check{\mathbf{p}}_i, \dots, \mathbf{p}_n\rangle \\ &+ \sqrt{n+1} \int d\mu(\mathbf{p}) u_p^*(x) |\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Der Haken über  $\mathbf{p}_i$  bedeutet, dass das Argument  $\mathbf{p}_i$  weggelassen werden soll. Beim Beweis benutzt man die Vertauschungsregeln für  $\hat{a}_p$  und  $\hat{a}_q^\dagger$ .

Mithilfe der Kommutationsregeln zwischen  $(\hat{H}, \hat{\mathbf{P}})$  und den Erzeugungs- beziehungsweise Vernichtungsoperatoren können wir nun leicht die Kommutatoren von Energie und Impuls mit dem Quantenfeld berechnen,

$$\begin{aligned} i[\hat{H}, \hat{\phi}(x)] &= \int d\mu(\mathbf{p}) \left( -i\omega_p u_p(x) \hat{a}_p + i\omega_p u_p^*(x) \hat{a}_p^\dagger \right) = \frac{\partial}{\partial t} \hat{\phi}(x) \\ i[\hat{\mathbf{P}}, \hat{\phi}(x)] &= \int d\mu(\mathbf{p}) \left( -i\mathbf{p} u_p(x) \hat{a}_p + i\mathbf{p} u_p^*(x) \hat{a}_p^\dagger \right) = -\frac{\partial}{\partial x^i} \hat{\phi}(x). \end{aligned}$$

Die erste Gleichung ist gerade die Heisenberg Gleichung für das Feld. Führen wir den 4-er Impulsoperator  $\hat{P}^\mu = (\hat{H}, \hat{\mathbf{P}})$  ein, dann können obige Vertauschungsregeln wie folgt zusammengefasst werden,

$$i[\hat{P}_\mu, \hat{\phi}(x)] = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \hat{\phi}(x). \quad (4.37)$$

Auf der linken Seite stehen gerade die infinitesimalen Raumzeittranslationen. Interiert man diese Beziehung, so findet man die Translationen in Raum und Zeit,

$$\hat{U}(a) \hat{\phi}(x) \hat{U}^{-1}(a) = \hat{\phi}(x + a), \quad \hat{U}(a) = e^{ia\hat{P}}, \quad a\hat{P} = a^\mu \hat{P}_\mu. \quad (4.38)$$

Zum (formalen) Beweis entwickelt man beide Seiten der Gleichung in Potenzen von  $a$ . Auf der rechten Seite erhält man die Taylorentwicklung von  $\hat{\phi}$  um  $x$ , welche Potenzen der Richtungsableitung  $a^\mu \partial_\mu$  am Raumzeitort  $x$  enthält. Auf der linken Seite findet man dagegen mehrfache Kommutatoren der Gestalt  $[a\hat{P}, [a\hat{P}], \dots \hat{\phi}] \dots$  die mithilfe von (4.37) auf dieselben Potenzen der Richtungsableitung führen. Die Komponenten des 4-er Impulses kommutieren

$$[\hat{P}_\mu, \hat{P}_\nu] = 0 \quad (4.39)$$

und sind hermitesche Operatoren. Deshalb sind die Translations- oder Verschiebungsoperatoren  $\hat{U}(a)$  unitär und bilden eine 4-parametrische unitäre Abelsche Gruppe. Sie implementieren die Raumzeit-Translationen im Hilbert-Raum der Quantenzustände und bilden eine unitäre Darstellung der Translationen,

$$\hat{U}(a)\hat{U}(b) = \hat{U}(a+b) \implies \hat{U}^{-1}(a) = \hat{U}(-a). \quad (4.40)$$

Da Energie und Impuls den Vakuumzustand annihilieren gilt

$$\hat{U}(a)|0\rangle = |0\rangle. \quad (4.41)$$

Der Vakuumzustand ist invariant unter Translationen in Zeit und Raum.

### 4.3 Zweipunkt Wightman-Funktion und Kausalität

Die Amplitude für die Propagation eines Teilchens vom Raumzeitpunkt  $y$  zum Raumzeitpunkt  $x$  wird durch die nach Arthur Wightman benannte Zweipunkt-Funktion

$$\mathcal{W}(x, y) = \langle 0 | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) | 0 \rangle = W(x - y) \quad (4.42)$$

beschrieben. Im letzten Schritt benutzen wir die Invarianz des Vakuumzustands unter Translationen, so dass die Wightman-Funktion nur von  $x - y$  abhängt,

$$\langle 0 | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) | 0 \rangle \stackrel{(4.38)}{=} \langle 0 | \hat{\phi}(0) \hat{U}(-x) \hat{U}(y) \hat{\phi}(0) | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{\phi}(0) \hat{U}(y - x) \hat{\phi}(0) | 0 \rangle.$$

Oft bezeichnet man  $W(x)$  auch mit  $i\Delta_+(x)$ . Neben der Zweipunkt-Funktion benötigen wir später noch weitere Erwartungswerte von Produkten des Quantenfelds. Für das freie Feld können diese alle aus  $W(x)$  berechnet werden.

Das Feld  $\hat{\phi}$  ist eine Superposition von Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren, siehe (4.34), aber zum Vakuum-Erwartungswert von  $\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)$  trägt nur der Term  $\langle 0 | \hat{a}_p \hat{a}_q^\dagger | 0 \rangle$  bei. Damit folgt sofort die Darstellung

$$W(x - y) = \langle 0 | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mu(\mathbf{p}) e^{-ip(x-y)} \Big|_{p^0=\omega_{\mathbf{p}}}. \quad (4.43)$$

In den Übungen haben Sie folgende Identität bewiesen,

$$\frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}} = \int dp^0 \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0). \quad (4.44)$$

Damit lässt sich die Zweipunkt-Funktion wie folgt schreiben,

$$W(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4p \theta(p^0) \delta(p^2 - m^2) e^{-ipx}. \quad (4.45)$$

Hierbei wird über alle 4 Komponenten des relativistischen Impulses integriert. Die letzte Darstellung macht deutlich, dass  $W(x)$  eine Lorentz invariante Distribution ist, da  $p^2$ ,  $d^4p$  und  $px$  Lorentz invariant sind und die Bedingung  $p_0 \geq 0$  eine Lorentz invariante Forderung ist (solange wir die Zeitumkehr ausschließen).

Im Anhang wird das Integral (4.43) bestimmt, wobei man für zeit- und raumartige  $x$  verschiedene Resultate erhält. Es ergibt sich folgende explizite Darstellung für die Wightman-Distribution,

$$\begin{aligned}
 W(x) &= \frac{1}{4\pi i} \epsilon(x^0) \delta(x^2) \\
 &+ \frac{m^2}{8\pi} \theta(x^2) \frac{N_1(m\sqrt{x^2}) + i\epsilon(x^0) J_1(m\sqrt{x^2})}{m\sqrt{x^2}} \\
 &+ \frac{m^2}{4\pi^2} \theta(-x^2) \frac{K_1(m\sqrt{-x^2})}{m\sqrt{-x^2}},
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

wobei die Hankel- und modifizierte Besselfunktion erster Ordnung auftreten. Ist der invariante Abstand vom Lichtkegel viel kleiner als die inverse Wellenlänge  $1/m$ , dann darf man die Entwicklung dieser Funktionen für kleine Argumente benutzen. Diese findet man im Anhang auf Seite 60. Die Funktionen  $N_1$  und  $K_1$  sind singulär am Ursprung. Für große Argumente verhalten sich  $J_1$  und  $N_1$  wie gedämpfte Wellen und  $K_1(x)$  verschwindet exponentiell schnell wie  $\exp(-x)$ . Für asymptotische Zeiten und im räumlich Unendlichen

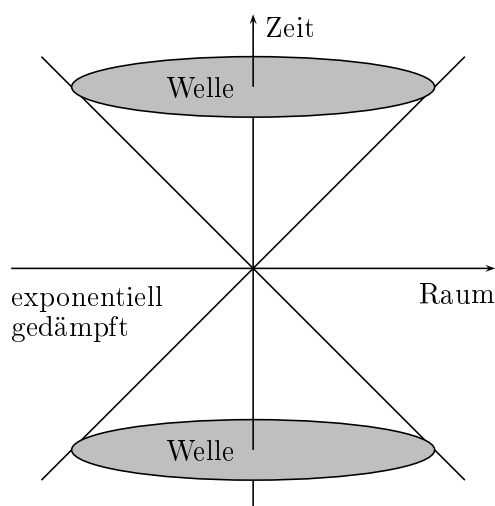


Abbildung 4.1: Zum Träger der Wightmanfunktion.

findet man folgende Formeln für die Wightmanfunktion,

$$\begin{aligned} W(t, \mathbf{x} = 0) &= \frac{m}{8\pi|t|} (N_1(m|t|) + i\epsilon(t)J_1(m|t|)) \xrightarrow{m|t| \gg 1} c \frac{e^{-im|t|}}{(m|t|)^{3/2}} \\ W(t = 0, \mathbf{x}) &= \frac{m}{4\pi^2 r} K_1(mr) \xrightarrow{mr \gg 1} c \frac{e^{-mr}}{(mr)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Im räumlich Unendlichen verschwindet die Zweipunktsfunktion für Abstände größer als die Compton-Wellenlänge exponentiell schnell. Für Zeiten groß verglichen mit der Compton-Zeit finden wir eine harmonische Schwingung mit der Compton-Frequenz. Außerhalb der Lichtkegels verschwindet die Amplitude nicht, ist aber exponentiell klein.

### 4.3.1 Pauli-Jordan Funktion

Bei einer Diskussion der Kausalität sollten wir nicht fragen, ob Korrelationen über raumartige Intervalle möglich sind, sondern ob sich Messungen an raumartig getrennten Punkten  $x$  und  $y$  gegenseitig beeinflussen können. Um diese Frage zu beantworten, müssen wir den Kommutator

$$i\Delta_m(x - y)\mathbb{1} = [\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] \quad (4.48)$$

untersuchen. Wir haben berücksichtigt, dass für das freie Feld (4.34) der Kommutator proportional zum Einheitsoperator ist. Mit Hilfe der Relation

$$i\Delta_m(x - y) = \langle 0 | [\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] | 0 \rangle = W(x - y) - W(y - x) \quad (4.49)$$

findet man für die reelle und singuläre Lösung der Klein-Gordon Gleichung  $\Delta_m$  den Ausdruck (3.76) – es handelt sich also um die bekannte *Pauli-Jordan-Funktion*. Diese verschwindet außerhalb des Lichtkegels, so dass alle Kommutatoren von Feldoperatoren, deren Argumente raumartig getrennt sind, verschwinden. Kausal getrennte Messungen stören sich gegenseitig nie.

Die Eigenschaft, dass der Kommutator von Feldern an verschiedenen Raumzeitpunkten proportional zum Einheitsoperator (eine  $c$ -Zahl) ist, ist eine Spezialität von freien Feldtheorien mit linearen Feldgleichungen. Dagegen gilt die wichtige Kausalitätsbedingung, gemäß der Felder an raumartig getrennten Punkten kommutieren, auch für wechselwirkende Felder.

Wir zerlegen das Quantenfeld in seine positiven und negativen Frequenzanteile,

$$\hat{\phi}(x) = \hat{\phi}^+(x) + \hat{\phi}^-(x), \quad (4.50)$$

wobei der erste Term nur Vernichtungs- und zweite Term nur Erzeugungsoperatoren enthält,

$$\hat{\phi}^+(x) = \int d\mu(\mathbf{p}) u_p(x) \hat{a}_p, \quad \hat{\phi}^-(x) = \int d\mu(\mathbf{p}) u_p^*(x) \hat{a}_p^\dagger. \quad (4.51)$$

Diese erfüllen die einfachen Kommutationsregeln

$$[\hat{\phi}^\pm(x), \hat{\phi}^\pm(y)] = 0 \quad \text{und} \quad [\hat{\phi}^+(x), \hat{\phi}^-(y)] = W(x - y)\mathbb{1}. \quad (4.52)$$

Beim Beweis der letzten Gleichung benutzt man  $\hat{\phi}^+(x)|0\rangle = 0$  und  $\langle 0|\hat{\phi}^-(y) = 0$  sowie die Tatsache, dass der Kommutator im letzten Term in

$$W(x-y) = \langle 0|\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)|0\rangle = \langle 0|\hat{\phi}^+(x)\hat{\phi}^-(y)|0\rangle = \langle 0|[\hat{\phi}^+(x), \hat{\phi}^-(y)]|0\rangle$$

ein Vielfaches des Einheitsoperators ist. Die Zweipunkt Wightman-Funktion definiert man mithilfe des ausgeschmierten Feldoperators

$$\hat{\phi}(f) = \int d^4x f(x)\hat{\phi}(x) \quad (4.53)$$

ein positives inneres Produkt,

$$\begin{aligned} \langle 0|\hat{\phi}(f)\hat{\phi}(g)|0\rangle &= \int d^4x d^4y f(x)\mathcal{W}(x,y)g(y) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4p d^4x d^4y f(x)e^{-ipx}\theta(p^0)\delta(p^2 - m^2)e^{ipy}g(y) \\ &= 2\pi \int d^4p \theta(p^0)\delta(p^2 - m^2)\tilde{f}^*(p)\tilde{g}(p) \\ &= 2\pi \int d\mu(\mathbf{p}) \tilde{f}^*(\omega_{\mathbf{p}}, \mathbf{p})\tilde{g}(\omega_{\mathbf{p}}, \mathbf{p}), \end{aligned}$$

wobei wir die Fourier-Transformation

$$\tilde{f}(p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4x e^{ipx} f(x)$$

benutzen. Man beachte, dass nur die Werte der Testfunktionen auf der Massenschale eingehen.

## 4.4 Propagatoren

Wir betrachten den Kommutator  $[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)]$  noch aus einem etwas anderem Blickwinkel. Sein Vakuum-Erwartungswert ist wegen (4.52) und (4.43) durch das folgende Integral über die Massenschale gegeben:

$$\langle 0|[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(0)]|0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p} \left( \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}} e^{-ipx} - \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}} e^{ipx} \right) \Big|_{p^0=\omega_{\mathbf{p}}}. \quad (4.54)$$

Die wollen wir wieder in ein Integral über den 4-er Impuls umschreiben. Für positive  $x^0$  können wir den Erwartungswert wie folgt schreiben,

$$\langle 0|[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(0)]|0\rangle = - \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{dp^0}{2\pi i} \frac{e^{-ipx}}{p^2 - m^2}, \quad (x^0 > 0),$$

wobei die  $p^0$ -Integration in der komplexen Ebene entlang des eingezeichneten Weges zu berechnen ist. In der Tat, für  $x^0 > 0$  können wir den Weg in der unteren komplexen  $p^0$ -

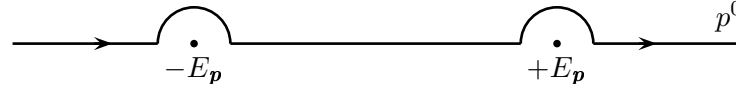


Abbildung 4.2: Zur der Gewinnung der retardierten Greensfunktion wählt man den skizzierten Integrationsweg in der komplexen Energieebene.

Ebene schließen, so dass die einfachen Pole des Integranden bei  $\pm\omega_p$  im negativen Sinn umschlossen werden. Nach dem Residuensatz finden wir

$$\frac{1}{2\pi i} \int dp_0 \frac{e^{-ip_0 x^0}}{p^2 - m^2} = \frac{1}{2\pi i} \int dp_0 \frac{e^{-ip_0 x^0}}{(p_0 - \omega_p)(p_0 + \omega_p)} = -\frac{1}{2\omega_p} \left( e^{-i\omega_p x^0} - e^{i\omega_p x^0} \right) \quad (4.55)$$

Ist dagegen  $x^0 < 0$ , dann können wir den Weg in der oberen komplexen  $p^0$ -Ebene schließen und erhalten Null. Also ergibt sich

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ipx} = \theta(x^0) \langle 0 | [\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(0)] | 0 \rangle = \theta(x^0) \Delta_m(x) \equiv i\Delta_{\text{ret}}(x). \quad (4.56)$$

Um  $\Delta_{\text{ret}}$  besser zu verstehen, wenden wir den Klein-Gordon Operator darauf an,

$$(\square + m^2)\Delta_{\text{ret}}(x) = - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} = -\delta^4(x). \quad (4.57)$$

Man erhält natürlich dasselbe Resultat, wenn man mit  $\square + m^2$  auf die mittlere Darstellung in (4.56) operiert und dabei neben  $\theta'(x^0) = \delta(x^0)$  die Identitäten

$$[\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}(t, \mathbf{y})] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad \text{und} \quad (\square + m^2)\hat{\phi}(x) = 0$$

benutzt. Die reelle Distribution  $\Delta_{\text{ret}}(x)$  ist die *retardierte Greenfunktion* des Klein-Gordon Operators, da sie ihren Träger auf oder im Innern des Vorwärtslichtkegel hat.  $\Delta_{\text{ret}}(x - y)$  ist nur dann ungleich Null, wenn der Aufpunkt  $x$  in der kausalen Zukunft des Quellpunktes  $y$  liegt. Dies ist in der Figur 4.3 skizziert.

Das  $p_0$ -Integral kann längs von vier topologisch verschiedenen Wegen ausgewertet werden. Für die Störungstheorie in Potenzen der Wechselwirkung wird sich die in Figur 6.3 angegebene Polvorschrift als sehr nützlich erweisen. Diese Vorschrift führt auf den *Feynmanschen-Propagator*. Bei dessen Berechnung schließen wir für positive  $x^0$  den Weg wieder in der unteren  $p^0$ -Halbebene und für negative  $p^0$  in der oberen Halbebene. In beiden Fällen trägt je ein Pol zum  $p^0$ -Integral in (4.55) bei und wir erhalten das Resultat

$$\frac{1}{2\pi i} \int dp_0 \frac{e^{-ip^0 x^0}}{p^2 - m^2} = -\frac{e^{-i\omega_p |x^0|}}{2\omega_p}. \quad (4.58)$$

Damit finden wir die Greenfunktion

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip(x-y)} \equiv i\Delta_{\text{F}}(x-y) = \begin{cases} W(x-y) & \text{für } x^0 > y^0 \\ W(y-x) & \text{für } x^0 < y^0. \end{cases} \quad (4.59)$$

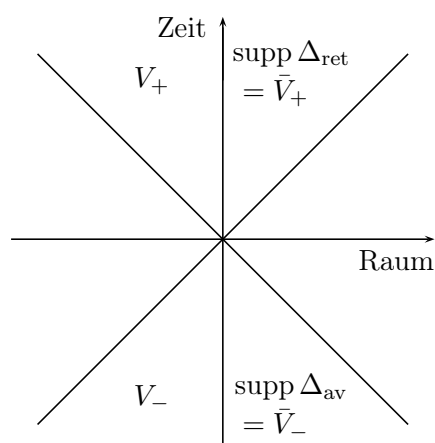


Abbildung 4.3: Die retardierte (avancierte) Greensfunktion hat Ihren Träger auf oder im Innern des Vorwärtslichtkegel (Rückwärtslichtkegel).

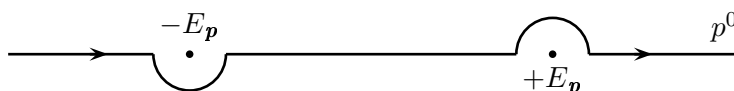


Abbildung 4.4: Für den Feynman-Propagator wählt man den skizzierten Integrationsweg in der komplexen Energieebene.

Bereits in der Quantenmechanik begegnet man bei der formalen Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung für ein zeitabhängige Hamiltonfunktion der Zeitordnung von Operatoren. Der Zeitordnungsoperator  $T$  ordnet ein Produkt von Feldoperatoren derart um, dass im geordneten Produkt die Zeiten von links nach rechts abnehmen. Der Operator zu spätesten Zeit steht dann ganz links. Zum Beispiel ist

$$T \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) = \begin{cases} \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) & \text{für } x^0 > y^0 \\ \hat{\phi}(y) \hat{\phi}(x) & \text{für } y^0 > x^0. \end{cases} \quad (4.60)$$

Damit schreibt sich die Feynman-Propagatorfunktion (Feynman-Propagator) für das Klein-Gordon Feld wie folgt,

$$i\Delta_F(x-y) = \langle 0 | T \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) | 0 \rangle. \quad (4.61)$$

Ausgedrückt durch die Wightman-Zweipunktfunktion,

$$i\Delta_F(x) = \theta(x^0) W(x) + \theta(-x^0) W(-x). \quad (4.62)$$

In den später eingeführten Feynman-Graphen der Störungstheorie ordnet man jeder inneren Linie, die die Propagation eines virtuellen Teilchens beschreibt, einen Feynman-Propagator zu.

Neben den retardierten und Feynman-Propagatoren gibt es noch den avancierten und Anti-Feynman-Propagator. Zusammenfassend unterscheiden wir 4 Lösungen von

$$(\square + m^2)G(x) = -\delta^{(4)}(x). \quad (4.63)$$

Diese können durch die Propagatorfunktion  $i\Delta_m(x) = W(x) - W(-x)$  und deren positive bzw. negative Frequenzanteile  $i\Delta_+ = W$  bzw.  $\Delta_- = \Delta_+^*$  ausgedrückt werden.

1. Den *retartierten Propagator*

$$\Delta_{\text{ret}}(x) = \theta(x^0)\Delta_m(x). \quad (4.64)$$

2. Den *avancierten Propagator*

$$\Delta_{\text{av}}(x) = -\theta(-x^0)\Delta_m(x). \quad (4.65)$$

3. Den *Feynman-Propagator*

$$\Delta_{\text{F}}(x) = \theta(x^0)\Delta_+(x) + \theta(-x^0)\Delta_-(x). \quad (4.66)$$

4. Den *anti-Feynman-Propagator*

$$\Delta_{\bar{\text{F}}}(x) = \bar{\Delta}_{\text{F}}(x). \quad (4.67)$$

Die Trägergebiete der retardierten und avancierten Propagatoren sind auf oder im Innern von Vorwärts- und Rückwärtslichtkegel, siehe Figur 4.3.

Das Quantenfeld  $\hat{\phi}(x)$  ist ein singuläres Objekt – es handelt sich hier um eine operatorwertige Distribution. Deshalb betrachtet man die von den ausgeschmierten Operatoren  $\hat{\phi}(f)$  erzeugte Algebra, wobei  $f$  in einem geeigneten linearen Raum  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$  von Testfunktionen liegt. Etwas salopp schreibt man

$$\hat{\phi}(f) = \int d^4x \hat{\phi}(x)f(x). \quad (4.68)$$

Die Zuordnung  $f \rightarrow \hat{\phi}(f)$  sollte folgende Eigenschaften haben:

1. Die Abbildung  $f \rightarrow \hat{\phi}(f)$  ist linear.
2. Die Klein-Gordon Gleichung:  $\hat{\phi}((\square + m^2)f) = 0$  für alle  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$ .
3. Kommutator  $[\hat{\phi}(f), \hat{\phi}(g)] = i \int d^4x d^4y f(x)\Delta_m(x-y)g(y) = i(f, \Delta_m g)$ .
4. Für reelle Felder gilt  $\hat{\phi}(f)^\dagger = \hat{\phi}(f^*)$ .

#### 4.4.1 Geschmierte Feldoperatoren im Fockraum

Wir hatten bereits gesehen, dass die Eigenzustände von Energie und Impuls nicht normierbar sind. Aber ähnlich wie in der Quantenmechanik können wir durch Superposition von



uneigentlichen Zustände normierbare  $n$ -Teilchen-Zustände konstruieren

$$|\varphi_n\rangle = \int \varphi_n(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) |\mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n\rangle d\mu(\mathbf{p}_1) \cdots d\mu(\mathbf{p}_n). \quad (4.69)$$

Hierin ist  $\varphi_n(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n)$  eine Wahrscheinlichkeitsamplitude im Impulsraum. Die Eigenzustände  $|\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle$  sind vollständig symmetrisch unter Austausch der Impulse – wir betrachten ja identische Teilchen mit Spin 0 – und deshalb ist die Wellenfunktion  $\varphi_n$  ebenfalls vollständig symmetrisch in ihren Argumenten. Ein beliebiger Zustand im Hilbertraum für Skalarpartikel, man nennt diesen zu Ehren des russischen Physikers Wladimir Alexandrowitsch Fock auch Fockraum, ist nun eine Superposition von Mehrteilchenzuständen. Somit hat ein allgemeiner Zustand die Entwicklung

$$|\varphi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |\varphi_n\rangle \quad (4.70)$$

und enthält insbesondere den Zustand  $|\varphi_0\rangle$  ohne Teilchen. Mithilfe des früher berechneten Skalarprodukts von nicht normierbaren Eigenzuständen von Energie und Impuls in (4.32) berechnet sich die  $n$ -Teilchen-Wellenfunktion gemäß

$$\varphi_n(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) = \langle \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n | \varphi_n \rangle = \langle \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n | \varphi \rangle. \quad (4.71)$$

Nach Normierung von  $|\varphi\rangle$  ist das Quadrat der Wellenfunktion  $\varphi_n$  gleich die Wahrscheinlichkeitsdichte für das Auffinden von  $n$  Teilchen mit Impulsen  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ . Die Normierung (4.32) bedingt das folgende Skalarprodukt für zwei Fock-Zustände,

$$\begin{aligned} \langle \chi | \varphi \rangle &= \sum_n \int \chi_n^*(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) \varphi_n(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) \langle \mathbf{q}_1 \dots \mathbf{q}_n | \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n \rangle \prod_i d\mu(\mathbf{q}_i) d\mu(\mathbf{p}_i) \\ &= \sum_n \int \chi_n^*(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) \varphi_n(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) \prod_i d\mu(\mathbf{p}_i). \end{aligned} \quad (4.72)$$

Wir fassen zusammen und verallgemeinern, damit die entsprechende spätere Verallgemeinerung für freie Fermionen oder das Photonenfeld evident sein werden. Es bezeichne  $\mathcal{H}$  den Fockraum für ein Teilchen, dann ist der Fockraum über  $\mathcal{H}$ ,

$$\mathcal{F}_s(\mathcal{H}) = \mathcal{H}^{(0)} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}_s^{(2)} \oplus \mathcal{H}_s^{(3)} \oplus \dots = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_s^{(n)}, \quad \mathcal{H}^{(0)} = \mathbb{C}. \quad (4.73)$$

Für skalare Teilchen sind die Wellenfunktionen in den  $n$ -Teilchen Unterräumen  $\mathcal{H}_s^{(n)}$  quadratintegrierbare symmetrische Funktionen der Teilchenimpulse,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_s^{(n)} &= \{ \varphi : \mathbb{R}^3 \times \dots \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{C}, \text{ symmetrisch} \} \\ \|\varphi\|^2 &= \int \prod_{i=1}^n d\mu(\mathbf{p}_i) |\varphi(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n)|^2 < \infty. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Der Index  $s$  zeigt an, dass wir nur Funktionen zulassen die in den Impulsen vollständig symmetrisch sind (für identische Fermionen werden es antisymmetrische Funktionen sein). Vektoren im Fockraum sind also Folgen von Vektoren,

$$\varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots) \quad \text{mit} \quad \varphi_n \in \mathcal{H}_s^{(n)}. \quad (4.75)$$

Zunächst werden nur Folgen mit endlich vielen von Null verschiedenen Gliedern zugelassen. Diese bilden einen linearen Raum. Der Fockraum ist dann der Abschluss dieses Raumes bezüglich der Norm

$$\langle \varphi, \varphi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi_n, \varphi_n)_{\mathcal{H}_s^{(n)}}, \quad (4.76)$$

also die Gesamtheit aller Folgen  $\varphi$  mit der Bedingung  $\langle \varphi, \varphi \rangle < \infty$ .

Translationen in der Raumzeit und Lorentz Transformationen lassen die Unterräumen  $\mathcal{H}_s^{(n)}$  invariant, da sie die Teilchenzahl nicht ändern. Die Eigenzustände  $|\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle$  sind Eigenzustände von Energie und Impuls und deshalb sind die  $\varphi_n(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n)$  Eigenfunktionen der unitären Verschiebungsoperatoren  $\hat{U}(a)$ . Deshalb transformieren die  $\varphi_n$  wie folgt unter Translationen und Lorentz-Transformationen,

$$\begin{aligned} (\hat{U}(a)\varphi)_n(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) &= e^{ia \sum p_i} \varphi_n(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) \Big|_{p_i^0 = E_{p_i}} \\ (\hat{U}(\Lambda)\varphi)_n(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) &= \varphi_n(\Lambda^{-1}\mathbf{p}_1, \dots, \Lambda^{-1}\mathbf{p}_n). \end{aligned} \quad (4.77)$$

Mit der Lorentz Transformation des 3-er Impulses  $\mathbf{p}$  meinen wir den räumlichen Anteil von  $\Lambda\mathbf{p}$ , wobei  $p^0 = \omega_{\mathbf{p}}$  zu setzen ist.

Da der Feldoperator eine operator-wertige Distribution ist, sollte dieser mit Testfunktionen ausgeschmiert werden,

$$\hat{\phi}(f) = \int d^4x f(x) \hat{\phi}(x) = (f, \hat{\phi}). \quad (4.78)$$

Der ausgeschmierte Operator repräsentiert eine Messapparatur in dem Gebiet definiert durch den Träger der Testfunktion.

Mithilfe der Wirkung von  $\hat{\phi}(x)$  auf die Eigenzustände von Energie und Impuls in (4.32) können wir die Wirkung des geschmierten Feldoperators auf einen  $n$ -Teilchen Zustand bestimmen. Wir erhalten die Überlagerung eines Zustands mit  $n - 1$  Teilchen und eines Zustands mit  $n + 1$  Teilchen,

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(f)|\varphi_n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_i f_-(\mathbf{p}_i) \varphi_n(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) |\mathbf{p}_1, \dots, \check{\mathbf{p}}_i, \dots, \mathbf{p}_n\rangle \prod d\mu(\mathbf{p}_i) \\ &+ \sqrt{n+1} f_+(\mathbf{p}) \varphi_n(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) \int d\mu(\mathbf{p}) |\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n\rangle \prod d\mu(\mathbf{p}_i), \end{aligned} \quad (4.79)$$

wobei aufgrund der Integration über die Raumzeit die Testfunktionen im Impulsraum (allerdings auf der Massenschale) auftreten,

$$\tilde{f}_-(\mathbf{p}) = \kappa \int d^4x e^{-ipx} f(x) \Big|_{p^0 = \omega_{\mathbf{p}}}, \quad \tilde{f}_+(\mathbf{p}) = \kappa \int d^4x e^{ipx} f(x) \Big|_{p^0 = \omega_{\mathbf{p}}}. \quad (4.80)$$

Die Wellenfunktionen des Zustands (4.79) in den Sektoren im  $n - 1$  und  $n + 1$  Teilchen sind

$$\langle \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n-1} | \hat{\phi}(f) | \varphi_n \rangle = \sqrt{n} \int d\mu(\mathbf{p}) \tilde{f}_-(\mathbf{p}) \varphi_n(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n-1}) \quad (4.81)$$

$$\langle \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n+1} | \hat{\phi}(f) | \varphi_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_i \tilde{f}_+(\mathbf{p}_i) \varphi_n(\mathbf{p}_1, \dots, \check{\mathbf{p}}_i, \dots, \mathbf{p}_{n+1}). \quad (4.82)$$

Schlussendlich können den geschmierten Feldoperator  $\hat{\phi}(f)$  in seinen positiven und negativen Frequenzanteil zerlegen,

$$\hat{\phi}(f) = \hat{a}(\tilde{f}_-) + \hat{a}^\dagger(\tilde{f}_+). \quad (4.83)$$

Die geschmierten Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren

$$\hat{a}(f) : \mathcal{H}_s^{(n+1)} \rightarrow \mathcal{H}_s^{(n)} \quad \text{und} \quad \hat{a}^\dagger(f) : \mathcal{H}_s^{(n-1)} \rightarrow \mathcal{H}_s^{(n)} \quad (4.84)$$

wirken folgendermassen auf die Wellenfunktionen im Impulsraum,

$$\begin{aligned} (\hat{a}(f) \varphi)_n(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) &= \sqrt{n+1} \int d\mu(\mathbf{p}) \tilde{f}(\mathbf{p}) \varphi_{n+1}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) \\ (\hat{a}^\dagger(f) \varphi)_n(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n f(\mathbf{p}_i) \varphi_{n-1}(\mathbf{p}_1, \dots, \check{\mathbf{p}}_i, \dots, \mathbf{p}_n). \end{aligned} \quad (4.85)$$

Die Elemente in  $\mathcal{H}^{(0)}$  werden von den ausgeschmierten Vernichtungsoperatoren annihilert. Die  $\hat{a}(f)$  können für alle  $f \in L_2(\mathbb{R}^3)$  abgeschlossen werden, und wir bezeichnen den Abschluss wieder mit  $\hat{a}(f)$ . In der Definition der Erzeugungsoperatoren wurde  $n \geq 1$  angenommen. Wie die Notation andeutet, ist  $\hat{a}^\dagger(f)$  der zu  $\hat{a}(f)$  adjungierte Operator. Man prüft folgende Kommutationsregeln für diese Operatoren

$$[\hat{a}(f), \hat{a}(g)] = [\hat{a}^\dagger(f), \hat{a}^\dagger(g)] = 0, \quad [\hat{a}(f), \hat{a}^\dagger(g)] = \int d\mu(\mathbf{p}) f^*(\mathbf{p}) g(\mathbf{p}). \quad (4.86)$$

Nun führt man Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren zu festen Impulsen ein,

$$\begin{aligned} (\hat{a}_p \varphi)_n(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) &= \sqrt{n+1} \varphi_{n+1}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n), \\ \text{so dass gilt} \quad \hat{a}(f) &= \int d\mu(\mathbf{p}) \tilde{f}(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (4.87)$$

Im Gegensatz zum Vernichtungsoperator  $\hat{a}_p$  ist der Erzeugungsoperator  $\hat{a}_p^\dagger$  nicht dicht definiert und kann nicht abgeschlossen werden.

## 4.5 Das komplexe Skalarfeld

Ein komplexes Klein-Gordon-Feld ist im Wesentlichen nur die Kopie zweier reeller Klein-Gordon-Felder, nämlich seines Real- und Imaginärteils. Allerdings tragen durch ein komplexes Feld beschriebene Teilchen eine elektrische Ladung. Unser Ausgangspunkt ist die

Lagrangedichte für das klassische Feld,

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi. \quad (4.88)$$

Die Felder  $\phi$ ,  $\phi^*$  werden als unabhängige Felder behandelt, deshalb gilt zum Beispiel

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*, \mu s(x)} = \partial^\mu \phi(x).$$

Das massive komplexe Feld erfüllt dann die Bewegungsgleichung

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0 \quad \text{und} \quad (\square + m^2)\phi^*(x) = 0, \quad (4.89)$$

und die konjugierten Impulsfelder sind

$$\pi(x) = \dot{\phi}^*(x) \quad \text{und} \quad \pi^*(x) = \dot{\phi}(x). \quad (4.90)$$

Bei der Quantisierung werden das Feld und sein konjugiertes Impulsfeld zu Quantenfelder mit den nicht-verschwindenden gleichzeitigen Kommutatoren

$$[\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}(t, \mathbf{y})] = [\hat{\phi}^\dagger(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}^\dagger(t, \mathbf{y})] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mathbb{1}. \quad (4.91)$$

Zerlegen wir nun die Feldoperatoren in ihre Real- und Imaginärteile,

$$\hat{\phi} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\phi}_1 + i\hat{\phi}_2) \quad \text{und} \quad \hat{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\pi}_1 - i\hat{\pi}_2)$$

dann ist offensichtlich, dass zum Beispiel  $\hat{\phi}$  und  $\hat{\pi}^\dagger$  vertauschen, da  $\hat{\phi}_1$  mit  $\hat{\pi}_2$  und  $\hat{\phi}_2$  mit  $\hat{\pi}_1$  vertauscht. Die Lösungen der Feldgleichungen sind auch für das komplexe Feld von der Form  $e^{\pm ipx}$ , so dass die Entwicklung des Feldoperators lautet

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(x) &= \hat{\phi}_+(x) + \hat{\phi}_-(x) = \kappa \int d\mu(\mathbf{p}) \left( \hat{a}_p e^{-ipx} + \hat{b}_p^\dagger e^{ipx} \right) \\ \hat{\phi}^\dagger(x) &= \hat{\phi}_+^\dagger(x) + \hat{\phi}_-^\dagger(x) = \kappa \int d\mu(\mathbf{p}) \left( \hat{b}_p e^{-ipx} + \hat{a}_p^\dagger e^{ipx} \right). \end{aligned} \quad (4.92)$$

Beachte, dass mit  $\hat{\phi}_+^\dagger$  nicht das zu  $\hat{\phi}_+$  adjungierte Feld gemeint ist, sondern der positive Frequenzanteil des Feldes  $\hat{\phi}$ . Im Unterschied zum reellen Feld existieren nun zu jedem Impuls zwei linear unabhängige Vernichtungsoperatoren  $\hat{a}_p$  und  $\hat{b}_p$ . Durch Umkehrung der Fourier-Transformation findet man aus den kanonischen Kommutationsregeln die Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} [\hat{a}_p, \hat{a}_q^\dagger] &= [\hat{b}_p, \hat{b}_q^\dagger] = 2\omega_p \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \\ [\hat{a}_p, \hat{a}_q] &= [\hat{a}_p^\dagger, \hat{a}_q^\dagger] = [\hat{b}_p, \hat{b}_q] = [\hat{b}_p^\dagger, \hat{b}_q^\dagger] = 0. \end{aligned} \quad (4.93)$$

Die Operatoren  $\hat{a}_p^\dagger, \hat{a}_p$  erzeugen und vernichten Teilchen der Sorte  $a$ , die Operatoren  $\hat{b}_p^\dagger, \hat{b}_p$  der Sorte  $b$  mit Impuls  $\mathbf{p}$ . Das Fock-Vakuum  $|0\rangle$  ist durch

$$\hat{a}_p|0\rangle = \hat{b}_p|0\rangle = 0 \quad \text{für alle } \mathbf{p}, \quad (4.94)$$

oder äquivalent durch

$$\hat{\phi}_+(x)|0\rangle = \hat{\phi}_+^\dagger(x)|0\rangle = 0 \quad \text{für alle } x \quad (4.95)$$

charakterisiert. Der Hamilton-Operator und der Impuls gehen aus den entsprechenden Operatoren für das reelle Feld durch die Ersetzung  $\hat{a}_p \hat{a}_p \rightarrow \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p + \hat{b}_p^\dagger \hat{b}_p$  hervor.

Die Lagrange Dichte (4.88) ist invariant unter der einer Phasenänderung  $\phi \rightarrow e^{-iq\alpha} \phi = \phi - iq\alpha\phi + \dots$  mit konstantem Parameter  $\alpha$  und Ladung  $q$ . Der zugehörige Noetherstrom

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^*} \delta \phi^* = -iq\alpha (\partial^\mu \phi^* \phi - \partial^\mu \phi \phi^*) \quad (4.96)$$

führt auf eine erhaltene Noetherladung, die in der QFT folgende Form hat,

$$\hat{Q} = -iq \int d\mathbf{x} \left( \partial_t \hat{\phi}^\dagger \hat{\phi} - \partial_t \hat{\phi} \hat{\phi}^\dagger \right). \quad (4.97)$$

Setzen wir hier die Entwicklungen (4.92) für die Quantenfelder ein, so finden wir

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= \frac{q}{2} \int d\mu(\mathbf{p}) \left( \hat{a}_p \hat{a}_p^\dagger + \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p - \hat{b}_p \hat{b}_p^\dagger - \hat{b}_p^\dagger \hat{b}_p \right) \\ &= q \int d\mu(\mathbf{p}) \left( \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p - \hat{b}_p^\dagger \hat{b}_p \right). \end{aligned} \quad (4.98)$$

Die  $a$ -Teilchen haben Ladung  $q$  und die  $b$ -Teilchen Ladung  $-q$ . Abgesehen vom Vorzeichen der Ladung haben beide Teilchen identische Eigenschaften. In einer relativistischen Feldtheorie tritt mit einem geladenen Teilchen automatisch sein entgegengesetzt geladenes *Antiteilchen* auf. Dies gilt auch für Teilchen mit Spin ungleich Null. Im Allgemeinen braucht die Ladung allerdings nicht mehr die elektrische Ladung zu sein. So unterscheidet sich das elektrisch ungeladene  $K^0$ -Meson von seinem Antiteilchen  $\bar{K}^0$  durch den Wert der Hyperladung  $Y$ .

## 4.6 Teilchenproduktion durch eine klassische Quelle

Obwohl wir bisher nur das freie Feld ohne Wechselwirkung untersucht haben, können wir bereits die Kopplung des reellen Klein-Gordon Feldes an eine zeitabhängige äußere klassische Quelle behandeln. Wir betrachten die Feldgleichung

$$(\square + m^2)\hat{\phi}(x) = q(x), \quad (4.99)$$

mit einer vorgegebenen Quelle  $q(x)$ , die nur während einer endlichen Zeitspanne auf das Quantensystem einwirke. Befindet sich das System zu sehr frühen Zeiten im Vakuumzustand, dann wird es im Allgemeinen nach dem Einwirkung der Quelle nicht mehr in diesem Zustand sein. Die folgenden Rechnungen werden im Heisenberg-Bild vorgenommen.

Bevor die Quelle wirken konnte lautet die Lösung der Feldgleichung

$$\hat{\phi}_0(x) = \kappa \int d\mu(\mathbf{p}) \left( \hat{a}_p e^{-ipx} + \hat{a}_p^\dagger e^{ipx} \right). \quad (4.100)$$

Bei Anwesenheit der Quelle kann die Lösung zu beliebigen Zeiten mit Hilfe der retardierten Greenfunktion konstruiert werden,

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(x) &= \hat{\phi}_0(x) - \int d^4y \Delta_{\text{ret}}(x-y) q(y) \\ &= \hat{\phi}_0(x) + \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4y \int d\mu(\mathbf{p}) \theta(x^0 - y^0) \left( e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)} \right) q(y). \end{aligned} \quad (4.101)$$

Nun warten wir, bis die Quelle wieder ausgeschaltet wurde. Dann ist  $x^0 > y^0$  im ganzen Integrationsgebiet und die Stufenfunktion kann durch 1 ersetzt werden. Die Lösung  $\hat{\phi}(x)$  enthält dann nur die Fourier-Transformierte der äußeren Quelle,

$$\tilde{q}(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4y e^{ipy} q(y) \Big|_{p^0 = \omega_p}. \quad (4.102)$$

Wir fassen die Anteile mit positiven und negativen Frequenzen in der Lösung (4.101) zusammen und finden

$$\hat{\phi}(x) = \kappa \int d\mu(\mathbf{p}) \left\{ (\hat{a}_p + i\tilde{q}(\mathbf{p})) e^{-ipx} + (\hat{a}_p^\dagger - i\tilde{q}^*(\mathbf{p})) e^{ipx} \right\} \Big|_{p^0 = \omega_p}. \quad (4.103)$$

Der Hamilton Operator im Heisenberg Bild nach Ausschalten der Quelle erhält man aus demjenigen des freien Feldes durch die Ersetzung  $\hat{a}_p \rightarrow \hat{a}_p + i\tilde{q}(\mathbf{p})$ ,

$$H = \int d\mu(\mathbf{p}) \omega_p (\hat{a}_p^\dagger - i\tilde{q}^*(\mathbf{p})) (\hat{a}_p + i\tilde{q}(\mathbf{p})). \quad (4.104)$$

Die Energie des Quantenfeldes im Grundzustand des freien Feldes  $|0\rangle$  ist dann

$$\langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \int d\mu(\mathbf{p}) \omega_p |\tilde{q}(\omega_p, \mathbf{p})|^2. \quad (4.105)$$

Da im Integranden  $p^0 = \omega_p$  ist, tragen nur diejenigen Fourier-Komponenten von  $q(x)$  bei, die auf der Massenschale der Skalarpartikel liegen. Dies bedeutet, dass nur äußere Störungen zum Integral (4.105) beitragen, die in Resonanz mit den Moden des Quantenfeldes sind. Wir können das Resultat als Teilchenproduktion durch die zeitabhängige äußere Quelle  $q(x)$  interpretieren. Diese führt dem Quantensystem Energie zu und regt Teilchenzustände an. Die Wahrscheinlichkeit dafür, Zustände im (invarianten) Element  $d\mu(\mathbf{p})$  zu produzieren ist gleich  $|\tilde{q}(\omega_p, \mathbf{p})|^2$ . Die totale Anzahl produzierter Teilchen ist

$$N = \int d\mu(\mathbf{p}) |\tilde{q}(\omega_p, \mathbf{p})|^2. \quad (4.106)$$

Der entsprechende Prozess der Photonenerzeugung durch ein beschleunigtes Elektron, modelliert durch einen zeitabhängigen äußeren Strom  $j^\mu(x)$ , ist die *Bremsstrahlung* in der quantisierten Elektrodynamik.

## 4.7 Anhang: Berechnung der Wightman-Funktion

Zur Berechnung der Wightman-Funktion integrieren wir den Ausdruck (4.43) über die Winkel im Impulsraum. Bezeichnet  $\theta$  der Winkel zwischen  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{p}$ , dann gilt  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = prz$  mit  $p = |\mathbf{p}|$ ,  $z = \cos \theta$  und

$$\begin{aligned} W(x) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{dp}{2\omega_p} p^2 e^{-i\omega_p t} \int_{-1}^1 dz e^{iprz} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{r} \int_0^\infty \frac{dp}{\omega_p} p e^{-i\omega_p t} \sin(pr), \quad \omega_p = \sqrt{p^2 + m^2}. \end{aligned} \quad (4.107)$$

Schreiben wir  $p \sin(pr)$  als  $r$ -Ableitung von  $-\cos(pr)$  und erweitern das  $p$ -Integral auf die reelle Achse, dann finden wir

$$W(x) = \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial f(t, r)}{\partial r} \quad \text{mit} \quad f(t, r) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{\omega_p} e^{-i\omega_p t + ipr}. \quad (4.108)$$

Im nächsten Schritt setzen wir

$$\omega_p = m \cosh \varphi \quad \text{und} \quad p = m \sinh \varphi$$

und finden

$$f(t, r) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi e^{-imt \cosh \varphi + imr \sinh \varphi}, \quad (4.109)$$

Bei der Auswertung des Integrales unterscheiden wir drei Fälle, je nachdem ob  $x$  zeitartig oder raumartig ist und im ersten Falle ob es innerhalb des Vorwärts- oder Rückwärtslichtkegels liegt. Wir definieren

$$\begin{aligned} m\sqrt{x^2} &= m\sqrt{t^2 - r^2} \equiv a \quad \text{für} \quad x^2 \geq 0 \\ m\sqrt{-x^2} &= m\sqrt{r^2 - t^2} \equiv b \quad \text{für} \quad x^2 \leq 0. \end{aligned}$$

1. Für zeitartige  $x$  innerhalb des Vorwärtslichtkegels setzen wir

$$mt = a \cosh \xi, \quad mr = a \sinh \xi \implies e^{-ia \cosh(\varphi - \xi)}.$$

2. Für zeitartige  $x$  innerhalb des Rückwärtslichtkegels setzen wir

$$mt = -a \cosh \xi, \quad mr = a \sinh \xi \implies e^{ia \cosh(\varphi + \xi)}.$$

3. Für raumartige  $x$  setzen wir

$$m\bar{t} = b \sinh \xi, \quad mr = b \cosh \xi \implies e^{ib \sinh(\varphi - \xi)}.$$

Die entsprechenden Integrale in (4.109) führen auf Bessel-, Neumann- und Hankel-Funktionen nullter Ordnung,

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi e^{ia \cosh \varphi} = J_0(a) + iN_0(a) \quad , \quad \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi e^{ib \sinh \varphi} = K_0(b). \quad (4.110)$$

Entsprechend erhalten wir für zeitartige  $x$  den expliziten Ausdruck

$$f(t, r) = \frac{1}{2} N_0(a) + \frac{i}{2} \epsilon(x^0) J_0(a), \quad (x, x) > 0, \quad (4.111)$$

und für raumartige  $x$

$$f(t, r) = -\frac{1}{\pi} K_0(b), \quad (x, x) < 0. \quad (4.112)$$

In der Umgebung des Ursprungs haben die speziellen Funktionen die Entwicklungen

$$\begin{aligned} J_0(a) &= 1 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + O(a^4) \\ N_0(a) &= \frac{2}{\pi} \left[ 1 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right] \log \frac{a}{2} + \frac{2\gamma}{\pi} + O(a^2) \\ K_0(b) &= - \left[ 1 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \right] \log \frac{b}{2} - \gamma + O(b^2), \end{aligned} \quad (4.113)$$

wobei  $\gamma = 0.577215 \dots$  die Euler-Konstante ist. Für große Argumente haben sie die asymptotischen Entwicklungen

$$\begin{aligned} J_0(a) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi a}} \cos\left(a - \frac{\pi}{4}\right) \\ N_0(a) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi a}} \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right) \\ K_0(b) &\sim \sqrt{\frac{\pi}{2b}} e^{-b}. \end{aligned} \quad (4.114)$$

Zur Berechnung der Wightman-Funktion benötigen wir die  $r$ -Ableitung von  $f$ . Mit

$$\partial_r = -\frac{m^2 r}{a} \partial_a = \frac{m^2 r}{b} \partial_b$$

und den Formeln

$$J'_0(a) = -J_1(a), \quad N'_0(a) = -N_1(a), \quad K'_0(b) = -K_1(b). \quad (4.115)$$

erhalten wir innerhalb und außerhalb des Lichtkegels

$$\partial_r f(t, r) = \frac{m^2 r}{2a} (N_1(a) + i\epsilon(x^0) J_1(a)) \quad \text{und} \quad \partial_r f(t, r) = \frac{m^2 r}{\pi b} K_1(b). \quad (4.116)$$

Der  $N_0$ -Anteil von  $f$  in (4.111) innerhalb des Lichtkegels geht stetig in die Funktion  $f$  außerhalb des Lichtkegels über. Aber der Term proportional zu  $J_0$  führt zu einer Unstetigkeit



am Lichtkegel. Durchstößt man den Lichtkegel von innen nach außen, so springt wegen (4.113) die Funktion  $f$  um  $-i\epsilon(x^0)/2$ . Dieser Sprung führt zu einer  $\delta$ -Distribution in der Ableitung von  $f$ ,

$$\partial_r f(t, r) = -\frac{i}{2}\epsilon(x^0)(\delta(t-r) + \delta(t+r)) + \dots = -ir\epsilon(x^0)\delta(t^2 - r^2) + \dots,$$

wobei die Punkte für die in (4.116) bereits berechneten Terme stehen. Damit ergibt sich für die 2-Punkt Funktion die explizite Formel

$$W(x) = \frac{1}{4\pi i} \epsilon(x^0)\delta(x^2) + \frac{m^2}{8\pi} \left( \theta(x^2) \frac{N_1(a) + i\epsilon(x^0)J_1(a)}{a} + \frac{2}{\pi} \theta(-x^2) \frac{K_1(b)}{b} \right). \quad (4.117)$$

## 4.8 Aufgaben

Um die Notation zu vereinfachen lassen wir im Folgenden die Hüte bei der Bezeichnung von Operatoren weg.

### Aufgabe 1: Linear chain of coupled oscillators

Consider a system of  $N$  particles with equal masses  $m$  on a one-dimensional chain with lattice constant (separation of equilibrium positions)  $a$ . Let each particle move in a harmonic potential ( $\Omega_0$ ) and couple nearest neighbors harmonically ( $\Omega$ ) as well. For the  $n$ -th particle of the chain, denote its displacement from equilibrium  $q_n$  and its momentum  $p_n$ . Then, the Hamiltonian of the system reads

$$H = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{p_n^2}{2m} + \frac{m\Omega^2}{2} (q_n - q_{n-1})^2 + \frac{m\Omega_0^2}{2} q_n^2.$$

To diagonalize  $H$ , we introduce the normal coordinates and momenta  $Q_k$  and  $P_k$ :

$$q_n = \frac{1}{\sqrt{mN}} \sum_k e^{ikan} Q_k, \quad p_n = \sqrt{\frac{m}{n}} \sum_k e^{-ikan} P_k,$$

which inherit the canonical commutation relations from  $q_n$  and  $p_n$ , i.e.,  $[Q_k, P_{k'}] = i\delta_{k,k'}$ , while the other commutators vanish.

1. Choose periodic boundary conditions, i.e.,  $q_0 = q_N$  and determine the possible values that  $k$  can take (1<sup>st</sup> Brillouin zone (BZ)) for even or odd  $N$  respectively.
2. Prove the orthogonality relation

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{ian(k-k')} = \delta_{k,k'},$$

which holds as long as  $k$  and  $k'$  are both within the 1<sup>st</sup> BZ, use it to show that the Hamiltonian can be written as

$$H = \frac{1}{2} \sum_k (P_k P_k^\dagger + \omega_k^2 Q_k Q_k^\dagger),$$

and determine  $\omega_k^2$ . Plot  $\omega_k > 0$  as a function of  $k$  for  $\Omega_0 = 0$  and for  $\Omega_0 \neq 0$  (choose the other parameters as you please). Interpret the result.

3. Now go back to the initial definition of  $H$  above and write down the Hamiltonian equations of motion for each  $q_n$  and  $p_n$ . Then, after introducing

$$q(x, t) = q_n(t) \sqrt{\frac{m}{a}}, \quad p(x, t) = p_n(t) \sqrt{ma},$$

perform the continuum limit  $a \rightarrow 0$ ,  $N \rightarrow \infty$ , keeping  $L = aN$ ,  $\rho = \frac{m}{a}$  and  $v = \Omega a$  constant and show that in this limit the equations of motion assume the form of a one-dimensional Klein-Gordon equation for the field  $q(x, t)$ .

### Aufgabe 2: Lorentzinvariantes Mass

Wir wollen uns davon überzeugen, dass

$$\frac{d\mathbf{k}}{2\omega_k}, \quad \omega_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}, \quad (\hbar = c = 1)$$

ein lorentzinvariantes Mass auf der Massenschale  $k_\mu k^\mu = m^2$  definiert. Beweise dazu

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk^0 \delta(k^2 - m^2) \theta(k^0) = \frac{1}{2\omega_k},$$

wobei  $\theta$  die Stufenfunktion ist. Warum folgt daraus, dass  $d\mathbf{k}/2\omega_k$  ein invariantes Mass auf der Massenschale definiert.

### Aufgabe 3: Feldoperatoren im Impulsraum

Das Quantenfeld und die Impulsdichte im Ortsraum sind Linearkomponenten der Felder im Impulsraum,

$$\phi(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{p} \tilde{\phi}(\mathbf{p}) u_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) \quad \text{und} \quad \pi(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{p} \tilde{\pi}(\mathbf{p}) u_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}),$$

wobei die Fouriermoden  $u_{\mathbf{p}}$  in (3.60) definiert wurden. Für die Operatoren in diesen Entwicklungen erhält man mit Hilfe der inversen Fouriertransformation

$$\tilde{\phi}(\mathbf{p}) = (u_{\mathbf{p}}, \phi) \quad \text{und} \quad \tilde{\pi}(\mathbf{p}) = (u_{\mathbf{p}}, \pi).$$

1. Zeige, dass für ein hermitesche Feld zusätzlich gilt

$$\tilde{\phi}^\dagger(\mathbf{p}) = \tilde{\phi}(-\mathbf{p}) \quad \text{und} \quad \tilde{\pi}^\dagger(\mathbf{p}) = \tilde{\pi}(-\mathbf{p}).$$

2. Beweise folgende Kommutationsregeln für Feld im Impulsdichte im Impulsraum

$$[\tilde{\phi}(\mathbf{p}), \tilde{\phi}(\mathbf{q})] = [\tilde{\pi}(\mathbf{p}), \tilde{\pi}(\mathbf{q})] = 0 \quad \text{und} \quad [\tilde{\phi}(\mathbf{p}), \tilde{\pi}(\mathbf{q})] = i\delta(\mathbf{p} + \mathbf{q}).$$

3. Zeige, dass die Felder im Impulsraum folgendermaßen durch die Ab- und Aufsteigeoperatoren ausgedrückt werden können:

$$\tilde{\phi}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}} (a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^{\dagger}), \quad \tilde{\pi}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2i} (a_{\mathbf{p}} - a_{-\mathbf{p}}^{\dagger}).$$

#### Aufgabe 4: Energie und Impuls

In der Vorlesung wurden Energie und Impuls für ein reelles Skalarfeld berechnet:

$$H = \int d\mu(\mathbf{p}) \omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} a_{\mathbf{p}} \quad \text{und} \quad \mathbf{p} = \int d\mu(\mathbf{p}) \mathbf{p} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} a_{\mathbf{p}}.$$

Dabei ist  $[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^{\dagger}] = 2\omega_{\mathbf{p}} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q})$ . Beweisen sie die Formeln

1.  $[P_{\mu}, P_{\nu}] = 0$
2.  $[P_{\mu}, a_{\mathbf{p}}^{\dagger}] = p_{\mu} a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$ ,  $[P_{\mu}, a_{\mathbf{p}}] = -p_{\mu} a_{\mathbf{p}}$  wobei  $p^0 = \omega_{\mathbf{p}}$  ist.
3.  $e^{i\xi P} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} e^{-i\xi P} = e^{i\xi p} a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$ ,  $e^{i\xi P} a_{\mathbf{p}} e^{-i\xi P} = e^{-i\xi p} a_{\mathbf{p}}$ ,  $\xi P = \xi^{\mu} P_{\mu}$ .
4. Berechnen sie nun  $U(\xi)\phi(x)U^{-1}(\xi)$ , mit Translationsoperator  $U(\xi) = e^{i\xi P}$ .

#### Aufgabe 5: Heisenberg picture

Consider a charged scalar field in the Schrödinger picture:

$$\phi(\mathbf{x}) = \int d\mu(\mathbf{p}) \left( a_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) + b_{\mathbf{p}}^{\dagger} u_{\mathbf{p}}^*(\mathbf{x}) \right) .$$

Now transition to the Heisenberg picture by introducing time dependent operators

$$a_{\mathbf{p}}(t) = e^{iHt} a_{\mathbf{p}} e^{-iHt} ,$$

etc., where  $H$  denotes the Hamiltonian of the theory. Show that, in the Heisenberg picture,

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mu(\mathbf{p}) \left( a_{\mathbf{p}} e^{-ipx} + b_{\mathbf{p}}^{\dagger} e^{ipx} \right) ,$$

where  $px = x_{\mu} p^{\mu}$ .

#### Aufgabe 6: Coherent states

Consider a hermitian scalar field  $\phi(\mathbf{x})$  given by

$$\phi(\mathbf{x}) = \int d\mu(\mathbf{p}) \left( a_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) + a_{\mathbf{p}}^{\dagger} u_{\mathbf{p}}^*(\mathbf{x}) \right) ,$$

where we use notation established on previous exercise sheets. Now consider the coherent state  $|\eta\rangle$ , defined by

$$|\eta\rangle = \exp \left[ \int d\mu(\mathbf{p}) \eta(\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}}^\dagger \right] |0\rangle \quad ,$$

where  $\eta(\mathbf{p})$  is a normalizable function defined on the mass shell  $p^2 = m^2$ ,  $p^0 > 0$ :

$$\int d\mu(\mathbf{p}) |\eta(\mathbf{p})|^2 < \infty \quad .$$

1. Show that  $|\eta\rangle$  is an eigenstate of the annihilation operator  $a(\mathbf{p})$  and therefore diagonalizes the annihilation part of  $\phi(\mathbf{x})$ .
2. Show that coherent states  $|\eta_1\rangle$  and  $|\eta_2\rangle$  are non-orthogonal for  $\eta_1(\mathbf{p}) \neq \eta_2(\mathbf{p})$ . Are they normalized?
3. Let  $|\{n, \mathbf{p}\}\rangle = |n_1, \mathbf{p}_1; n_2, \mathbf{p}_2; \dots; n_N, \mathbf{p}_N\rangle$  denote a state in Fock space with  $n_1$  particles of momentum  $\mathbf{p}_1$ ,  $n_2$  particles of momentum  $\mathbf{p}_2$ , etc. Show that  $|\eta\rangle$  can be used as a generating function for  $|\{n, \mathbf{p}\}\rangle$ .
4. Now define  $\phi_f$  as the smearing of  $\phi(\mathbf{x})$  (which is an operator-valued distribution) with some suitable test function  $f(\mathbf{x})$ :

$$\phi_f = \int d^3x f(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) \quad .$$

One may study the probability distribution of  $\phi_f$  in a state  $|\{n, \mathbf{p}\}\rangle$ , defined as

$$\rho_{\{n, \mathbf{p}\}}(\alpha) = \langle \{n, \mathbf{p}\} | \delta(\phi_f - \alpha) | \{n, \mathbf{p}\} \rangle = \int \frac{ds}{2\pi} e^{-i\alpha s} \langle \{n, \mathbf{p}\} | e^{is\phi_f} | \{n, \mathbf{p}\} \rangle \quad .$$

Since  $|\eta\rangle$  generates the  $|\{n, \mathbf{p}\}\rangle$ , the problem of finding  $\rho_{\{n, \mathbf{p}\}}(\alpha)$  reduces to that of finding  $\langle \eta_1 | e^{is\phi_f} | \eta_2 \rangle$ . Thus, compute  $\langle \eta_1 | e^{is\phi_f} | \eta_2 \rangle$ . Then, show explicitly that the vacuum distribution  $\rho_0(\alpha) = \langle 0 | \delta(\phi_f - \alpha) | 0 \rangle$  is a Gaussian distribution centered around  $a = 0$  with a variance  $\sigma^2 = \int d\mu(\mathbf{p}) |\tilde{f}(\mathbf{p})|^2$ , where

$$\tilde{f}(\mathbf{p}) = \int d^3x u_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) f(\mathbf{x})$$

is the Fourier transform of  $f(\mathbf{x})$ .

### Aufgabe 7: Charge conjugation for the complex scalar field

The charge conjugation operation for the quantized complex scalar field is defined by

$$\phi'(x) = \mathcal{C} \phi(x) \mathcal{C}^\dagger = \eta_{\mathcal{C}} \phi^\dagger(x) \quad ,$$

where the charge conjugation operator  $\mathcal{C}$  is unitary and leaves the vacuum state invariant,  $\mathcal{C}|0\rangle = |0\rangle$ .  $\eta_{\mathcal{C}}$  is a complex number.

1. Show that, for the annihilation operators  $a_{\mathbf{p}}$  and  $b_{\mathbf{p}}$ ,

$$\mathcal{C}a_{\mathbf{p}}\mathcal{C}^\dagger = \eta_{\mathcal{C}}b_{\mathbf{p}} \quad , \quad \mathcal{C}b_{\mathbf{p}}\mathcal{C}^\dagger = \eta_{\mathcal{C}}^*a_{\mathbf{p}}$$

2. Consider the one-particle states

$$|a, \mathbf{p}\rangle = a_{\mathbf{p}}^\dagger|0\rangle \quad , \quad |b, \mathbf{p}\rangle = b_{\mathbf{p}}^\dagger|0\rangle$$

and show their transformation behavior under charge conjugation,

$$\mathcal{C}|a, \mathbf{p}\rangle = \eta_{\mathcal{C}}^*|b, \mathbf{p}\rangle \quad , \quad \mathcal{C}|b, \mathbf{p}\rangle = \eta_{\mathcal{C}}|a, \mathbf{p}\rangle.$$

3. Show that the Lagrangian describing a free complex scalar field is invariant under charge conjugation.
4. How does the charge operator transform under charge conjugation?

### Aufgabe 8: Derivation of the Yukawa potential from Quantum Field Theory

Consider a real scalar field  $\phi(x)$  in the presence of a classical static source described by the density  $S(\mathbf{x})$ ,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + S\phi \quad .$$

1. Find the Hamiltonian of the theory and write down the classical equations of motion.
2. The quantization of the scalar field can be summarized as follows:

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} \quad , \quad [\pi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})] = -i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad , \\ \phi(\mathbf{x}) &= \int d\mu(\mathbf{p}) \left( a_{\mathbf{p}}u_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) + a_{\mathbf{p}}^\dagger u_{\mathbf{p}}^*(\mathbf{x}) \right) \quad , \\ \pi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{i} \int d\mu(\mathbf{p}) \omega_{\mathbf{p}} \left( a_{\mathbf{p}}u_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) - a_{\mathbf{p}}^\dagger u_{\mathbf{p}}^*(\mathbf{x}) \right) \quad , \end{aligned}$$

where  $u_{\mathbf{p}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$ . Construct the Hamiltonian of the quantized theory using the Fourier components of  $S(\mathbf{x})$ ,

$$S(\mathbf{x}) = \int d^3p \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} S_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \quad .$$

Use the fact that the density  $S(\mathbf{x})$  is a real quantity in order to express  $S_{-\mathbf{p}}$  in terms of  $S_{\mathbf{p}}^*$ . Why is this the case?

3. Use the following canonical transformation,

$$a_{\mathbf{p}} = b_{\mathbf{p}} + \eta_{\mathbf{p}} \quad , \quad \text{where } \eta_{\mathbf{p}} \in \mathbb{C} \quad ,$$

to rewrite the Hamiltonian in such a way that only terms of the form  $b_p^\dagger b_p$  and complex valued terms remain. This is possible by choosing an appropriate  $\eta_p \in C$ .

How does the spectrum of the Hamiltonian change in the presence of the source as compared to the free Hamiltonian (i.e.,  $S = 0$ )? What is the physical interpretation of this result?

4. Now calculate explicitly the interaction energy of two point charges  $q_1$  and  $q_2$ , located at positions  $\mathbf{x}_1$  and  $\mathbf{x}_2$  respectively, i.e. use

$$S(\mathbf{x}) = q_1 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) + q_2 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \quad .$$

There will be divergent self-energy contributions appearing in the calculation. How can you identify them and distinguish them from the interaction energy of the two charges at two different spacetime points? Calculate the interaction energy. Does the result seem familiar? What is the physics behind it? What happens in the limit  $m \rightarrow 0$ ?

# 5 Elektrodynamik

Die älteste und erfolgreichste Quantenfeldtheorie ist die *Quantenelektrodynamik*, die Theorie des quantisierten elektromagnetischen Feldes und des quantisierten Elektronenfeldes.

Die Normalmoden des freien elektromagnetischen Feldes sind unendlich viele ungekoppelte harmonische Oszillatoren, zwei Oszillatoren für jeden erlaubten Wellenzahlvektor. Das Feld wird quantisiert, indem jeder Oszillator die kanonischen Quantisierungsregeln erfüllt. Anregungen und Abregungen dieser Oszillatoren sind gleichbedeutend mit Zunahme und Abnahme von Feldenergie und Feldimpuls, also mit Emission und Absorption von Photonen. Die Quantisierung des Strahlungsfeldes scheint einfach und zwingend zu sein, aber sie bedeutete einen großen Fortschritt in der Physik. Die Theorie des quantisierten elektromagnetischen und Elektronenfeldes, die Quantenelektrodynamik QED, ist eine höchst erfolgreiche physikalische Theorie. In diesem einführenden Kapitel werden wir allerdings nur die Quantisierung des Maxwell-Feldes besprechen.

## 5.1 Klassische Theorie

Zuerst zerlegen wir das elektromagnetische Feld in *Normalmoden*. Dies geht am besten, wenn wir Potentiale einführen,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{und} \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (5.1)$$

so dass die homogenen Maxwellgleichungen erfüllt sind. Die Potentiale sind durch die physikalischen Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  nicht eindeutig festgelegt. Die Transformation

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A} + \nabla\lambda \quad (5.2)$$

ändert die magnetische Induktion nicht. Damit das elektrische Feld nicht ändert muss gleichzeitig das skalare Potential transformiert werden,

$$\phi \longrightarrow \phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t} \quad (5.3)$$

Die beiden letzten Transformationen können mit (2.54) folgendermaßen geschrieben werden,

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \lambda. \quad (5.4)$$

Es sind *Eichtransformationen* mit einer beliebigen Eichfunktion  $\lambda$ . Die physikalischen Felder sind eichinvariant und zwei 4-er Potentiale  $A_\mu$  und  $A'_\mu$  sind physikalisch völlig äquivalent – man spricht von der Eichinvarianz der Elektrodynamik. Es ist nicht offensichtlich, dass die folgende Formulierung eich- und lorentzinvariant ist. Wir werden dieses Problem zunächst ignorieren.

### 5.1.1 Normalmoden in Coulombbeichung

Wir wählen eine Eichbedingung, die schnell physikalisch sinnvolle Ergebnisse liefert. Dies ist die sogenannte *Coulomb-, Strahlungs- oder transversale* Eichung. In Abwesenheit von Ladungsträgern verschwindet in der Coulombbeichung das skalare Potential und das Vektorpotential hat keine Quellen,

$$\varphi = 0 \quad \text{und} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (5.5)$$

Die „inhomogenen Maxwellgleichungen“ im Vakuum

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (5.6)$$

sind dann gleichbedeutend mit der Wellengleichung für das Vektorpotential,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{A} \equiv \square \mathbf{A} = 0. \quad (5.7)$$

Nun wählen wir einen vollständigen Satz von Lösungen dieser Wellengleichung welche zusätzlich die Eichbedingung (5.5) erfüllen. Im vorangehenden Kapitel 4 wurde bei der Quantisierung des freien Skalarfelds im unendlichen Raum ebene Wellen mit kontinuierlich Frequenzen und Wellenzahlvektoren benutzt. In diesem Kapitel quantisieren wir das Photonenfeld im kubischen Kasten mit Länge  $L$  und Volumen  $V = L^3$  und fordern (der Einfachheit halber) periodische Randbedingungen. Wir beschreiben also ein Gas von Photonen im kubischen Hohlraum.

Die Komponenten des Vektorpotentials sind Linearkombinationen von ebenen Wellen  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ , wobei für periodische Felder die Wellenzahlvektoren  $\mathbf{k}$  auf einem Gitter liegen,

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L} \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3. \quad (5.8)$$

Spezielle Lösungen von (5.7) schwingen harmonisch in der Zeit,

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = e^{-i\omega_k t} \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\lambda, \mathbf{x}), \quad \text{mit} \quad \omega_k = |\mathbf{k}| \quad (5.9)$$

und sind auf Eins normierte stehende Wellen im Kasten,

$$\mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\lambda, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \varepsilon_\lambda(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (5.10)$$



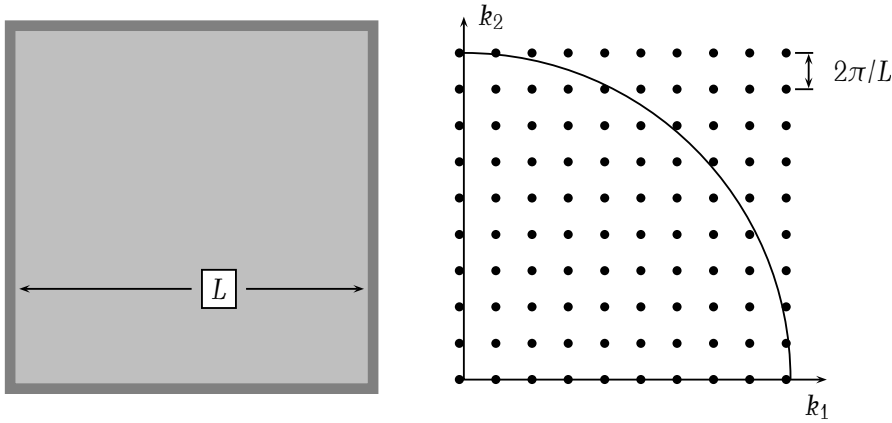


Abbildung 5.1: Mögliche Wellenzahlvektoren für Wellen im Kasten

Dabei sind  $\varepsilon_\lambda(\mathbf{k})$ ,  $\lambda = 1, 2$  zwei linear unabhängige Einheitsvektoren. Diese müssen senkrecht zu  $\mathbf{k}$  sein damit die Coulombbedingung (5.5) erfüllt ist. Zu jedem Wellenzahlvektor  $\mathbf{k}$  gehören also zwei unabhängige und zur Ausbreitungsrichtung senkrechte Polarisationsvektoren. Als Orthonormalbasis in der Fläche senkrecht zur Ausbreitungsrichtung wählen wir zwei *linear polarisierte* reelle Vektoren  $\varepsilon_\lambda(\mathbf{k})$ ,

$$\varepsilon_1(\mathbf{k}) \times \varepsilon_2(\mathbf{k}) = \hat{\mathbf{k}}, \quad \varepsilon_\lambda(\mathbf{k}) \cdot \varepsilon_{\lambda'}(\mathbf{k}) = \delta_{\lambda\lambda'}, \quad \lambda, \lambda' = 1, 2, \quad (5.11)$$

oder zwei *zirkular polarisierte* komplexe Vektoren,

$$\varepsilon_\pm(\mathbf{k}) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\varepsilon_1(\mathbf{k}) \pm i\varepsilon_2(\mathbf{k})) \quad \text{mit} \quad \varepsilon_+(\mathbf{k}) = -\varepsilon_-^*(\mathbf{k}). \quad (5.12)$$

Die zeitabhängig Vektoren

$$\Re(\varepsilon_\pm(\mathbf{k})e^{-i\omega_k t}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\varepsilon_1(\mathbf{k}) \cos \omega_k t \pm \varepsilon_2(\mathbf{k}) \sin \omega_k t)$$

beschreiben eine Kreisbewegung in der Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung.

Der Raum der vektorwertigen, transversalen und quadratintegrierbaren Funktion bezeichnen wir mit  $L^2_\perp(V)$ . Für jede feste Zeit bilden die Lösungen der Form (5.10) eine vollständige Orthonormalbasis in diesem Raum,

$$\int d\mathbf{x} \mathbf{u}_\mathbf{k}^*(\lambda, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}'}(\lambda', \mathbf{x}) = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \delta_{\lambda, \lambda'}, \quad \mathbf{u}_\mathbf{k}^* = \mathbf{u}_{-\mathbf{k}}. \quad (5.13)$$

Eine transversale und reelle Lösung der Wellengleichung lässt sich nach dieser Basis entwickeln,

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \sum_{\lambda, \mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} (a_\lambda(\mathbf{k})e^{-i\omega_k t} \mathbf{u}_\mathbf{k}(\lambda, \mathbf{x}) + a_\lambda^*(\mathbf{k})e^{i\omega_k t} \mathbf{u}_\mathbf{k}^*(\lambda, \mathbf{x})) \quad (5.14)$$

Mit (5.6) finden wir das transversale elektrische und transversale magnetische Feld

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) &= i \sum_{\lambda, \mathbf{k}} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} (a_{\lambda}(\mathbf{k}) e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t} \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\lambda, \mathbf{x}) - k.k.) \\ \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) &= i \sum_{\lambda, \mathbf{k}} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} \hat{\mathbf{k}} \times (a_{\lambda}(\mathbf{k}) e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t} \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\lambda, \mathbf{x}) - k.k.).\end{aligned}\quad (5.15)$$

**Energie des Strahlungsfeldes:** Um die Energie des Strahlungsfeldes zu berechnen benutzen wir die Orthogonalitätsrelationen (5.13) und finden

$$E = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) = \sum_{\lambda, \mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} a_{\lambda}^*(\mathbf{k}) a_{\lambda}(\mathbf{k}). \quad (5.16)$$

Setzen wir noch

$$q_{\lambda, \mathbf{k}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} (a_{\lambda}(\mathbf{k}) e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t} + a_{\lambda}^*(\mathbf{k}) e^{i\omega_{\mathbf{k}} t}) \quad (5.17)$$

$$p_{\lambda, \mathbf{k}}(t) = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2}} (a_{\lambda}(\mathbf{k}) e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t} - a_{\lambda}^*(\mathbf{k}) e^{i\omega_{\mathbf{k}} t}) \quad (5.18)$$

dann finden wir für die Energie den einfachen Ausdruck

$$E = H(q, p) = \sum_{\lambda, \mathbf{k}} \frac{1}{2} (p_{\lambda, \mathbf{k}}^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2 q_{\lambda, \mathbf{k}}^2). \quad (5.19)$$

Als Konstante der Bewegung ist die Hamilton-Funktion  $H$  zeitunabhängig.

Die  $\{q, p\}$  sind *kanonisch konjugierte Variablen*, denn es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial q_{\lambda, \mathbf{k}}} &= \omega_{\mathbf{k}}^2 q_{\lambda, \mathbf{k}} \stackrel{(5.18)}{=} -\dot{p}_{\lambda, \mathbf{k}} \\ \frac{\partial H}{\partial p_{\lambda, \mathbf{k}}} &= p_{\lambda, \mathbf{k}} \stackrel{(5.18)}{=} \dot{q}_{\lambda, \mathbf{k}}.\end{aligned}\quad (5.20)$$

Die Hamiltonfunktion (5.19) beschreibt unendlich viele ungekoppelte harmonische Oszillatoren, zwei pro Wellenzahlvektor  $\mathbf{k}$ . Damit haben wir die Maxwellsche Theorie in eine Form gebracht in der wir die Regeln der kanonische Quantisierung anwenden können.

## 5.2 Quantisierung des Strahlungsfeldes

Nachdem es uns gelungen ist, das Strahlungsfeld als Anzahl von ungekoppelten Oszillatoren darzustellen, behandeln wir diese nach den Regeln der Quantenmechanik. Wir interpretieren die  $\{q_{\lambda, \mathbf{k}}, p_{\lambda, \mathbf{k}}\}$  als Operatoren in einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$ , welche die kanonischen

Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} [\hat{q}_{\lambda, \mathbf{k}}, \hat{p}_{\lambda', \mathbf{k}'}] &= i\delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}\delta_{\lambda, \lambda'} \\ [\hat{q}_{\lambda, \mathbf{k}}, \hat{q}_{\lambda', \mathbf{k}'}] &= [\hat{p}_{\lambda, \mathbf{k}}, \hat{p}_{\lambda', \mathbf{k}'}] = 0 \end{aligned} \quad (5.21)$$

erfüllen. Wir benutzen die gleichen Symbole wie in der klassischen Mechanik um die Notation einfach zu halten. Genauso wie bei der Behandlung des harmonischen Oszillators ist es nun bequem, die dimensionslosen *Ab- und Aufsteigeoperatoren* (Leiteroperatoren, Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren) einzuführen,

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\lambda}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} (\omega_{\mathbf{k}}\hat{q}_{\lambda, \mathbf{k}} + i\hat{p}_{\lambda, \mathbf{k}}) \\ \hat{a}_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} (\omega_{\mathbf{k}}\hat{q}_{\lambda, \mathbf{k}} - i\hat{p}_{\lambda, \mathbf{k}}), \end{aligned} \quad (5.22)$$

welche den Vertauschungsrelationen

$$[\hat{a}_{\lambda}(\mathbf{k}), \hat{a}_{\lambda'}^{\dagger}(\mathbf{k}')] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{\lambda\lambda'} \quad \text{und} \quad [\hat{a}_{\lambda}(\mathbf{k}), \hat{a}_{\lambda'}(\mathbf{k}')] = [\hat{a}_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k}), \hat{a}_{\lambda'}^{\dagger}(\mathbf{k}')] = 0 \quad (5.23)$$

gehoren. Die Relationen zwischen den Operatoren in (5.22) sind identisch zu den Relationen zwischen den Entwicklungskoeffizienten in (5.18) und entsprechend finden wir für das quantisierte Vektorpotential in der Coulombbeichung die Entwicklung

$$\hat{A}(\mathbf{x}) = \sum_{\lambda, \mathbf{k}} \sqrt{\frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left( \hat{a}_{\lambda}(\mathbf{k})\mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\lambda, \mathbf{x}) + \hat{a}_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k})\mathbf{u}_{\mathbf{k}}^*(\lambda, \mathbf{x}) \right). \quad (5.24)$$

Es ist ein drei-komponentiges *operatorwertiges Feld* mit Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren als Entwicklungskoeffizienten. Im Heisenbergbild ist  $\hat{A}(\mathbf{x})$  zeitabhängig und im Schrödinger-Bild zeitunabhängig. Im Folgenden werden wir den Hut über den Operatoren weglassen um die Notation zu vereinfachen.

**Photonen:** Der Zustand, in welchem *alle* Oszillatoren im Grundzustand sind, identifizieren wir mit dem *Vakuum* und bezeichnen dieses wieder mit  $|0\rangle$ . Es wird von allen Absteigeoperatoren vernichtet,

$$a_{\lambda}(\mathbf{k})|0\rangle = 0, \quad \forall \lambda, \mathbf{k}. \quad (5.25)$$

Der normierte Fockzustand

$$|n_{\lambda_1, \mathbf{k}_1}, n_{\lambda_2, \mathbf{k}_2}, \dots, n_{\lambda_s, \mathbf{k}_s}\rangle = \prod_{i=1}^s \frac{1}{\sqrt{n_{\lambda_i \mathbf{k}_i}!}} (a_{\lambda_i}^{\dagger}(\mathbf{k}_i))^{n_{\lambda_i \mathbf{k}_i}} |0\rangle \quad (5.26)$$

erfüllt

$$N_{\lambda_i}(\mathbf{k}_i)|n_{\lambda_1, \mathbf{k}_1}, \dots, n_{\lambda_s, \mathbf{k}_s}\rangle = n_{\lambda_i \mathbf{k}_i}|n_{\lambda_1, \mathbf{k}_1}, \dots, n_{\lambda_s, \mathbf{k}_s}\rangle, \quad (5.27)$$

wobei  $N_{\lambda}(\mathbf{k}) = a_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k})a_{\lambda}(\mathbf{k})$  ist. Bei Quantisierung im unendlichen Raum sind Fockzustände nicht normierbar und aus ihnen gewonnene Wellenpakete können normiert werden. Dagegen sind die Fockzustände im endlichen Volumen normierbar.

Wir interpretieren (5.26) als Zustand, der  $n_{\lambda_1, \mathbf{k}_1}$  Photonen der Sorte  $(\lambda_1, \mathbf{k}_1)$ ,  $n_{\lambda_2, \mathbf{k}_2}$  Photonen der Sorte  $(\lambda_2, \mathbf{k}_2)$ , etc. beschreibt.  $N_\lambda(\mathbf{k})$  zählt dann die Anzahl Photonen der Sorte  $(\lambda, \mathbf{k})$ . Wir werden bald zeigen, dass  $\mathbf{k}_i$  die Impulse und  $\lambda_i$  die Polarisierungen der Photonen sind. Aus (4.24) folgt, dass  $a_\lambda^\dagger(\mathbf{k})$  ein Photon der Sorte  $(\lambda, \mathbf{k})$  erzeugt und  $a_\lambda(\mathbf{k})$  ein derartiges Photon vernichtet. Deshalb heißen sie auch *Erzeugungs-* und *Vernichtungsoperator*.

Die Eigenzustände (5.26) der Anzahloperatoren  $N_\lambda(\mathbf{k})$  für alle möglichen *endlichen* Sequenzen  $\lambda_1, \mathbf{k}_1, \lambda_2, \mathbf{k}_2, \dots, \lambda_s, \mathbf{k}_s$  bilden eine *orthonormierte* Basis im Hilbertraum der quantisierten Hohlraumstrahlung. Wir notieren noch, dass die Zustände (5.26) bei Permutationen der  $\lambda_1, \mathbf{k}_1, \lambda_2, \mathbf{k}_2, \dots, \lambda_s, \mathbf{k}_s$  symmetrisch sind, d.h. die Photonen genügen der *Bose-Einstein-Statistik*.

### 5.2.1 Energie, Impuls und Drehimpuls

Für den Hamilton-Operator des Strahlungsfeldes wählen wir den Ausdruck (5.19), worin wir die  $(q, p)$  Operatoren durch Auf- und Absteigeoperatoren ersetzen,

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \mathbf{k}} \omega_k \left( a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k}) + a_\lambda(\mathbf{k}) a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) \right) = \sum_{\lambda, \mathbf{k}} \omega_k \left( a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \right) \quad (5.28)$$

Der Term  $\frac{1}{2}\omega_k$  ist die uns gut bekannte *Nullpunktenergie* des harmonischen Oszillators. Die Summe aller Nullpunktenergien ist *divergent*. Im homogenen Raum ist die Energie sowieso nur bis auf eine additive Konstante bestimmt, und wir können sie einfach ignorieren. Für nichthomogene Systeme können Änderungen dieser divergenten Nullpunktenergie aber durchaus beobachtbar werden. Der Casimireffekt ist ein derartiger beobachtbarer Effekt der als Änderung der Vakuumenergie interpretiert werden kann. Würden wir beim korrespondenzmässigen Übergang vom klassischen Ausdruck (5.19) für die Energie zum Hamilton-Operator eine andere Operatorordnung wählen, dann würden wir im Allgemeinen eine andere Nullpunktenergie finden.

Vernachlässigen wir die Nullpunktenergie, dann ist

$$H = \sum_{\lambda, \mathbf{k}} \omega_k a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k}) = \sum_{\lambda, \mathbf{k}} \omega_k N_\lambda(\mathbf{k}). \quad (5.29)$$

Da die Vernichtungsoperatoren rechts stehen, gilt

$$H|0\rangle = 0. \quad (5.30)$$

und wegen (5.27)

$$|n_{\lambda_1, \mathbf{k}_1}, \dots, n_{\lambda_s, \mathbf{k}_s}\rangle = \left( \sum_{i=1}^s n_{\lambda_i, \mathbf{k}_i} \omega_{k_i} \right) |n_{\lambda_1, \mathbf{k}_1}, \dots, n_{\lambda_s, \mathbf{k}_s}\rangle. \quad (5.31)$$

Die Vertauschungrelationen

$$[H, a_\lambda^\dagger(\mathbf{k})] = \omega_k [N_\lambda(\mathbf{k}), a_\lambda^\dagger(\mathbf{k})] = \omega_k a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) \quad \text{und} \quad [H, a_\lambda(\mathbf{k})] = -\omega_k a_\lambda(\mathbf{k}) \quad (5.32)$$

machen nochmals deutlich, dass  $a_\lambda^\dagger(\mathbf{k})$  und  $a_\lambda(\mathbf{k})$  ein Quant mit Energie  $\omega_k$  erzeugen und vernichten. Sie zeigen auch, dass im Heisenbergbild die Operatoren dieselbe Zeitabhängigkeit haben wie die klassischen Größen,

$$a_\lambda(\mathbf{k})(t) = e^{-i\omega_k t} a_\lambda(\mathbf{k})(0) \quad \text{und} \quad a_\lambda^\dagger(\mathbf{k})(t) = e^{i\omega_k t} a_\lambda^\dagger(\mathbf{k})(0). \quad (5.33)$$

Zur Berechnung des Impulses und Drehimpulses von  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  braucht es die explizite Form der Feldoperatoren,

$$\mathbf{E} = \frac{i}{\sqrt{2}} \sum \sqrt{\omega_k} \left( a_\lambda(\mathbf{k}) \mathbf{u}_k(\lambda, \mathbf{x}) - a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) \mathbf{u}_k^*(\lambda, \mathbf{x}) \right) \quad (5.34)$$

$$\mathbf{B} = \frac{i}{\sqrt{2}} \sum \sqrt{\omega_k} \hat{\mathbf{k}} \times \left( a_\lambda(\mathbf{k}) \mathbf{u}_k(\lambda, \mathbf{x}) - a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) \mathbf{u}_k^*(\lambda, \mathbf{x}) \right). \quad (5.35)$$

Für den Impuls übernehmen wir den korrespondenzmässigen Ausdruck

$$\mathbf{P} = \int d\mathbf{x} \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (5.36)$$

Mit Hilfe der obigen Modenentwicklungen für die Feldoperatoren findet man

$$\mathbf{P} = \sum_{\lambda, \mathbf{k}} \mathbf{k} N_\lambda(\mathbf{k}). \quad (5.37)$$

Wie erwartet trägt der Vakuumzustand keinen Impuls,  $\mathbf{P}|0\rangle = 0$ . Beachte, dass hier kein divergenter Nullpunktsimpuls auftritt. Die Fockzustände haben den Impuls

$$\mathbf{P}|n_{\lambda_1, \mathbf{k}_1}, \dots, n_{\lambda_s, \mathbf{k}_s}\rangle = \left( \sum_{i=1}^s n_{\lambda_i, \mathbf{k}_i} \mathbf{k}_i \right) |n_{\lambda_1, \mathbf{k}_1}, \dots, n_{\lambda_s, \mathbf{k}_s}\rangle \quad (5.38)$$

Wir folgern, dass  $\mathbf{k}$  der *Impuls* und  $\omega_k$  die *Energie* eines Photons der Sorte  $(\lambda, \mathbf{k})$  ist, in Einklang mit der Einstein'schen Photonenhypothese.

**Polarisation:** Photonenzustände mit gleichem  $\mathbf{k}$  könne sich durch ihre Polarisation  $\lambda$  unterscheiden. Klassisch verstehen wir darunter die Schwingungsrichtung des elektrischen Feldes in der Ebene senkrecht zu  $\mathbf{k}$ . Nun kann man zeigen, dass die Komponente des Drehimpulses eines Photonenzustandes zu den Basisvektoren  $\epsilon_\pm(\mathbf{k})$  in Richtung  $\mathbf{k}$  gleich  $\pm 1$  ist. Man sagt, die *Helizität* des Photons sei  $\pm 1$ .

Um dies zu beweisen setzt man die Modenentwicklung für das quantisierte Strahlungsfeld in den korrespondenzmässigen Ausdruck für den Drehimpuls-Operator

$$\mathbf{J} = \int d\mathbf{x} \mathbf{x} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (5.39)$$

ein. Man findet nun, dass  $|\mathbf{k}, \pm\rangle$  Eigenzustände der Komponente des Drehimpulses in Ausbreitungsrichtung sind,

$$\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{k}} |\mathbf{k}, \pm\rangle = \pm |\mathbf{k}, \pm\rangle. \quad (5.40)$$

## 5.3 Kausalität und Unbestimmtheit

Die kanonische Quantisierung der klassischen Elektrodynamik ordnen *jedem* Raumzeitpunkt Observablen, zum Beispiel die Feldoperatoren  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  oder die Energiedichte zu. Derartige Operatoren heißen *lokale Observable*. Nicht alle Observablen vertauschen und es existieren Unbestimmtheitsrelationen, die untere Schranken an die Genauigkeit setzen, mit der ein bestimmtes Paar von lokalen Observablen im gleichen Zustand gemessen werden kann.

In der lorentzinvarianten Maxwell-Theorie sollten sich zwei Messungen an raumartig getrennten Raumzeit-Punkten<sup>1</sup>  $x = (t, \mathbf{x})$  und  $x' = (t', \mathbf{x}')$  gegenseitig nicht beeinflussen. Deshalb sollte eine lokale Observable bei  $x$  mit einer Observablen bei  $x'$  vertauschen. Wir fordern diese *Kausalitätsbedingung* für alle relativistischen Quantenfeldtheorien und nicht nur für die quantisierte Elektrodynamik. Mehrere wichtige Eigenschaften von quantisierten Feldtheorien folgen aus dieser natürlichen Forderung. Die erstaunlichste ist vielleicht das Theorem über die Beziehung zwischen Spin und Statistik, die im Rahmen einer nicht-relativistischen Theorie nicht beweisbar ist. In einer relativistischen QFT ist die Beziehung ein Theorem. Eine anderer wichtige Konsequenz der Kausalitätsbedingung sind Aussagen über Antiteilchen. Zum Beispiel sind Masse und Lebensdauer eines Teilchens und seines Antiteilchens gleich.

## 5.4 Kommutatoren der Feldoperatoren

Alle Kommutatoren zwischen lokalen Observablen in der Elektrodynamik (ohne Materie) folgen aus dem Vertauschungsregeln für das elektromagnetische Potential. Die Vertauschungsregeln für Komponenten des Vektorpotentials (5.24) an verschiedenen Raumzeitpunkten folgen aus (5.23,5.10) und (5.33)

$$[A_i(x), A_j(y)] = \frac{1}{V} \sum_{\lambda, \mathbf{k}} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} \left( e^{-ik(x-y)} \varepsilon_i(\lambda, \mathbf{k}) \varepsilon_j^*(\lambda, \mathbf{k}) - k \cdot k \right). \quad (5.41)$$

Der Tensor  $\sum_{\lambda} \varepsilon_{\lambda}(\mathbf{k}) \varepsilon_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k})$  auf der rechten Seite hängt nur von  $\mathbf{k}$  ab und projiziert auf die Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung, also ist

$$\sum_{\lambda} \varepsilon_i(\lambda, \mathbf{k}) \varepsilon_j^*(\lambda, \mathbf{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2}. \quad (5.42)$$

Also finden wir folgende Kommutatoren der Feldoperatoren zu verschiedenen Zeiten,

$$[A_i(x), A_j(y)] = i \left( \delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\Delta} \right) \Delta_0(x-y), \quad (5.43)$$

<sup>1</sup>Besser wäre es, von Messungen in einer offenen Umgebung zu sprechen.

worin  $\Delta_0$  die Pauli-Jordan Funktion für masselose skalare Teilchen im Kubus mit periodischen Randbedingungen (auf dem 3-Torus) ist,

$$\Delta_0(x) = -\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{\omega_{\mathbf{k}}} \sin \omega_{\mathbf{k}} t. \quad (5.44)$$

Der auf die Pauli-Jordan Funktion wirkende Operator in (5.43) ist die Ortsraumdarstellung des Projektors  $t_{ij}$  in (5.42). Wegen der periodischen Randbedingungen ist der Raum ein translationsinvarianter 3-Torus und deshalb hängt der Kommutator nur von  $x - y$  ab, ähnlich wie im unendlichen Minkowski-Raum. Als Kommutator zweier hermitescher Feldoperatoren ist die rechte Seite ein antihermitescher Operator, in unserem Fall eine imaginäre Funktion, multipliziert mit dem Einheitsoperator. Wegen  $\omega = |\mathbf{k}|$ , der Antisymmetrie  $\Delta(-t, \mathbf{x}) = -\Delta(t, \mathbf{x})$  und der Vollständigkeit der  $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$  gelten

$$\square \Delta_0(x) = 0, \quad \Delta_0(0, \mathbf{x}) = 0, \quad \partial_t \Delta_0(t, \mathbf{x})|_{t=0} = -\delta^3(\mathbf{x}). \quad (5.45)$$

Der Übergang vom Kasten mit Volumen  $L^3$  zum Euklidischen Raum geschieht durch folgende Ersetzungen,

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \longrightarrow \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \quad \text{und} \quad \frac{V}{(2\pi)^3} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \longrightarrow \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (5.46)$$

Insbesondere strebt  $\Delta_0$  in (5.44) gegen die Pauli-Jordan Propagatorfunktion des masselosen Skalarfeldes im Minkowskiraum,

$$\Delta_0(t, \mathbf{x}) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{k}}{\omega_{\mathbf{k}}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \sin \omega_{\mathbf{k}} t, \quad \omega_{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}|. \quad (5.47)$$

Die explizite Berechnung des Integrals wird eine Übungsaufgabe sein. Man findet

$$\Delta_0(t, r) = -\frac{1}{2\pi} \epsilon(t) \delta(t^2 - r^2) = \frac{1}{4\pi r} (\delta(t+r) - \delta(t-r)). \quad (5.48)$$

Diese Funktion extrahiert man auch aus der Pauli-Jordan Funktion für massive Felder (3.76) indem man den Grenzprozess  $m \rightarrow 0$  durchführt. Sie hängt wegen der Isotropie des Minkowskiraums nur von der Zeit und dem räumlichen Abstand vom Ursprung ab und löst die Wellengleichung

$$\square \Delta_0(t, r) = \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r \right) \Delta_0(t, r) = 0. \quad (5.49)$$

Wie erwartet für Lichtausbreitung hat sie ihren Träger auf dem Vorwärts- und Rückwärtslichtkegel.

Mit (5.43) finden wir für den Kommutator zwischen dem Potential und elektrischen Feld  $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A}$  zu gleichen Zeiten

$$[A_i(t, \mathbf{x}), E_j(t, \mathbf{y})] = -i \left( \delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\Delta} \right) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (5.50)$$

Wie erwartet ist der Kommutator unabhängig von der Zeitschicht. Er ist auch verträglich mit der Coulombbeziehung und dem Gaußschen Gesetz  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ .

Nun berechnen wir die Kommutatoren der elektromagnetischen Felder zu *verschiedenen Zeiten*. Für die Komponenten des elektrischen Feldes finden wir aufgrund der Translationsinvarianz den Ausdruck

$$[E_i(x), E_j(0)] = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} [A_i(x), A_j(0)]. \quad (5.51)$$

Für den Propagator der Potentiale setzt man das Resultat (5.43) ein und benutzt die Eigenschaften (5.45) der dabei auftretenden Propagatorfunktion. Ähnlich findet man auch die Kommutatoren der Komponenten des quantisierten Magnetfeldes  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  und den Komponenten des elektrischen und magnetischen Feldes:

$$\begin{aligned} [E_i(x), E_j(0)] &= -i \left( \delta_{ij} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \right) \Delta_0(x) \\ [B_i(x), B_j(0)] &= -i \left( \delta_{ij} \Delta - \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \right) \Delta_0(x) \\ [E_i(x), B_j(0)] &= i \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x^k} \Delta_0(x). \end{aligned} \quad (5.52)$$

Da  $D$  die Wellengleichung erfüllt, haben die Komponenten des elektrischen und magnetischen Feldes dieselben Kommutatoren,

$$[E_i(x), E_j(0)] = [B_i(x), B_j(0)]. \quad (5.53)$$

Die Kommutationsregeln für die Komponenten des Feldstärketensors lauten

$$[F_{\mu\nu}(x), F_{\alpha\beta}(0)] = i (\eta_{\mu\alpha} \partial_\nu \partial_\beta + \eta_{\nu\beta} \partial_\mu \partial_\alpha - \eta_{\mu\beta} \partial_\nu \partial_\alpha - \eta_{\nu\alpha} \partial_\mu \partial_\beta) \Delta_0(x). \quad (5.54)$$

Diese Vertauschungsregeln für die eichinvarianten Felder sind kovariant, im Gegensatz zu den Vertauschungsregeln für die Komponenten des Potentials in der Coulombbeziehung.

Da  $\Delta_0$  seinen Träger auf dem Lichtkegel hat, verschwinden die Kommutatoren zwischen elektromagnetischen Feldern an zwei Raumzeitpunkten  $x$  und  $y$ , wenn diese nicht durch einen Lichtstrahl verbunden werden können, d.h. wenn ihr Differenzvektor  $x - y$  nicht lichtartig ist, z.B.

$$(x, x) \neq 0 \implies [F_{\mu\nu}(x), F_{\alpha\beta}(0)] = 0. \quad (5.55)$$

Das Kausalitätsprinzip für das freie elektromagnetische Feld ist eine Konsequenz der verschwindenden Ruhemasse des Photons oder der Tatsache, dass die Lösungen der Maxwellgleichungen mit Lichtgeschwindigkeit propagieren. Für Theorien, die massive Teilchen beschreiben, zum Beispiel das massive  $Z^0$ -Bosonen der elektroschwachen Wechselwirkung, können die Propagatoren für zeitartig getrennte Punktepaare ungleich Null sein.



### 5.4.1 Unbestimmtheitsrelationen

Von besonderem Interesse für die Messungen an einem Quantensystem sind die Kommutatoren von Observablen *zu einer festen Zeit*. Ein vollständiger Satz von kommutierenden Observablen werden zur Präparation (Festlegung) eines reinen Zustandes benötigt. Da  $\Delta_0(t, r)$  eine ungerade Funktion der Zeit ist folgt sofort

$$[E_i(\mathbf{x}), E_j(\mathbf{y})] = [B_i(\mathbf{x}), B_j(\mathbf{y})] = 0. \quad (5.56)$$

Im Kommutator von elektrischem und magnetischem Feld erscheint nur die erste Zeitableitung und mit (5.45) folgt

$$[E_i(\mathbf{x}), B_j(\mathbf{y})] = -i\epsilon_{ijk}\partial_k\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (5.57)$$

Zu einer festen Zeit können wir entweder das elektrische Feld oder das magnetische Feld im ganzen Raum scharf vorgeben, nicht aber beide. Es sind zwei komplementäre Feldvariablen, ähnlich dem Ort und Impuls eines Teilchens.

Die Unbestimmtheitsrelationen folgen aus der allgemeinen Beziehung zwischen dem Produkt von Unschärfen zweier Observablen und ihrem Kommutator: Für zwei Observablen  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  und irgendeinen Zustand gilt

$$\Delta\mathcal{A}_1\Delta\mathcal{A}_2 \geq \frac{1}{2}|\langle[\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2]\rangle|. \quad (5.58)$$

Wir betrachten den über ein kleines *Raumzeitgebiet*  $\mathcal{O}$  gemittelten Feldoperator

$$\mathbf{E}(\mathcal{O}) = \frac{1}{|\mathcal{O}|} \int_{\mathcal{O}} d^4x \mathbf{E}(x). \quad (5.59)$$

Dann gelten wegen der ersten Beziehung in (5.52) die Unschärferelationen

$$\Delta E_i(\mathcal{O}_1)\Delta E_j(\mathcal{O}_2) \geq \left| \int_{\mathcal{O}_1} \frac{d^4x}{|\mathcal{O}_1|} \int_{\mathcal{O}_2} \frac{d^4y}{|\mathcal{O}_2|} \left( \delta_{ij} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \right) \Delta_0(x - y) \right|. \quad (5.60)$$

Ähnlich wie für Impuls und Ort finden wir eine *zustandsunabhängige* untere Schranke für das Produkt der Unschärfen, da der Kommutator zwischen Komponenten des elektrischen Feldoperators ein Vielfaches von  $\mathbb{1}$  ist. Sind die beiden Gebiete raumartig oder zeitartig getrennt, dann verschwindet das Produkt der Unschärfen.

## 5.5 Casimir Effekt

Die Quantenfluktuationen des Strahlungsfeldes haben zur Folge, dass zwischen zwei ungeladenen Platten (metallisch oder dielektrisch) im Vakuum ein Kraft wirkt. Die Fluktuationen werden durch die Platten verändert und dies führt zu einer Änderung der Nullpunktsenergie

des Strahlungsfeldes. Dieser Vakuumeffekt wurde bereits 1948 von CASIMIR vorausgesagt, wurde zwischenzeitlich gemessen und trägt seinen Namen.

Für große Platten kann die Casimirkraft pro Flächenelement bis auf einen Faktor bereits über eine Dimensionsbetrachtung gewonnen werden. Sie hängt nur von  $\hbar$ ,  $c$  und dem Plattenabstand  $d$  ab. Da  $e^2/\hbar c$  dimensionslos ist, hat  $\hbar c/d^2$  die Dimension einer Kraft und deshalb ist der gesuchte Ausdruck für die Kraft pro Fläche  $\propto \hbar c/d^4$ . Im Folgenden wird der Proportionalitätsfaktor bestimmt. Wir benutzen dabei wieder natürliche Einheiten.

Wir betrachten den einfachsten Fall von zwei „unendlich“ großen planparallelen und ideal leitenden Metallplatten. Das elektrische und magnetische Feld müssen die aus der Elektro-

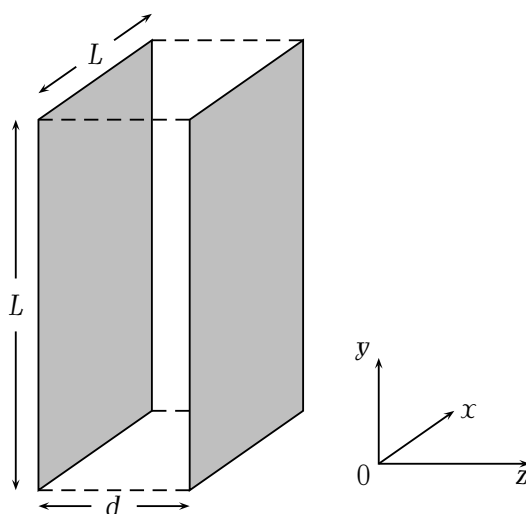


Abbildung 5.2: Casimireffekt zwischen zwei ideal leitenden Platten

dynamik bekannten Randbedingungen erfüllen:  $\mathbf{E}$  ist senkrecht und  $\mathbf{B}$  tangential zu den Platten.

Wir schließen das Strahlungsfeld in einen Kasten mit ideal leitenden Wänden bei  $z = 0$  und  $z = d$  ein und nehmen an, dass  $L \gg d$  sei. In die  $x$  und  $y$  Richtung wählen wir periodische Randbedingungen. Mit den Bezeichnungen in Abbildung 5.2 sind die möglichen Werte der Wellenzahlvektoren

$$\mathbf{k} = \left( \frac{2\pi m_x}{L}, \frac{2\pi m_y}{L}, \frac{\pi n}{d} \right), \quad m_x, m_y \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (5.61)$$

mit zugehöriger Kreisfrequenz  $\omega_k = |\mathbf{k}|$ . Für  $n = 0$  gibt es nur eine (TE) Mode<sup>2</sup>, während für  $n \geq 1$  jeweils zwei Polarisationen existieren.

<sup>2</sup>Jackson, §8.4

### 5.5.1 Regularisierung der Nullpunktenergie

Die Energie des Strahlungsfeldes ist gleich der *divergenten* Summe der Nullpunktenergien  $\omega_k/2$ . Aber wir sollten nicht vergessen, dass für hinreichend hohe Frequenzen selbst metallische Platten durchsichtig sind. Die entsprechenden Moden liefern daher keinen Beitrag zur Casimirkraft. Wir müssen die Nullpunktenergie *regularisieren*

$$E_{\text{reg}}(d) = \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \mathbf{k}} \omega_k \chi(a\omega_k), \quad (5.62)$$

mit einer am Ursprung regulären Abschneidefunktion  $\chi$  mit  $\chi(0) = 1$  und einer typischen atomaren Skala  $a$ . Die Funktion strebe für große Argumente hinreichend schnell gegen Null, so dass  $E_{\text{reg}}$  endlich bleibt. Für große Platten können wir die Summe über  $m_x, m_y$  durch ein zweifaches Integral ersetzen,

$$\sum_{p,q} \cdots \longrightarrow \frac{A}{(2\pi)^2} \int dk_x dk_y \cdots, \quad (5.63)$$

wobei  $A$  den Flächeninhalt einer Platte bezeichnet. Damit ergibt sich für die regularisierte Nullpunktenergie pro Flächeneinheit

$$\frac{E_{\text{reg}}(d)}{A} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dk_x dk_y \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \omega_n(\rho) \chi(a\omega_n(\rho)) \quad (5.64)$$

mit  $\varepsilon_0 = 1/2$  und  $\varepsilon_n = 1$  für  $n \geq 1$ . Die Nullpunktenergien  $\omega_n(\rho)$  hängen von der Quantenzahl  $n$ , der Länge  $\rho$  von  $\mathbf{k}_{\perp}$  und vom Plattenabstand  $d$  ab,

$$\omega_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{d^2} + \rho^2}, \quad \rho^2 = \mathbf{k}_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2. \quad (5.65)$$

Da der Integrand nur vom Betrag  $\rho$  des Vektors  $\mathbf{k}_{\perp} = (k_x, k_y)$  abhängt, folgt

$$\int dk_x dk_y f(\omega_n(\rho)) = 2\pi \int_0^{\infty} d\rho \rho f(\omega_n(\rho)) = 2\pi \int_{\pi n/d}^{\infty} d\omega_n \omega_n f(\omega_n),$$

und entsprechend finden wir

$$\frac{E_{\text{reg}}}{A} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \int_{n\pi/d}^{\infty} du u^2 \chi(au). \quad (5.66)$$

Die Abhängigkeit vom Plattenabstand rührt nur von der  $d$ -Abhängigkeit der unteren Integrationsgrenzen. Deshalb fällt im Ausdruck für die Kraft das Integral weg,

$$-\frac{1}{A} \frac{\partial E_{\text{reg}}}{\partial d} = -\frac{\pi^2}{2d^4} \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \chi\left(\frac{\pi an}{d}\right). \quad (5.67)$$

Man beachte, dass die innere Ableitung einen Faktor  $\pi n/d^2$  beiträgt. An dieser Stelle wenden wir die *Euler-MacLaurin-Formel*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \int_0^{\infty} dx f(x) + \frac{1}{2}f(0) - \frac{1}{12}f'(0) + \frac{1}{6!}f'''(0) + O\left(f^{(5)}(0)\right). \quad (5.68)$$

auf die Funktion  $f(x) = x^3\chi(\pi ax/d)$  an. Für diese Funktion haben wir

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = 0, \quad f'''(0) = 6 \quad \text{und} \quad f^{(p+3)} = O\left(\frac{a^p}{d^p}\right)$$

und deshalb ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \chi\left(\frac{\pi an}{d}\right) = \int_0^{\infty} dx x^3 \chi\left(\frac{\pi ax}{d}\right) + \frac{1}{5!} + O\left(\frac{a^2}{d^2}\right). \quad (5.69)$$

Das Integral ist proportional zur vierten Potenz des Plattenabstandes,

$$\int_0^{\infty} dx x^3 \chi\left(\frac{\pi ax}{d}\right) = \left(\frac{d}{a}\right)^4 C, \quad C = \frac{1}{\pi^4} \int_0^{\infty} dy y^3 \chi(y).$$

und deshalb ist die (regularisierte) Kraft pro Flächeneinheit

$$\frac{1}{A} \frac{\partial E_{\text{reg}}}{\partial d} = -\frac{\pi^2}{240} \frac{1}{d^4} (1 + O(a^2/d^2)) - \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{a^4} \int_0^{\infty} dy y^3 \chi(y) \quad (5.70)$$

Für sehr gute Leiter ist der Term der Ordnung  $a^2/d^2$  sehr klein und darf vernachlässigt werden. Der letzte Term hängt gar nicht vom Plattenabstand ab und ist auch vorhanden wenn die Platten beliebig weit getrennt sind. Er divergiert, wenn wir den Regulator  $a$  entfernen,  $a \rightarrow 0$ . Dies ist kein wirkliches Problem, da wir auch noch den Beitrag von der Nullpunktsenergie außerhalb der beiden Platten berücksichtigen müssen. Dieser Beitrag hebt den divergenten Term weg und wir finden schlussendlich eine *anziehende Casimir-Kraft* pro Flächeneinheit

$$\frac{F_{\text{Cas}}}{A} = -\frac{\pi^2}{240} \frac{\hbar c}{d^4} \quad \text{bzw.} \quad \frac{F_{\text{Cas}}[\text{dyn}]}{A[\text{cm}^2]} = 0.013 \frac{1}{(d[\mu\text{m}])^4}. \quad (5.71)$$

Die zugehörige Casimir-Energie ist, bis auf eine irrelevante Konstante,

$$\frac{E_{\text{Cas}}}{A} = -\frac{\pi^2}{720} \frac{\hbar c}{d^3}. \quad (5.72)$$

Das Endergebnis hängt, nachdem wir den Beitrag des Außenraumes subtrahierten, nicht mehr von der Abschneidefunktion  $\chi$  ab. Für jede glatte und genügend schnell abfallende Abschneidefunktion mit  $\chi(0) = 1$  erhält man dieselbe Casimir-Kraft.

## 5.5.2 Experimentelle Situation

Nach dem ersten Experiment von SPARNAAY im Jahre 1959 gab es verschiedene Versuche mit Dielektrika [29], welche alle in Einklang mit Lifschitzschen Theorie des Casimireffektes für Dielektrika [30] waren. In der Zwischenzeit gelang es, den Effekt auch für metallbeschichtete Flächen nachzuweisen. LAMOREAUX bestimmte 1997 mit einem Torsionspendel die Casimirkraft zwischen einer goldbeschichteten Kugel und einer Platte. Die Kraft wurde für Abstände von 0.6 bis 6  $\mu\text{m}$  gemessen. Für diese geometrische Anordnung variiert die Kraft wie  $1/d^3$ , und diese Version des Effektes wurde mit 5-10%-Genauigkeit bestätigt. Ein Jahr später benutzte MOHIDEEN und Mitarbeiter ein Kraftmikroskop (AFM) um die Kraft zwischen einer aluminiumbeschichteten Kugel und einer Platte zu messen [32]. Die Genauigkeit war etwa eine Größenordnung besser als bei LAMOREAUX, also etwa 1%. Die mit dem AFM gemessenen Kräfte waren für eine effektive Fläche von etwa  $10 \mu\text{m}^2$  im Bereich von pN. Beim Vergleich von Theorie und Experiment muss man endliche Temperatureffekte berücksichtigen. Tut man dies, so erhält man die gestrichelte Kurve in der Figur 5.3, welche auch die Daten der Arbeit [32] enthält. In der ausgezogenen Kurve wurden auch noch Korrekturen aufgrund der Oberflächenrauigkeit berücksichtigt. Danach ergibt sich eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment. Für weiter Details verweise ich auf den ausführlichen Review von BORDAG, MOHIDEEN und MOSTEPANENKO [33].

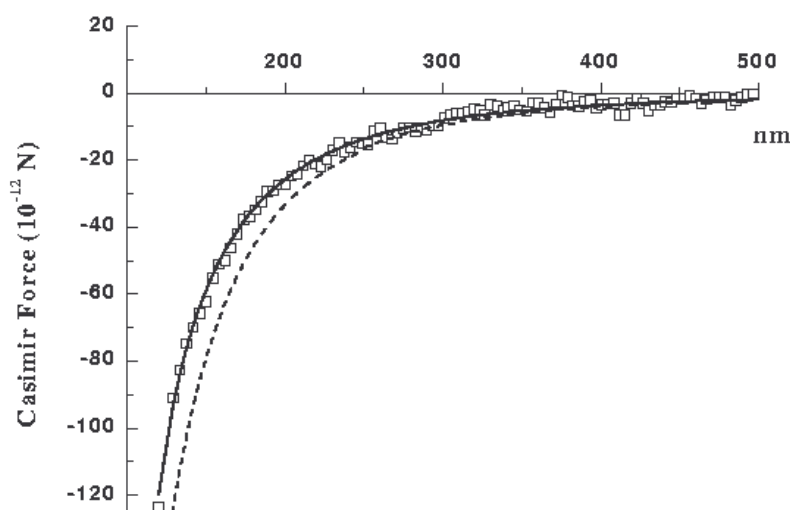


Abbildung 5.3: Vergleich von Theorie und Experiment für die Casimir Kraft zwischen einer Platte und einer mit Aluminium beschichteten Kugel als Funktion des Abstands. Die ausgezogene Kurve ist die theoretische Vorhersage unter Berücksichtigung von nicht-idealen Bedingungen (Leitfähigkeit, Oberflächenrauigkeit). Die experimentellen Daten sind aus der Arbeit [32].

## 5.6 Aufgaben

### Aufgabe 1: Maxwellgleichungen als Euler-Lagrange Gleichungen

Die Maxwellgleichungen folgen aus dem Variationsprinzip für die lorentz- und eichinvariante Wirkung

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Dabei sind die Komponenten von  $A_\mu$  die dynamischen Variablen. Beweise diese Behauptung.

### Aufgabe 2: Kommutatorfunktion für das masselose Skalarfeld

In der Vorlesung wurde das folgende Resultat benutzt

$$\Delta_0(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{k}}{\omega_k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \sin \omega_k t = \frac{1}{4\pi r} (\delta(ct + r) - \delta(ct - r)).$$

Beweisen Sie diese Identität.

Hinweis: Man führe im  $\mathbf{k}$ -Raum Kugelkoordinaten ( $|\mathbf{k}| = \omega_k, \theta, \varphi$ ) ein und beweise zuerst

$$\Delta_0(x) - \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\infty d\omega_k \sin(\omega_k t) \sin(\omega_k r) \equiv \Delta_0(t, r).$$

Der Integrand ist eine gerade Funktion und das Integral ist die Hälfte des Integrals über die reelle Achse. Nun erhält man die Summe von  $\delta$ -Distributionen.

### Aufgabe 3: Antivertauschungs-Relationen

Die Interpretation der Operatoren  $a_i, a_i^\dagger, N_i = a_i^\dagger a_i$  (mit  $i = 1, \dots$  für verschiedene Teilchensorten) als Vernichter, Erzeuger bzw. Anzahloperatoren folgt aus den Relationen

$$[N_i, a_j] = -\delta_{ij} a_j, \quad [N_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij} a_j^\dagger$$

und der Existenz eines Vakuumzustands  $|0\rangle$  mit  $a_i|0\rangle = 0$  für alle  $i$ .

1. Beweisen Sie die Operatoridentität  $[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B$ .
2. Betrachten Sie Operatoren  $a_i, a_i^\dagger$ , die den Antivertauschungsregeln

$$\{a_i, a_j^\dagger\} = \delta_{ij}, \quad \text{alle anderen } \{.,.\} = 0$$

genügen. Zeigen Sie, dass diese Operatoren die obigen Gleichungen erfüllen.

### Aufgabe 4: Helicity

The angular momentum of the radiation field is given by

$$\mathbf{J} = \int d^3x \mathbf{x} \wedge (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}).$$

Define the corresponding operator. Then, consider the component of  $\mathbf{J}$  in the direction of propagation, i.e., the projection

$$\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{k}} \quad ,$$

where  $\hat{\mathbf{k}}$  denotes the normalized vector. For a state

$$|\mathbf{k}, \epsilon\rangle = (\alpha a_{\mathbf{k},1}^\dagger + \beta a_{\mathbf{k},2}^\dagger)|0\rangle \quad ,$$

determine the coefficients  $\alpha$  and  $\beta$ , such that the (normalized) state is an eigenstate of  $\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{k}}$ . (Here, the expansion of the field in terms of momentum modes and the operators  $a_{\mathbf{k},1/2}^\dagger$  are defined as in the lecture).





## 6 Wechselwirkende Skalarfelder

Bisher untersuchten wir Quantenfeldtheorien mit quadratischen Lagrangedichten, deren Feldoperatoren lineare Feldgleichungen gehorchen. Derartige Theorien beschreiben nicht-wechselwirkende Teilchen. Im vorliegenden Kapitel untersuchen wir nun erstmalig wechselwirkende Quantenfelder. Diese erfüllen nicht-lineare Feldgleichungen, deren Lösungen (dies sind keine ebenen Wellen mehr) kein Superpositionsprinzip erfüllen.

Die Kausalität sollte aber weiterhin gelten und dies legt nahe, zur Lagrangedichte der freien Theorie nur Produkte des wechselwirkenden Feldes am gleichen Raumzeitpunkt zu addieren. Die Form der zugelassenen Wechselwirkungsterme wird durch Symmetrieforderungen eingeschränkt. Zum Beispiel sollte der Wirkung invariant unter Poincare-Transformationen sein. Beschreibt man ein physikalisches System mit bekannten globalen oder lokalen inneren Symmetrien, so sollten die Wechselwirkungsterme diese Symmetrien respektieren. Der einfachste Wechselwirkungsterm für ein Skalarfeld hat die Form

$$V[\phi] = \int dx \mathcal{V}(\phi), \quad (6.1)$$

wobei wir vorerst annehmen, dass  $\mathcal{V}$  nur vom Feld, und nicht von den Ableitungen des Feldes, abhängt. Speziell betrachten wir die nichtlineare  $\phi^4$ -Theorie mit Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \mathcal{V}, \quad \mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2), \quad \mathcal{V}(\phi) = \frac{\lambda}{4!} \phi^4. \quad (6.2)$$

Sie ist eine der einfachsten wechselwirkenden Theorien. Wir untersuchen sie aber nicht ihrer Einfachheit wegen, sondern auch deshalb, weil sie als Untersektor des Weinberg-Salam-Modells der elektroschwachen Wechselwirkung auftritt.

In natürlichen Einheiten ist eine Wirkung  $S = \int d^d x \mathcal{L}$  dimensionslos. Deshalb hat in  $d$  Raumzeit-Dimensionen die Lagrangedichte  $\mathcal{L}$  die Massendimension  $[\mathcal{L}] = d$ . Entsprechend haben das skalare Feld und die Kopplungskonstanten folgende Massendimensionen:

$$[\phi] = \frac{d}{2} - 1, \quad [m] = 1, \quad [\lambda] = 4 - d. \quad (6.3)$$

Speziell in 4 Dimensionen ist  $\lambda$  eine dimensionslose Kopplungskonstante. In  $d$  Dimensionen ist die Kopplungskonstante  $\lambda$  in

$$\lambda \phi^{d_c}, \quad d_c = \frac{2d}{d-2}$$

dimensionslos. In 3 Dimensionen ist der kritische Exponent  $d_c = 6$ .

## 6.1 Eigenschaften einer wechselwirkenden Theorie

Wir wollen uns zuerst überlegen, was wir von einer relativistischen QFT erwarten. In einem axiomatischen Zugang werden allgemeingültige Eigenschaften und Strukturen postuliert und daraus möglichst detaillierte Folgerungen extrahiert [35]. Es sind Eigenschaften wie die Existenz einer Hilbertraumstruktur, Kausalität und Unitarität, relativistische Kovarianz und die Existenz eines Zustands minimaler Energie. In der *Axiomatischen Quantenfeldtheorie* wird die Frage offen gelassen, ob die postulierten Prinzipien verträglich mit der Existenz einer nichttrivialen Streumatrix sind – dies ist die Aufgabe der *Konstruktiven Quantenfeldtheorie* [36].

Im Folgenden werden wir grundlegende Axiome einer relativistischen Quantenfeldtheorie darlegen. In jeder Naturwissenschaft sollte man aber gewillt sein, derartige Axiome zu hinterfragen und gegebenenfalls zu verbessern. Annahmen, zum Beispiel die Annahme dass die Naturgesetze spiegelsymmetrisch seien, musste aufgrund von experimentelle Befunden revidiert werden<sup>1</sup>. In einer übergeordneten Theorie haben sie unter Umständen nur eine approximative oder beschränkte Gültigkeit. Auch sollte man eher technische Voraussetzungen (zum Beispiel Annahmen über Definitionsbereiche) von physikalischen Strukturen (zum Beispiel Homogenität und Isotropie des Minkowskiraums) unterscheiden. Die letzteren gründen auf vielfältige Erfahrungen, Beobachtungen und Experimenten. Die axiomatischen Beschreibungen einer QFT basiert auf dem Heisenberg-Bild der Quantenmechanik, in dem die Zustände als zeitunabhängig betrachtet werden, während die Operatoren zeitabhängig sind. Im Heisenberg-Bild sind Quantenfelder also orts- und zeitabhängige Operatoren.

### 6.1.1 Axiome von Gårding und Wightman

Die nun vorgestellten Axiome stammen von GÅRDING und WIGHTMAN. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf ein reelles Skalarfeld und folgen dabei [37].

1. **Hilbert Raum:** Physikalische Zustände sind Strahlen in einem separablen Hilbertraum  $\mathcal{H}$ .  
*Bemerkung:* Für das freie Feld wählten wir den Fockraum über dem Einteilchen-Hilbertraum  $\mathcal{H}_1$ .
2. **Feldoperator:** Auf  $\mathcal{H}$  operiert ein Feldoperator  $\phi$ , der eine operatorwertige temperierte Distribution ist. Die (unbeschränkten) Operatoren  $\phi(f)$  sind auf einem dichten und von  $f$  unabhängigen Bereich  $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$  definiert und für beliebige  $\psi_1, \psi_2$  aus  $\mathcal{D}$  gilt

$$\langle \psi_1, \phi(f)\psi_2 \rangle = \langle \phi(f^*)\psi_1, \psi_2 \rangle. \quad (6.4)$$

*Bemerkung* Eine temperierte Distribution ist ein stetiges und lineares Funktional auf dem Schwartz-Raum  $\mathcal{S}$ .

---

<sup>1</sup>Parität und Ladungskonjugation sind in der schwachen Wechselwirkung maximal verletzt.

3. **Relativistische Kovarianz:** Auf  $\mathcal{H}$  gibt es eine unitäre Darstellung der eigentlichen inhomogenen Lorentzgruppe derart, dass

$$U(\Lambda, a)\phi(x)U^{-1}(\Lambda, a) = \phi(\Lambda x + a), \quad \Lambda \in L_+^\uparrow, a \in \mathbb{R}^4, \quad (6.5)$$

Der Bereich  $\mathcal{D}$  ist invariant unter  $U(\Lambda, a)$  und der Wirkung der ausgeschmierten Feldoperatoren, d.h.  $\phi(f)\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$ .

4. **Spektrum:** Sei  $U(\mathbb{1}, a) = \exp(ia_\mu P^\mu)$  – dies bedeutet, dass  $P^0 = H$  und  $P$  die Translationen in Zeit und Raum erzeugen. Dann soll Null ein (einfacher) Eigenwert der kommutierenden Impulsoperatoren  $P^\mu$  sein mit Eigenvektor  $|\Omega\rangle \in \mathcal{D}$ , dem *Vakuum*. Der Rest des Spektrums von  $P^\mu$  ist enthalten im Vorwärtslichtkegel  $V_+$ .

*Bemerkung:* Da die Raumzeit-Translationen eine kommutative Gruppe bilden kommutieren die Komponenten des 4-er Impulses und können gleichzeitig diagonalisiert werden. Die Bedingungen  $P^\mu|\Omega\rangle = 0$  drücken die Homogenität von Raum und Zeit aus – im Minkowski-Vakuum ist kein Zeitpunkt und kein Raumpunkt ausgezeichnet. Ab und zu werden auch Theorien mit mehreren Vakua als Wightman Theorien bezeichnet.

5. **Lokalität:**  $[\phi(f), \phi(g)] = 0$  falls die Träger von  $f$  und  $g$  raumartig getrennt sind.

*Bemerkung:* Messungen in raumartig getrennten Gebieten sollten sich gegenseitig nicht stören und die entsprechenden Observablen, dargestellt durch Operatoren  $\phi(f)$  und  $\phi(g)$ , sollten verträglich sein und kommutieren.

6. **Vollständigkeit:** Für  $\mathcal{D}$  kann man die Menge aller endlichen Linearkombinationen von Vektoren der Form

$$\phi(f_1)\phi(f_2)\cdots\phi(f_n)|\Omega\rangle, \quad f_i \in \mathcal{S}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.6)$$

wählen.

Eine Menge  $(\mathcal{H}, \Omega, U, \phi)$  mit den aufgezählten Eigenschaften heisst *Wightmantheorie*. Aus den wenigen Annahmen folgen bereits eine ganze Reihe experimentell überprüfbarer Folgerungen, insbesondere das PCT-Theorem und der Zusammenhang zwischen Spin und Statistik.

## 6.1.2 Wightman Distributionen

Eine relativistische Quantenfeldtheorie lässt sich auch beschreiben durch die Vakuumserwartungswerte, die sogenannten *Wightman Distributionen*

$$\mathcal{W}_n(x_1, \dots, x_n) = \langle \Omega | \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) | \Omega \rangle, \quad (6.7)$$

beziehungsweise den mit geeigneten Testfunktionen  $f_n(x_1, \dots, x_n)$  verschmierten Vakuumserwartungswerten,

$$\mathcal{W}_n(f_n) = \int_{\mathbb{R}^{4n}} d^{4n}x \mathcal{W}_n(x, \dots, x_n) f_n(x_1, \dots, x_n). \quad (6.8)$$

Ausgehend von den Gårding-Wightman Axiomen für  $(\mathcal{H}, \Omega, U, \phi)$  lässt sich zeigen, dass diese folgende Eigenschaften haben müssen:

1. **Relativistische Kovarianz:** Die Wightman-Distributionen sind invariant unter Poincaré-Transformationen:

$$\mathcal{W}_n(f_n^{(\Lambda, a)}) = \mathcal{W}_n(f_n), \quad (6.9)$$

wobei die Testfunktion mit der inversen Poincare-Transformation ändern,

$$f_n^{(\Lambda, a)}(\dots, x_i, \dots) = f_n(\dots, \Lambda^{-1}(x_i - a), \dots).$$

Handelt es sich um die Vakuum Erwartungswerte einer nicht-skalaren relativistischen Feldtheorie, so transformieren die Wightman-Distributionen nach der entsprechenden Darstellung der Felder.

2. **Positivität:** Für endliche Folgen von Testfunktionen  $\{f_n\}$  gilt:

$$\sum_{n+m} \mathcal{W}_{n+m}(f_n^* \times f_m) \geq 0. \quad (6.10)$$

Danach darf zum Beispiel

$$W_2(f, f) = \int d^4y d^4x f^*(y) \langle \Omega | \phi(y) \phi(x) | \Omega \rangle f(x) = \langle \Omega | \phi^2(f) | \Omega \rangle \quad (6.11)$$

nicht negativ sein, was für einen hermiteschen Operator  $\phi(f)$  in einem Hilbertraum auch der Fall ist. Allgemeiner bedeutet die Bedingung (6.10), dass die Norm von Zuständen nicht-negativ werden kann. Sie erlaubt die Rekonstruktion eines positiv-definiten Skalarprodukts auf dem Hilbert-Raum der Quantenfelder.

3. **Spektrumseigenschaft:** Sie schränkt den Träger der Fouriertransformierten der  $\mathcal{W}_n$  ein. Wegen der Translationsinvarianz ist

$$\mathcal{W}_n(x_1, \dots, x_n) = W_{n-1}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}), \quad \xi_i = x_{i+1} - x_i. \quad (6.12)$$

Die Fouriertransformierte  $\tilde{W}_{n-1}(q_1, \dots, q_n)$  von  $W_{n-1}$  hat den Träger

$$\text{supp } \tilde{W}_{n-1} \subset \{q_1, \dots, q_{n-1} | q_i \in \text{spec}(P)\}. \quad (6.13)$$

Insbesondere verschwindet sie für 4-er Impulse  $q_i$  die nicht im abgeschlossenen Innern des positiven Lichtkegel liegen. Etwa genauer liegt das Spektrum des Energie-Impuls Operators in

$$\text{spec}(P) \subset \{p = 0\} \cup \{p | p^2 \geq m_0^2\}, \quad (6.14)$$

wobei  $m_0$  die leichteste Masse in der Theorie ist. Die Eigenwerte  $p^\mu = 0$  gehören zum Vakuum und  $p^\mu p_\mu = m_0^2$  definiert die Massenschale der Einteilchenzustände.

4. **Lokalität (Mikrokausalität):** Sie besagt, dass

$$\mathcal{W}_n(\dots, x_i, x_{i+1}, \dots) = \mathcal{W}_n(\dots, x_{i+1}, x_i, \dots) \quad (6.15)$$

falls  $x_i - x_{i+1}$  raumartig ist. Für fermionische Felder ergibt sich bei der Vertauschung von zwei raumartigen Argumente noch einen Faktor  $-1$ .

5. **Cluster-Eigenschaft:** Für einen raumartigen Vektor  $a$  gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{n+m}(x_1, \dots, x_n, y_1 + \lambda a, \dots, y_m + \lambda a) \\ \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \mathcal{W}_n(x_1, \dots, x_n) \mathcal{W}_m(y_1, \dots, y_m). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Sie gilt nur falls  $|\Omega\rangle$  der einzige Poincare-invariante Vektor ist. Diese Forderung garantiert die Eindeutigkeit des Vakuumzustands.

6. **Regularität:** Die Wightman-Distributionen sind temperierte Distributionen.

Werden diese *Wightman-Axiome* für die Wightman-Funktionen  $\mathcal{W}_n$  vorausgesetzt, dann lassen sich daraus der Zustandsraum  $\mathcal{H}$  und der Feldoperator  $\phi$  rekonstruieren. Ein Satz von Wightman-Funktionen bestimmt über den Rekonstruktionssatz eindeutig eine Quantenfeldtheorie. Damit ist es möglich, eine Quantenfeldtheorie ohne Angabe von Feldoperatoren oder eines Fockraums zu definieren.

## 6.2 Källen-Lehmann-Darstellung

In Anbetracht der technischen Schwierigkeiten von störungstheoretisch formulierten Feldtheorien und der zunehmender Indizien für die Relevanz von nichtstörungstheoretischen Beiträgen in stark gekoppelten Theorien ist es angebracht, weitere Eigenschaften einer wechselwirkenden Theorie zu notieren. Wir werden nun sehen, wie die allgemeinen Eigenschaften einer Quantenfeldtheorie die Struktur der Zweipunktfunktion

$$W(x - y) \equiv i\Delta_+(x - y) = \langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle \quad (6.17)$$

festlegen: Sie ist eine Überlagerung von Zweipunktfunktionen *freier Felder*<sup>2</sup> mit verschiedenen Massen  $m$ ,

$$i\Delta_+(x; m) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mu(\mathbf{q}; m) e^{-iqx}, \quad d\mu(\mathbf{q}; m) = \frac{d\mathbf{q}}{2\sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}}. \quad (6.18)$$

Es seien  $|p\rangle$  die gemeinsamen Eigenzustände der verträglichen Energie- und Impulsoperatoren  $P^\mu$  und  $M^2 \equiv P^\mu P_\mu$  das Quadrat des Massenoperators. Dann gilt der folgende

<sup>2</sup>Man beachte, dass  $\Delta_+(x, m)$  die bekannte Zweipunktfunktion des freien Feldes zur Masse  $m$  und  $\Delta_+(x)$  die im Allgemeinen unbekannt Zweipunktfunktion des wechselwirkenden Feldes ist.

**Satz** (Källen, Lehmann)

$$W(x) = i\Delta_+(x) = i \int_0^\infty d\sigma(m') \Delta_+(x; m') \quad (6.19)$$

für ein positives Mass mit Träger

$$\text{supp } \sigma \subset [0, \infty). \quad (6.20)$$

*Beweis:* Es sei  $E(\Delta)$  der Projektor auf den Unterraum aufgespannt von den gemeinsamen Eigenfunktionen der kommutierenden Operatoren  $P^\mu$  mit Eigenwerten im Gebiet  $\Delta$  im Vorwärtslichtkegel,

$$E(\Delta) = \sum_{n: p_n \in \Delta} |p_n\rangle \langle p_n| + \int_\Delta d^4p |p\rangle \langle p|, \quad \Delta \subset V_+. \quad (6.21)$$

Die vier Impulsoperatoren oder allgemeinere Funktionen der Impulsoperatoren werden dann mit dem Spektralmaß  $dE(p)$  berechnet,

$$f(P^\mu) = \int_{V_+} f(p^\mu) dE(p).$$

Dann schreibt sich mit (6.5) die lorentzinvariante Zweipunktfunktion gemäß

$$\begin{aligned} W(x) &= \langle \Omega | \phi(x) \phi(0) | \Omega \rangle = \langle \Omega | \phi(0) e^{-iPx} \phi(0) | \Omega \rangle \\ &= \int e^{-ipx} \langle \Omega | \phi(0) dE(p) \phi(0) | \Omega \rangle \equiv \int e^{-ipx} d\nu(p), \end{aligned} \quad (6.22)$$

und definiert ein positive Maß

$$\nu(\Delta) = \langle \psi | E(\Delta) | \psi \rangle = \int_\Delta \langle \psi | dE(p) | \psi \rangle \quad \text{mit } |\psi\rangle = \phi(0) | \Omega \rangle.$$

Dieses Maß ist lorentzinvariant,  $d\nu(\Lambda p) = d\nu(p)$ , und hat den Träger im abgeschlossenen Vorwärtslichtkegel  $V_+$ . Die einzigen Lorentz invarianten Masse auf  $V_+$  sind aber

$$d\mu(\mathbf{p}, m \geq 0) \quad \text{und} \quad \delta^{(4)}(p) d^4p$$

sowie deren Überlagerungen. Diese Aussage ist in der Mathematik als Satz von Bochner bekannt. Also ist

$$d\nu(p) = a \delta^{(4)}(p) d^4p + \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d\sigma(m') d\mu(\mathbf{p}; m'). \quad (6.23)$$

Man nennt  $d\sigma(m)$  das *Källen-Lehmannsche Spektralmaß* der Zweipunktfunktion, kurz das KL-Maß. Der Träger dieses Maßes sind die möglichen Massen der Zustände  $\phi(f) | \Omega \rangle$ .

Die positive Konstante  $a$  bestimmt den Beitrag von  $p = 0$  zum Spektralmaß,

$$a = \nu(\{0\}) = \langle \Omega | \phi(0) E(\{0\}) \phi(0) | \Omega \rangle. \quad (6.24)$$

Ist  $|\Omega\rangle$  der einzige translationsinvariante Zustand (d.h. der einzige Zustand ohne Energie und Impuls), dann ist  $E(\{0\})$  der orthogonale Projektor auf den Vakuumzustand und

$$a = |\langle\Omega|\phi(x)|\Omega\rangle|^2. \quad (6.25)$$

Für jede Theorie, symmetrisch unter  $\phi \rightarrow -\phi$ , bedeutet dies eine *spontane Symmetriebrechung*, d.h. es gibt keinen unitären Operator  $U$  mit

$$U\phi(x)U^{-1} = -\phi(x) \quad \text{und} \quad U|\Omega\rangle = |\Omega\rangle. \quad (6.26)$$

Es skalares Feld mit  $a > 0$  nennen wir ein Higgsfeld.

Für die Fourier-Transformierte  $\tilde{W}(p)$  der Wightmanfunktion

$$W(x) = a + i \int_0^\infty d\sigma(m') \Delta_+(x; m') \quad (6.27)$$

folgt die Spektraldarstellung

$$\tilde{W}(p) = a\delta(p) + \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d\sigma(m') \theta(p^0) \delta(p^2 - m'^2). \quad (6.28)$$

Ist  $\phi$  insbesondere ein freies Feld der Masse  $m$ , also  $(\square + m^2)\phi = 0$ , so gilt

$$a = 0 \quad \text{und} \quad d\sigma(m') = \delta(m' - m) dm'. \quad (6.29)$$

Ist  $\phi$  ein wechselwirkendes Feld (mit  $a = 0$ ) und  $m$  die kleinste Masse im Spektrum, so erwarten wir (bei Abwesenheit von masselosen Teilchen) eine Massenlücke zwischen  $m$  und der Schwelle für Mehrteilchenzustände bei  $m_1 > m$ . In dieser Situation folgt die Darstellung der Art

$$\langle\Omega|\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle = iZ \left( \Delta_+(x-y; m) + \int_{m_1}^\infty d\sigma(m') \Delta_+(x-y; m') \right), \quad (6.30)$$

wobei die positive Konstante  $Z$  durch die Art der Wechselwirkung bestimmt wird. Beim Übergang von (6.28) nach (6.30) haben wir noch  $d\sigma$  durch  $Zd\sigma$  ersetzt<sup>3</sup>

Subtrahieren wir von die Gleichung mit vertauschten  $x$  und  $y$  dann finden wir für die Kommutatorfunktion des wechselwirkenden Feldes die Källen-Lehmann Darstellung

$$\langle\Omega|[\phi(x), \phi(y)]|\Omega\rangle = iZ \left( \Delta_m(x-y) + \int_{m_1}^\infty d\sigma(m') \Delta_{m'}(x-y) \right), \quad (6.31)$$

worin unter dem Integral die Pauli-Jordan Funktion des freien Feldes mit Masse  $m'$  erscheint. Jedes reskalierte Feld  $\lambda\phi(x)$  mit reellem  $\lambda$  erfüllt eine ähnliche Relation. Das Feld mit  $Z = 1$  nennt man das *renormierte Feld*. Es gilt

$$\phi_{\text{ren}}(x) = Z^{-1/2} \phi(x). \quad (6.32)$$

<sup>3</sup>Nicht in allen Publikationen und Lehrbüchern wird das gemacht. Dann steht der Faktor  $Z$  nur vor  $\Delta_+(x-y, m)$  und nicht vor dem Integral.

wobei man  $Z$  die *Renormierungskonstante des Feldes* (Wellenfunktionsrenormierung) nennt.

Die Zweipunktfunktion des freien und wechselwirkenden Feldes hängen nur über  $m^2$  von der Masse ab,  $\Delta_m(x) = \Delta(x, m^2)$ . Deshalb dürfen wir anstelle von  $m$  auch  $m^2$  als Integrationsvariable benutzen. Wir inkludieren noch den ersten Term auf der rechten Seite von (6.31) in das KL-Maß und definieren die nicht-negative (distributionswertige) Spektraldichte  $\sigma(m'^2)$  in

$$d\sigma(m') = \sigma(m'^2)dm'^2, \quad \sigma(s) = Z\delta(s - m^2) + Z\theta(s - m_1^2)\sigma(s). \quad (6.33)$$

Damit lautet die Källen-Lehman Darstellung der Kommutatorfunktion

$$\langle \Omega | [\phi(x), \phi(y)] | \Omega \rangle = i \int_0^\infty ds \sigma(s) \Delta(x - y, s) \quad (6.34)$$

Die Spektraldichte  $\sigma$  hat offensichtlich folgende Beträge: eine  $\delta$ -Distribution bei der quadrierten Masse  $m^2$  des leichtesten stabilen Teilchens und einen (stetigen) Beitrag oberhalb der Schwelle  $m_1^2$  für die Erzeugung von mehreren Teilchen. Ohne Wechselwirkung fehlt der zweite Anteil. Dies ist in Figur 6.1 gezeigt. Falls es keine weiteren stabilen (gebundene) Teilchen gibt, dann wird  $m_1 = 2m$  sein. Gibt es noch weitere gebundene stabile (gebundene) Teilchen, dann werden noch weitere  $\delta$ -Distributionen auftreten.

### 6.3 Die Notwendigkeit zu renormieren

Da nach unserer Annahme die Wechselwirkung keine Ableitungen des Feldes enthält, ist  $\dot{\phi}$  das zu  $\phi$  konjugierte Impulsfeld. Die kanonische Quantisierung legt eine kanonische Normierung des Feldes  $\phi(x)$  fest,

$$[\phi(x), \dot{\phi}(y)]_{x^0=y^0} = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (6.35)$$

Das so normierte  $\phi$  wird im Allgemeinen *nicht* mit dem renormierten Feld übereinstimmen und eine Renormierung wird notwendig. Wir werden nun sehen, dass die Renormierungskonstante  $Z$  durch das KL-Maß ausgedrückt werden kann. Wir setzen voraus, dass das Feld eine Zweipunktfunktion der Form (6.30) besitzt. Diese führt auf folgende *Kommutatorfunktion* für das wechselwirkende Feld,

$$\langle \Omega | [\phi(x), \phi(y)] | \Omega \rangle = iZ \left( \Delta_m(x - y) + \int_{m_1}^\infty d\sigma(m') \Delta_{m'}(x - y) \right), \quad (6.36)$$

wobei  $\Delta_m(x - y)$  die Pauli-Jordan Kommutatorfunktion des freien Feldes mit Masse  $m$  ist, siehe (4.49). Nach (3.72) gilt unabhängig von der Masse

$$\left. \frac{\partial \Delta_m(x)}{\partial t} \right|_{t=0} = -\delta^{(3)}(\mathbf{x}) \quad (6.37)$$



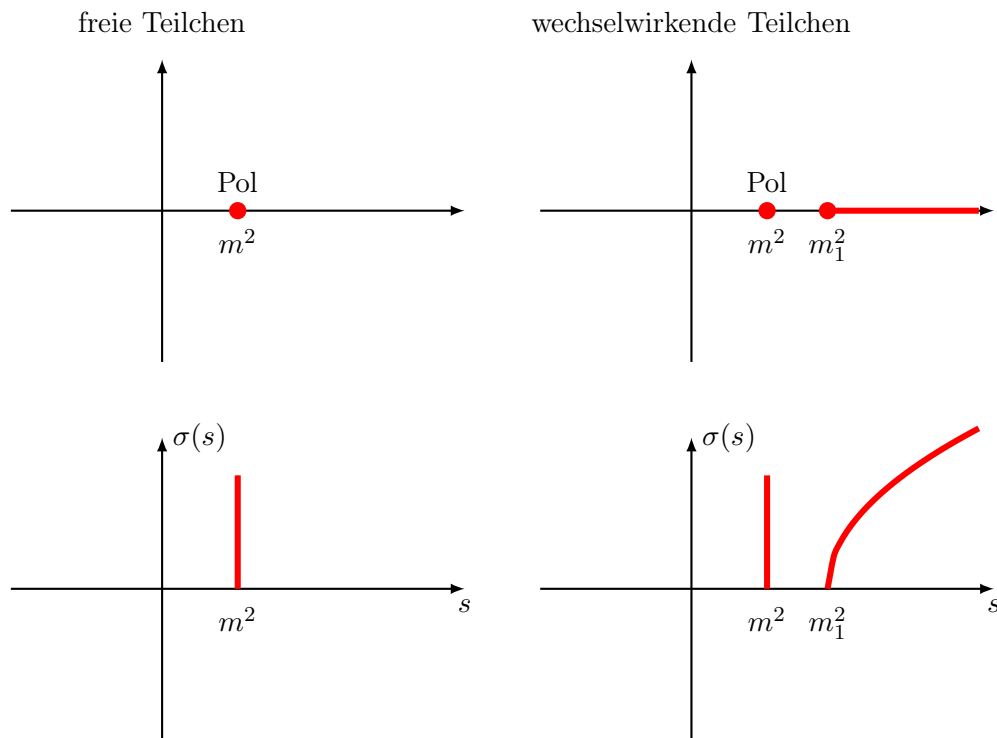


Abbildung 6.1: Gezeigt sind links der Propagator und die Spektraldichte für das freie Feld zur Masse  $m$  und rechts dieselben Größen für ein wechselwirkendes Feld mit einem stabilen Einteilchenzustand und einer Mehrteilchenschwelle bei  $m_1$ .

und dies führt auf

$$\langle \Omega | [\phi(x), \dot{\phi}(y)] | \Omega \rangle \Big|_{x^0=y^0} = iZ \left( 1 + \int_{m_1}^{\infty} d\sigma(m') \right) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (6.38)$$

Dies ist in Einklang mit (6.35), wenn

$$1 = Z + Z \int_{m_1}^{\infty} d\sigma(m') \quad (6.39)$$

gilt. Die nicht-Negativität von  $\sigma$  gibt dann Anlass zur Ungleichung

$$0 \leq Z \leq 1. \quad (6.40)$$

Der Wert 1 ist nur möglich, wenn alle Matrixelemente  $\langle p | \phi(0) | \Omega \rangle$  für alle  $p^2 < m^2$  verschwinden oder wenn die Theorie eine freie Theorie ist.

Für  $Z \neq 0$  erfüllt das renormierte Feld eine kanonische Vertauschungsrelation der Art

$$[\phi_{\text{ren}}(x), \dot{\phi}_{\text{ren}}(y)] \Big|_{x^0=y^0} = iZ^{-1} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (6.41)$$

Für  $Z = 0$  oder divergierendes  $\int d\sigma(m)$  verliert diese Relation ihren Sinn. Da dies die generische Situation ist, muss die kanonische Quantisierung an einigen Stellen hinterfragt werden oder neue Wege der Feldquantisierung, zum Beispiel funktionale Methoden, beschritten werden.

In der Störungstheorie ist anstelle der Zweipunktfunktion der volle Feynman-Propagator

$$\langle \Omega | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = i\Delta_{\text{F}}(x - y) \quad (6.42)$$

von zentraler Bedeutung. Dieser wird von der störungstheoretischen Behandlung von einer unendlichen Summe von zusammenhängenden Feynmangraphen repräsentiert, mit dem Feynman-Propagator des freien Feldes als führenden Term,

$$i\Delta_{\text{F}}(x - y) = i\Delta_{\text{F}}(x - y, m_0) + \dots = \langle 0 | T \phi_{\text{ein}}(x) \phi_{\text{ein}}(y) | 0 \rangle + \dots, \quad (6.43)$$

wobei  $m_0$  die Masse des freien Feldes  $\phi_{\text{ein}}$  ist. Ausgehend von (6.30) können wir eine Integraldarstellung für den Propagator angeben,

$$\langle \Omega | T \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = iZ \left( \Delta_{\text{F}}(x - y, m) + \int_{m_1}^{\infty} d\sigma(m') \Delta_{\text{F}}(x - y; m') \right). \quad (6.44)$$

Die Massen  $m$  und  $m_0$  brauchen und werden im Allgemeinen nicht identisch sein. Die sogenannte *physikalische* oder *renormierte* Masse  $m$  wird aber durch die sogenannte *nackte* oder *unrenormierte* Masse  $m_0$  bestimmt. In jeder Ordnung Störungstheorie muss die nackte Masse dann  $m_0$  so angepasst werden, damit  $m$  die experimentell gemessene Masse ist.

Dem renormierten Feld  $\phi_{\text{ren}}$  ist ein *renormierter Propagator* zugeordnet, der durch das KL-Maß ausgedrückt werden kann,

$$\Delta_{\text{F}}^{\text{ren}}(x) = \Delta_{\text{F}}(x; m) + \int_{m_1}^{\infty} d\sigma(m') \Delta_{\text{F}}(x; m'). \quad (6.45)$$

Mit Hilfe der Fourier-Zerlegung

$$\Delta_{\text{F}}^{\text{ren}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ipx} \tilde{\Delta}_{\text{F}}^{\text{ren}}(p)$$

folgt die spektrale Darstellung des renormierten Feynman-Propagators im Impulsraum

$$\tilde{\Delta}_{\text{F}}^{\text{ren}}(p) = \frac{1}{p^2 - m^2 + i0} + \int_{m_1}^{\infty} \frac{d\sigma(m')}{p^2 - m'^2 + i0} \quad (6.46)$$

wobei das  $i0$  dafür sorgt, dass bei der Berechnung des  $p^0$ -Integrals die korrekte Vorschrift für den Feynmanpropagator gewählt wird. In der Tat, für infinitesimal kleine  $\epsilon$  ist

$$(p^0 - \omega_{\mathbf{p}} + \frac{i\epsilon}{2\omega_{\mathbf{p}}})(p^0 + \omega_{\mathbf{p}} - \frac{i\epsilon}{2\omega_{\mathbf{p}}}) = p^2 - m^2 + i\epsilon + O(\epsilon^2/\omega_{\mathbf{p}}^2), \quad (6.47)$$

so dass die einfachen Pole von (6.46) in der komplexen  $p^0$ -Ebene etwas unterhalb von  $E_{\mathbf{p}}$  und etwas oberhalb von  $-E_{\mathbf{p}}$  liegen. Dies entspricht genau der Vorschrift, welchen Integrationsweg man für die Feynman-Propagator wählen soll, siehe die folgende Figur.

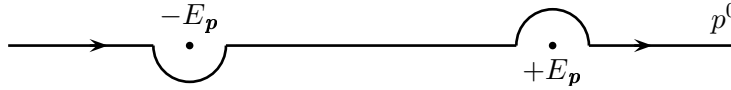


Abbildung 6.2: Der korrekte Integrationsweg für den Feynman-Propagator.

Diese ist jedoch nur sinnvoll, wenn das KL-Maß folgende Bedingung erfüllt:

$$\int_{m_1}^{\infty} \frac{d\sigma(m')}{m'^2} < \infty. \quad (6.48)$$

Um diese Forderung an die Abfalleigenschaften des KL-Maßes für große Massen näher zu untersuchen, wenden wir uns den analytischen Eigenschaften des Propagators im Impulsraum zu und schreiben

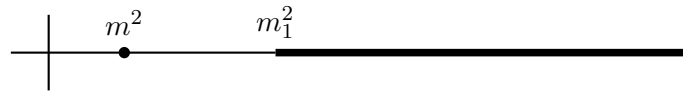
$$\tilde{\Delta}_{\text{F}}^{\text{ren}}(q) = F(q^2 + i0) \quad (6.49)$$

mit

$$F(z) = \frac{1}{z - m^2} + \int_{m_1}^{\infty} \frac{d\sigma(m')}{z - m'^2}, \quad z \in \mathbb{C}, \Re(z) \neq 0. \quad (6.50)$$

Die eingeführte Funktion erfüllt die Bedingung  $F(\bar{z}) = \bar{F}(z)$  und ist analytisch in der komplexen Ebene mit Ausnahme von  $z = m^2$ , wo sie einen Pol aufweist, und der Halbachse  $z > m_1^2$ , wo wir den Schnitt wählen. Wie für das freie Feld hat wegen der Renormierungsbedingung für das renormierte Feld der Pol das Residuum 1. Aus der Zerlegung

$$\frac{1}{t \pm i0} = P\left(\frac{1}{t}\right) \mp i\pi\delta(t), \quad (6.51)$$



wobei  $P$  den Hauptwert bezeichnet, folgt mit  $t = p^2 - m^2$  ein Ausdruck für den Sprung von  $F$  am Schnitt,

$$F(p^2 - i0) - F(p^2 + i0) = 2\pi i \left( \delta(p^2 - m^2) + \int_{m_1}^{\infty} d\sigma(m') \delta(p^2 - m'^2) \right). \quad (6.52)$$

Die Fourier-Transformierte der (renormierten) Zweipunktfunktion  $W(x)$  hat die Gestalt

$$\tilde{W}(p) = \frac{1}{(2\pi)^3} \theta(p^0) \left( \delta(p^2 - m^2) + \int_{m_1}^{\infty} d\sigma(m') \delta(p^2 - m'^2) \right) \quad (6.53)$$

und ein Vergleich mit (6.52) führt auf den Zusammenhang

$$(2\pi)^4 \tilde{W}(p) = i\theta(p^0) (F(p^2 + i0) - F(p^2 - i0)). \quad (6.54)$$

Die Zweipunktfunktion ist deshalb durch den Sprung von  $F$  entlang der positiven reellen Achse bestimmt.

# 7 Störungstheorie

Lange Zeit waren störungstheoretische Rechnungen der einzige Zugang zu Quantenfeldtheorien in vier Dimensionen. In der aktuellen Forschung spielen allerdings neben störungstheoretischen auch nicht-störungstheoretische Methoden zunehmend eine wichtige Rolle, da in vielen Quantensystemen die Wechselwirkung nicht klein ist. Im vorliegenden Kapitel behandeln wir aber die konventionelle Störungstheorie, bei der man annimmt, dass das wechselwirkende System „in der Nähe“ eines freien Systems ist. Dabei werden Prozesse die zu einem bestimmten Element der Streumatrix beitragen, gemäß der Anzahl der in diesem Prozess vorkommenden Wechselwirkungen geordnet. Dies entspricht einer Reihenentwicklung in der Kopplungskonstanten, die die Stärke der Wechselwirkung charakterisiert.

## 7.1 Die Formel von Gell-Mann und Low

Da der Wechselwirkungsterm keine Zeitableitungen des Feldes enthält, bleibt die Beziehung  $\phi = \dot{\phi}$  unverändert. Wir werden also weiterhin folgende Vertauschungsregel zu gleichen Zeiten fordern:

$$[\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (7.1)$$

Schon in der zeitabhängigen Störungstheorie der Quantenmechanik benötigt man zeitgeordnete Produkte des Wechselwirkungsterms im Hamilton-Operator. Dies ist in der Quantenfeldtheorie nicht anders und wir werden zuerst versuchen, den Vakuumerwartungswert des zeitgeordneten Produktes  $T\phi(x)\phi(y)$  zu berechnen. Für ein translationsinvariantes Vakuum wird

$$\langle \Omega | T\phi(x)\phi(y) | \Omega \rangle \quad (7.2)$$

nur vom Differenzvektor  $x - y$  der Aufpunkte abhängen. Wir möchten diese Korrelationsfunktion in Potenzen der Kopplungskonstanten  $\lambda$  entwickeln. Dabei ist zu beachten, dass die Zeitentwicklung des Quantenfeldes und der Grundzustand  $|\Omega\rangle$  der wechselwirkenden Theorie von der Kopplung abhängen. Für  $\lambda = 0$  ist die Korrelationsfunktion gleich dem Feynman-Propagator des freien Feldes  $i\Delta_F(x - y, m)$ .

### 7.1.1 Wechselwirkungs-Bild

Wir schreiben den Hamilton-Operator der wechselwirkenden Theorie gemäß

$$H[\phi] = H_0[\phi] + V[\phi], \quad (7.3)$$

wobei  $H_0$  der in  $(\phi, \pi)$  quadratische Hamilton-Operator der freien Theorie ist,

$$H_0[\phi] = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} \left( \pi^2(\mathbf{x}) + (\nabla\phi)^2(\mathbf{x}) + m^2\phi^2(\mathbf{x}) \right) \quad (7.4)$$

und  $V$  die Wechselwirkungsterme enthält.  $H[\phi]$  bestimmt erstens die Zeitentwicklung des Quantenfeldes im Heisenberg Bild,

$$\phi(t) = e^{itH} \phi(0) e^{-itH}, \quad (7.5)$$

und definiert zweitens das Vakuum  $|\Omega\rangle$  der wechselwirkenden Theorie als Zustand kleinster Energie. Für das betrachtete abgeschlossene Quantensystem ist der Hamilton-Operator zeitunabhängig und wir dürfen in (7.3) das Quantenfeld zu irgendeiner Zeit einsetzen.

Zu der festen Zeit  $t = 0$  können wir das Feld als Linearkombination der Basisfunktionen  $u_{\mathbf{p}}$  in (3.60) schreiben,

$$\phi(0) = \int d\mu(\mathbf{p}) \left( a_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{p}} + a_{\mathbf{p}}^\dagger u_{\mathbf{p}}^* \right). \quad (7.6)$$

Das wechselwirkende Feld erfüllt eine nicht-lineare Feldgleichung und wir können seine Zeitentwicklung nicht explizit lösen. Auch deshalb wechseln wir nun ins Wechselwirkungsbild. Der Übergang vom Heisenberg-Bild ins Wechselwirkungsbild,

$$\phi_w(t) = U^\dagger(t) \phi(t) U(t), \quad |\psi_w\rangle(t) = U^\dagger(t) |\psi\rangle, \quad (7.7)$$

geschieht mit dem unitären Operator

$$U(t) = e^{itH} e^{-itH_0}, \quad U(0) = \mathbb{1}. \quad (7.8)$$

Hier ist  $|\psi\rangle$  ein zeitunabhängiger Zustand im Heisenberg-Bild. Ohne Wechselwirkung ist  $U = \mathbb{1}$ .

Die Zeitabhängigkeit des Feldoperators im Wechselwirkungsbild ist durch den freien Hamiltonoperator bestimmt,

$$\phi_w(t) = e^{itH_0} \phi(0) e^{-itH_0}, \quad (7.9)$$

worin  $\phi(0)$  die Entwicklung (7.6) hat. Im Wechselwirkungsbild ist die Zeitentwicklung des wechselwirkenden Feldes gleich der eines freien Skalarfeldes und diese wurde in Kapitel 4 ausführlich diskutiert. Die Zeitentwicklung der Zustände im Wechselwirkungsbild von einer Anfangszeit  $s$  hin zu einer späteren Zeit  $t$ ,

$$|\psi_w(t)\rangle = U_w^\dagger(t) |\psi_w(0)\rangle = U_w^\dagger(t) U_w(s) |\psi_w(s)\rangle = U_w(t, s) |\psi_w(s)\rangle \quad (7.10)$$

wird bestimmt durch den unitären Operator

$$U_w(t, s) = U^\dagger(t) U(s) = e^{itH_0} e^{-i(t-s)H} e^{-isH_0} \quad \text{mit} \quad U_w(s, s) = \mathbb{1}. \quad (7.11)$$

Dieser Evolutionsoperator erfüllt die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} U_w(t, s) &= e^{itH_0} (H - H_0) e^{-i(t-s)H} e^{-isH_0} \\ &= (e^{itH_0} V e^{-itH_0}) U_w(t, s) = V_w(t) U_w(t, s), \end{aligned} \quad (7.12)$$

wobei wir die Wechselwirkung  $V_w$  im Wechselwirkungsbild wieder eine einfache Zeitenwicklung hat,

$$V_w(t) = e^{itH_0} \left( \int d\mathbf{x} \mathcal{V}(\phi(0, \mathbf{x})) \right) e^{-itH_0} = \int d\mathbf{x} \mathcal{V}(\phi_w(x)). \quad (7.13)$$

Die Dyson-Reihe liefert die formale Lösung der Differentialgleichung (7.12) mit Anfangsbedingung  $U_w(s, s) = \mathbb{1}$ ,

$$\begin{aligned} U_w(t, s) &= \mathbb{1} + (-i) \int_s^t dt_1 V_w(t_1) + (-i)^2 \int_s^t dt_2 \int_s^{t_2} dt_1 V_w(t_2) V_w(t_1) + \dots \\ &= \mathbb{1} + (-i) \int_s^t dt_1 V_w(t_1) + \frac{(-i)^2}{2!} \int_s^t dt_2 dt_1 T \{ V_w(t_2) V_w(t_1) \} + \dots \\ &= T \left\{ \exp \left( -i \int_s^t dt' V_w(t') \right) \right\}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Im letzten Ausdruck soll man die Exponentialfunktion nach Taylor entwickeln und jeden Term in der Entwicklung chronologisch ordnen. Das (freie) Feld  $\phi_w$  definiert nach (7.13) das Potential  $V_w$  und dieses bestimmt über die Dyson-Reihe den Evolutionsoperator im Wechselwirkungsbild  $U_w(t, s)$ . Damit wäre es uns zumindest auf formaler Ebene gelungen, die Zeitentwicklung der wechselwirkenden Theorie durch das bekannte Feld  $\phi_w(t)$  der freien Theorie auszudrücken.

Wenn wir zuerst von  $t$  nach  $t' > t$  und dann nach  $t'' > t'$  propagieren, dann ist das Resultat gleich, als wenn wir direkt von  $t$  nach  $t''$  propagieren,

$$U_w(t'', t') U_w(t', t) = U_w(t'', t) \implies U_w(t, t') U_w(t', t) = \mathbb{1}. \quad (7.15)$$

Diese Eigenschaft folgt natürlich auch direkt aus (7.11).

## 7.1.2 Grundzustände der freien und wechselwirkenden Theorie

Als Nächstes wollen wir den Grundzustand  $|0\rangle$  von  $H_0$  mit dem eindeutigen Grundzustand  $|\Omega\rangle$  von  $H$  in Verbindung bringen. Dazu zerlegen wir den mit  $H$  entwickelten Zustand  $|0\rangle$  nach den  $H$ -Eigenzuständen  $|\psi_n\rangle$  mit Energien  $E_n$ ,

$$e^{-iHT} |0\rangle = \sum_n e^{iE_n T} |\psi_n\rangle \langle \psi_n | 0\rangle = e^{-iE_0 T} |\Omega\rangle \langle \Omega | 0\rangle + \sum_{n>0} e^{-iE_n T} |\psi_n\rangle \langle \psi_n | 0\rangle,$$

wobei wir im letzten Schritt den Beitrag des Grundzustandes  $|\psi_0\rangle \equiv |\Omega\rangle$  isolierten. Da  $E_n > E_0$  gilt für alle  $n > 0$  können wir die Beiträge der angeregten Zustände unterdrücken,

indem wir  $T$  durch  $T_\epsilon = T(1 - i\epsilon)$  mit positiven  $\epsilon$  ersetzen und  $T$  nach Unendlich streben lassen. Solange  $|0\rangle$  und  $|\Omega\rangle$  ein nichtverschwindendes Skalarprodukt haben, was für kleine Kopplungskonstanten  $\lambda$  der Fall sein sollte, finden wir

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{-iHT_\epsilon}|0\rangle}{e^{-iE_0T_\epsilon}\langle\Omega|0\rangle}. \quad (7.16)$$

Analog finden wir

$$\langle\Omega| = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\langle 0|e^{iHT_\epsilon^*}}{e^{iE_0T_\epsilon^*}\langle 0|\Omega\rangle}. \quad (7.17)$$

Ersetzen wir nun im Ausdruck für die (bildunabhängige) Zweipunktsfunktion  $\mathcal{W}(x, y) = \langle\Omega|\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle$  das wechselwirkende Feld  $\phi$  durch  $\phi_w$ , dann erhalten wir

$$W(x, y) = \langle\Omega|U(x^0)\phi_w(x)U^\dagger(x^0)U(y^0)\phi_w(y)U^\dagger(y^0)|\Omega\rangle$$

Ersetzen wir darin das wechselwirkende durch das freie Vakuum und erinnern uns an

$$U_w(T_\epsilon, x^0) = e^{iT_\epsilon^*H_0}e^{-iT_\epsilon^*H}U(x^0) \quad \text{und} \quad U_w(y^0, -T_\epsilon) = U^\dagger(y^0)e^{-iT_\epsilon H}e^{iT_\epsilon H_0},$$

und daran, dass das Vakuum der freien Theorie  $|0\rangle$  von  $H_0$  annihiliert wird, dann finden wir für  $x^0 > y^0$  folgende Darstellung für die Zweipunktsfunktion:

$$W(x, y) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\langle 0|U_w(T_\epsilon, x^0)\phi_w(x)U_w(x^0, y^0)\phi_w(y)U_w(y^0, -T_\epsilon)|0\rangle}{e^{-2\epsilon E_0 T}|\langle 0|\Omega\rangle|^2}.$$

Den Nenner können wir noch mit Hilfe von

$$1 = \langle\Omega|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\langle 0|U(T_\epsilon, -T_\epsilon)|0\rangle}{e^{-2\epsilon E_0 T}|\langle 0|\Omega\rangle|^2} \quad (7.18)$$

vereinfachen. Dies führt dann für  $x^0 > y^0$  auf folgende Formel:

$$W(x, y) = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0|U_w(T, x^0)\phi_w(x)U_w(x^0, y^0)\phi_w(y)U_w(y^0, -T)|0\rangle}{\langle 0|U_w(T, -T)|0\rangle}. \quad (7.19)$$

Man beachte, dass auf beiden Seiten nur zeitgeordnete Produkte von Feldern auftreten. Wiederholen wir die Rechnung für  $y^0 > x^0$ , dann finden wir natürlich für  $W(y, x)$  das entsprechende Resultat mit  $y$  und  $x$  vertauscht. Berücksichtigen wir noch, dass Operatoren unter dem zeitgeordneten Produkt kommutieren, dann folgt für beliebige  $x^0$  und  $y^0$  die *Gell-Mann-Low-Formel*

$$\langle\Omega|T\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle = \frac{\langle 0|T\{\phi_w(x)\phi_w(y)\exp(-i\int dt V_w(t))\}|0\rangle}{\langle 0|T\exp(-i\int dt V_w(t))|0\rangle}. \quad (7.20)$$

In dieser Formel erstreckt sich das Zeitintegral von  $-\infty(1 - i\epsilon)$  nach  $\infty(1 - i\epsilon)$ . Völlig analog finden wir für den Vakuumerwartungswert des zeitgeordneten Produktes von  $n$  Feldoperatoren,

$$\tau(x_1, \dots, x_n) \equiv \langle\Omega|T\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)|\Omega\rangle \quad (7.21)$$



die Formel

$$\tau(x_1, \dots, x_n) = \frac{\langle 0 | T \phi_w(x_1) \cdots \phi_w(x_n) e^{iS_w[\phi_w]} | 0 \rangle}{\langle 0 | T e^{iS_w[\phi_w]} | 0 \rangle}, \quad (7.22)$$

mit dem Wechselwirkungsanteil der Wirkung,

$$S_w[\phi_w] \equiv - \int dt V_w(\phi_w(t)) = - \int d^4y \mathcal{V}(\phi_w(y)). \quad (7.23)$$

Im Gegensatz zu den Wightman-Funktionen sind die  $\tau(x_1, \dots, x_n)$  symmetrisch in ihren Argumenten. Verschmieren wir den Feldoperator mit einer Testfunktion,  $\phi_w(f) = \int d^4y f(y) \phi_w(y)$ , dann finden wir

$$\langle \Omega | T \phi(f) \cdots \phi(f) | \Omega \rangle = \frac{\langle 0 | T \phi_w(f) \cdots \phi_w(f) e^{iS_w[\phi_w]} | 0 \rangle}{\langle 0 | T e^{iS_w[\phi_w]} | 0 \rangle}. \quad (7.24)$$

Dies ist eine exakte Formel, die sich als Ausgangspunkt für die Störungstheorie bestens eignet. Nun multiplizieren wir beide Gleichungen mit  $i^n/n!$  und summieren über  $n = 0, 1, \dots$ . Dann erhalten wir die *Zauberformel von Gell-Mann und Low*,

$$\langle \Omega | T e^{i\phi(f)} | \Omega \rangle = \frac{Z[f]}{Z[0]}, \quad Z[f] = \langle 0 | T e^{i\phi_w(f) + iS_w[\phi_w]} | 0 \rangle. \quad (7.25)$$

Auf der linken Seite steht das *erzeugende Funktional* für die zeitgeordneten Vakuum-Erwartungswerte des wechselwirkenden Feldes,

$$i^n \tau(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta^n}{\delta f(x_1) \cdots \delta f(x_n)} \frac{Z[f]}{Z[0]} \Big|_{f=0}. \quad (7.26)$$

Die Entwicklungskoeffizienten dieses Funktionals ergeben die Erwartungswerte der zeitgeordneten Produkte des wechselwirkenden Quantenfeldes.

### 7.1.3 Erzeugendes Funktional für das freie Feld

In der Störungstheorie tritt das erzeugende Funktional des freien Feldes auf,

$$\langle 0 | T e^{i\phi_w(f)} | 0 \rangle = Z_0[f]. \quad (7.27)$$

Zur dessen Berechnung vergleichen wir zuerst das exponierte Feld  $\exp(i\phi_w(f))$  mit dem zeitgeordneten exponentierten Feld  $T \exp(i\phi_w(f))$ .

Dazu unterteilen wir das symmetrische Zeitintervall  $[-a, a]$  in  $n$  gleiche Zeitintervalle der Länge  $\Delta t = 2a/n$ . Die Mitte des  $k$ -ten Teilstückes ist durch  $t_k = (k - \frac{1}{2})\Delta t - a$  mit  $k = 1, \dots, n$  gegeben. Entsprechend definieren die nur über den Raum ausgeschmierten Felder

$$\phi_w(t, f) = \int d\mathbf{x} f(t, \mathbf{x}) \phi_w(t, \mathbf{x}) \quad (7.28)$$

und gewinnen daraus die über Raum und Zeit ausgeschmierten Felder,

$$\phi_w(f) = \int_{-a}^a dt \phi_w(t, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum \Delta t \phi_w(t_k, f). \quad (7.29)$$

Das zeitgeordnete Produkt ist definiert durch den Grenzprozeß

$$T \exp \left\{ i \int_{-a}^a dt \phi_w(t, f) \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{i\Delta t \phi_w(t_n, f)} \dots e^{i\Delta t \phi_w(t_1, f)}. \quad (7.30)$$

Mithilfe der *Campbell-Baker-Hausdorff Formel* für Operatoren zwei  $A, B$ , die mit ihrem Kommutator vertauschen,

$$e^A e^B = e^{A+B+[A,B]/2} \quad (7.31)$$

finden wir für die rechte Seite in (7.30) die Darstellung

$$\exp \left( i\Delta t \sum_i \phi_w(t_i, f) \right) \exp \left( -\frac{1}{2}(\Delta t)^2 \sum_{i>j} [\phi_w(t_i, f), \phi_w(t_j, f)] \right).$$

Der erste Exponent strebt für  $n \rightarrow \infty$  gegen das *räumlich und zeitlich* geschmierte Feld  $\phi_w(f)$ . Der zweite Exponent ist wegen  $[\phi_w(x), \phi_w(y)] = i\Delta_m(x-y)$  gleich

$$-\frac{i}{2}(\Delta t)^2 \sum_{i>j} \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} f(t_i, \mathbf{x}) f(t_j, \mathbf{y}) \Delta_m(t_i - t_j, \mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

und dieses strebt für  $n \rightarrow \infty$  gegen das zeitgeordnete Integral,

$$-\frac{i}{2} \int_{-a}^a dt \int_{-a}^a dt' \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} f(t, \mathbf{x}) f(t', \mathbf{y}) \Delta_{\text{ret}}(t - t', \mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

worin die Zeitordnung durch die retardierte Greenfunktion  $\Delta_{\text{ret}}(x) = \theta(x^0)\Delta_m(x)$  gewährleistet wird. Nun lassen wir  $a$  gegen Unendlich streben und erhalten die sehr nützliche Formel

$$T \exp(i\phi_w(f)) = \exp(i\phi_w(f)) \exp \left( -\frac{i}{2}(f, \Delta_{\text{ret}} f) \right) \quad (7.32)$$

mit der quadratischen Form

$$(f, \Delta_{\text{ret}} f) = \int d^4x d^4y f(x) \Delta_{\text{ret}}(x, y) f(y). \quad (7.33)$$

Nun berechnen wir den Vakuum-Erwartungswert des exponentierten Feldes. Dazu zerlegen wir dieses in seine positiven und negativen Frequenzanteile,

$$\phi_w(f) = \phi_w^+(f) + \phi_w^-(f).$$

Der Kommutator der beiden Terme ist nach (4.52) proportional zur Identität,

$$[\phi_w^+(f), \phi_w^-(f)] = i(f, \Delta_+ f) \mathbb{1}, \quad (7.34)$$

wobei der Faktor die Wightman-Funktion  $i\Delta_+$  des freien Feldes enthält. Deshalb führt die Campbell-Hausdorff-Formel auf

$$\exp(i\phi_w^-(f)) \exp(i\phi_w^+(f)) = \exp(i\phi_w(f)) \times \exp\left(\frac{i}{2}(f, \Delta_+ f)\right). \quad (7.35)$$

Wegen  $\phi_w^+(f)|0\rangle = \langle 0|\phi_w^-(f) = 0$  hat die linke Seite den Vakuumerwartungswert 1 und wir erhalten mit Hilfe von (7.32) die Formel

$$1 = \langle 0|T \exp(i\phi_w(f)) |0\rangle \times \exp\left(\frac{i}{2}(f, (\Delta_{\text{ret}} + \Delta_+) f)\right). \quad (7.36)$$

Im letzten Exponenten erkennen wir auf den Feynman-Propagator  $\Delta_F = \Delta_{\text{ret}} + \Delta_+$  und damit erhalten wir folgendes erzeugende Funktional für das freie Feld,

$$Z_0[f] = \langle 0|T \exp(i\phi_w(f)) |0\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}(f, D_F f)\right). \quad (7.37)$$

Durch Ableiten des Funktionals  $Z_0$  können wir nun die Vakuumerwartungswerte aller zeitgeordneten Produkte des *freien Feldes* berechnen,

$$i^{2n} \langle 0|T \phi_w(x_1) \cdots \phi_w(x_{2n}) |0\rangle = \frac{\delta^{2n}}{\delta f(x_1) \cdots \delta f(x_{2n})} Z_0[f] \Big|_{f=0}. \quad (7.38)$$

Allerdings können wir auch das Funktional  $Z[f]$  in der Zauberformel (7.25) auf  $Z_0[f]$  zurückführen. Dazu entwickeln wir  $Z[f]$  in Potenzen des Potentials,

$$\begin{aligned} Z[f] &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i)^m}{m!} \int d^4 z_1 \cdots d^4 z_m \langle 0|T e^{i\phi_w(f)} \mathcal{V}(\phi_w(z_1)) \cdots \mathcal{V}(\phi_w(z_m)) |0\rangle \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-i)^m}{m!} \left\{ \int d^4 z \mathcal{V}\left(\frac{\delta}{i\delta f(z)}\right) \right\}^m \langle 0|T e^{i\phi_w(f)} |0\rangle. \end{aligned}$$

Diese Reihe kann wieder als Exponentialfunktion geschrieben werden,

$$Z[f] = \exp\left\{-i \int d^4 z \mathcal{V}\left(\frac{\delta}{i\delta f(z)}\right)\right\} Z_0[f]. \quad (7.39)$$

Eingesetzt in die Zauberformel (7.25) führt dies unmittelbar auf die Störungsentwicklung für die Distributionen  $\tau(x_1, \dots, x_n)$ . Alternativ dazu kann man direkt das Resultat (7.22) als Ausgangspunkt wählen. Die Störungsreihe erhält man durch eine Entwicklung der rechten Seite von (7.22) in Potenzen der Wechselwirkung  $\mathcal{V}$ . Dabei stößt man für eine Theorie mit  $\mathcal{V} = \lambda\phi^4/4!$  in der  $m$ -ten Ordnung der Störungstheorie auf die Berechnung von

$$\left(\frac{\lambda}{4!}\right)^m \int d^4 z_1 \cdots d^4 z_m \langle 0|T (\phi_w(x_1) \cdots \phi_w(x_n) \phi_w^4(z_1) \cdots \phi_w^4(z_m)) |0\rangle. \quad (7.40)$$

Hier treten nur der Grundzustand des freien Hamilton-Operators  $H_0$  auf und das Quantenfeld  $\phi_w(x)$ , dessen Zeitentwicklung durch  $H_0$  bestimmt wird.

## 7.2 Das Wick'sche Theorem

In diesem Abschnitt werden wir die zeitgeordneten Vakuums-Erwartungswerte in der freien Theorie berechnen. Für zwei Felder erhalten wir den Feynman-Propagator

$$\langle 0|T\phi_w(x)\phi_w(y)|0\rangle = i\Delta_F(x-y) \equiv D_F(x-y). \quad (7.41)$$

In diesem Abschnitt werden wir vorwiegend das freie Feld  $\phi_w(x)$  behandeln und deshalb den Index  $w$  weglassen. Die Erwartungswerte von mehreren freien Feldern folgen aus (7.38),

$$\langle 0|T\phi(x_1)\cdots\phi(x_{2n})|0\rangle = \frac{1}{2^n} \frac{1}{n!} \frac{\delta^{2n}}{\delta f(x_1)\cdots\delta f(x_{2n})} (f, D_F f)^n. \quad (7.42)$$

Eine nur scheinbar andere Berechnungsart macht Gebrauch von der Zerlegung des freien Quantenfeldes in seine positiven und negativen Frequenzanteile,

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x) \quad \text{mit} \quad \phi^+(x)|0\rangle = 0 \quad \text{und} \quad \langle 0|\phi^-(x) = 0, \quad (7.43)$$

und erinnern an deren Kommutationsregeln

$$[\phi^\pm(x), \phi^\pm(y)] = 0, \quad [\phi^+(x), \phi^-(y)] = W(x-y)\mathbb{1}. \quad (7.44)$$

Damit können wir den Ausdruck für das Produkt zweier Feldoperatoren

$$\phi(x)\phi(y) = \phi^+(x)\phi^+(y) + \phi^+(x)\phi^-(y) + \phi^-(x)\phi^+(y) + \phi^-(x)\phi^-(y) \quad (7.45)$$

durch die Ersetzung  $\phi^+(x)\phi^-(y) = \phi^-(y)\phi^+(x) + W(x-y)$  wie folgt umordnen

$$\phi(x)\phi(y) - W(x-y) = \phi^+(x)\phi^+(y) + \phi^-(y)\phi^+(x) + \phi^-(x)\phi^+(y) + \phi^-(x)\phi^-(y)$$

Wegen  $W(x-y) = \langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle$  verschwindet der Vakuumerwartungswert der rechten Seite. Sie ist das *normalgeordnete Produkt* der Operatoren  $\phi(x)$  und  $\phi(y)$  und wird üblicherweise mit  $:\dots:$  oder mit  $N\{\dots\}$  bezeichnet,

$$:\phi(x)\phi(y): \equiv N\{\phi(x)\phi(y)\} = \phi(x)\phi(y) - \langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle \quad (7.46)$$

bezeichnet. Wegen (7.44) ist das normalgeordnete Produkt symmetrisch in  $x$  und  $y$ ,

$$:\phi(x)\phi(y): = :\phi(y)\phi(x):. \quad (7.47)$$

Für das Produkt von mehr als zwei Feldoperatoren definiert man das Normalprodukt ganz ähnlich: Man zerlegt jeden Faktor in  $\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)$  in seinen positiven und negativen Frequenzanteil und multipliziert aus. In jedem der  $2^n$  Terme bringe man die Faktoren mit negativen Frequenzen (oder mit den  $a_p^\dagger$ ) nach links und die Faktoren mit den positiven Frequenzen (oder den  $a_p$ ) nach rechts. Im normalgeordneten Produkt stehen also alle Vernichtungsoperatoren  $a_p$  rechts von allen Erzeugungsoperatoren  $a_p^\dagger$ . Zum Beispiel ist

$$:a_p a_q a_k: = a_q a_p a_k.$$

Die Ordnung von  $a_p$  und  $a_k$  auf der rechten Seite spielt keine Rolle, da sie vertauschen. Der Vakuumerwartungswert eines normalgeordneten Produktes von  $a$  und  $a^\dagger$  verschwindet.

Um die Notation zu vereinfachen schreiben wir vorübergehend  $\phi_i$  für  $\phi(x_i)$ . Das normal geordnete Produkt des Feldoperators an  $n$  Punkten ist symmetrisch in seinen Argumenten,

$$\begin{aligned} :\phi_1 \cdots \phi_n: &= \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}} \prod_{i \in I} \phi_i^- \prod_{j \notin I} \phi_j^+ \\ &= \phi_k^- :\phi_1 \cdots \check{\phi}_k \cdots \phi_n: + :\phi_1 \cdots \check{\phi}_k \cdots \phi_n: \phi_k^+. \end{aligned} \quad (7.48)$$

Der Akzent über  $\phi_k$  deutet an, dass der Faktor  $\phi_k$  im Normalprodukt wegzulassen ist. Ziehen wir nun  $\phi_1^+$  durch das normal-geordnete Produkt  $:\phi_2 \cdots \phi_n:$ , so erhalten wir

$$\begin{aligned} \phi_1^+ :\phi_2 \cdots \phi_n: &= W(x_1, x_2) :\phi_3 \cdots \phi_n: + \dots \\ &\quad \cdots + W(x_1, x_n) :\phi_2 \cdots \phi_{n-1}: + :\phi_2 \cdots \phi_n: \phi_1^+, \end{aligned}$$

beziehungsweise die Vertauschungsrelation

$$[\phi_1^+, :\phi_2 \cdots \phi_n:] = \sum_{k=2}^n W(x_1, x_k) :\phi_2 \cdots \check{\phi}_k \cdots \phi_n: .$$

Diese benutzen wir, um eine nützliche Rekursionsrelation für Normalprodukte zu beweisen,

$$\begin{aligned} \phi_1 :\phi_2 \cdots \phi_n: &= \phi_1^- :\phi_2 \cdots \phi_n: + :\phi_2 \cdots \phi_n: \phi_1^+ + [\phi_1^+, :\phi_2 \cdots \phi_n:] \\ &= :\phi_1 \phi_2 \cdots \phi_n: + \sum_{k=2}^n W(x_1, x_k) :\phi_2 \cdots \check{\phi}_k \cdots \phi_n: \end{aligned} \quad (7.49)$$

In der Literatur wird für die auftretenden Kontraktionen ein eigenes Symbol eingeführt,

$$\overbrace{\phi_1 \phi_2 \cdots \phi_k \cdots \phi_n} = W(x_1, x_k) :\check{\phi}_1 \phi_2 \cdots \check{\phi}_k \cdots \phi_n: . \quad (7.50)$$

Es treten auch Kontraktionen von mehr als zwei Feldern auf, zum Beispiel

$$\begin{aligned} &:\phi_1 \cdots \overbrace{\phi_i \cdots \phi_j} \cdots \overbrace{\phi_k \cdots \phi_l} \cdots \phi_n: \\ &= W(x_i, x_j) W(x_k, x_l) :\phi_1 \cdots \check{\phi}_i \cdots \check{\phi}_j \cdots \check{\phi}_k \cdots \check{\phi}_l \cdots \phi_n: \end{aligned}$$

Mit dieser Notation schreibt sich das Produkt von drei und vier Operatoren wie folgt,

$$\begin{aligned} \phi_1 \phi_2 \phi_3 &= :\phi_1 \phi_2 \phi_3: + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3} + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3} + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3} \\ \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 &= :\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4: + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4} + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4} + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4} + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4} \\ &\quad + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4} + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4} + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4} + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4} + \overbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4} . \end{aligned}$$

Für höhere Produkte findet man das entsprechende Resultat: Das Produkt und normalgeordnete Produkt von Feldoperatoren unterscheiden durch alle normalgeordnete Kontraktionen

$$\phi_1 \phi_2 \cdots \phi_n = :\phi_1 \phi_2 \cdots \phi_n: + \text{alle möglichen Kontraktionen:} . \quad (7.51)$$

Nur für gerades  $n$  können *alle* Operatoren kontrahiert werden und die Anzahl vollständiger Kontraktionen ist  $(n - 1)!!$ .

Die gleichen Regeln gelten für zeitgeordnete Produkte von Feldoperatoren wenn wir für eine Kontraktion nicht die Wightman-Funktion sondern den Feynman-Propagator einsetzen. Die Zeitordnung ändert ein normalgeordnetes Produkt nicht, da dieses symmetrisch in den Argumenten ist. Zum Beispiel findet man mit der Abkürzung  $x_{ij} = x_i - x_j$  für das zeitgeordnete Produkt des Feldoperators an 4 Punkten

$$\begin{aligned} T(\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4) &= :\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 + D_F(x_{12})\phi_3\phi_4 + D_F(x_{13})\phi_2\phi_4 + D_F(x_{14})\phi_2\phi_3 + \\ &+ D_F(x_{23})\phi_1\phi_4 + D_F(x_{24})\phi_1\phi_3 + D_F(x_{34})\phi_1\phi_2 \\ &+ D_F(x_{12})D_F(x_{34}) + D_F(x_{13})D_F(x_{24}) + D_F(x_{14})D_F(x_{23}): \end{aligned}$$

### 7.2.1 Zur Kombinatorik

Für die Aufzählung der verschiedenen Terme genügt es, eine Feldtheorie in Null Dimensionen zu betrachten. Dann gibt es nur einen Erzeugungs- und einen Vernichtungsoperator,  $\phi = a + a^\dagger$  mit  $[a, a^\dagger] = 1$ . Mit der Campbell-Baker-Hausdorff-Formel folgt

$$\exp(if\phi) = \exp(ifa^\dagger) \exp(ifa) \exp\left(\frac{1}{2}f\right) = :\exp\left(if\phi + \frac{1}{2}f^2\right):. \quad (7.52)$$

Mit der erzeugenden Funktion für die Hermite-Polynome

$$\exp(w^2 + 2wx) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} w^n \quad (7.53)$$

kann man beide Seiten in (7.52) in Potenzen von  $f$  entwickeln und Koeffizienten vergleichen. Man findet

$$\phi^n = \left(\frac{1}{i\sqrt{2}}\right)^n :H_n\left(\frac{i\phi}{\sqrt{2}}\right):. \quad (7.54)$$

Mit der bekannten Taylor-Entwicklung für die Hermite-Polynome ergibt sich

$$\phi^{2n} = (2n - 1)!! \left(1 + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \frac{:\phi^{2j}:}{(2j - 1)!!}\right) \quad (7.55)$$

$$\phi^{2n+1} = (2n + 1)!! \left(\phi + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \frac{:\phi^{2j+1}:}{(2j + 1)!!}\right). \quad (7.56)$$

Zum Beispiel findet man

$$\begin{aligned} \phi^3 &= :\phi^3 + 3\phi: \\ \phi^4 &= :\phi^4 + 6\phi^2 + 3: \\ \phi^5 &= :\phi^5 + 10\phi^3 + 15\phi: \\ \phi^6 &= :\phi^6 + 15\phi^4 + 45\phi^2 + 15: \end{aligned} \quad (7.57)$$

### 7.3 Feynman Diagramme

Die Vakuumerwartungswerte von normalgeordneten Produkten des freien Feldes verschwinden und mit dem Wick'schen Theorem können wir die in der Gellmann-Low-Formel auftretenden zeitgeordneten Vakuumerwartungswerte berechnen. Zum Beispiel ist

$$\langle 0|T\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4|0\rangle = D_F(x_{12})D_F(x_{34}) + D_F(x_{13})D_F(x_{24}) + D_F(x_{14})D_F(x_{23}). \quad (7.58)$$

Wir geben eine diagrammatische Interpretation der auftretenden Ausdrücke. Dabei wird jeder Raumzeitpunkt  $x$  mit einem Punkt bezeichnet und jeder Faktor  $D_F(x-y) = i\Delta_F(x-y)$  durch eine  $x$  mit  $y$  verbindende Linie. Dem Vakuumerwartungswert des zeitgeordneten Produkts von vier freien Feldoperatoren (7.58) sind folgende drei Feynmandiagrammen zugeordnet:

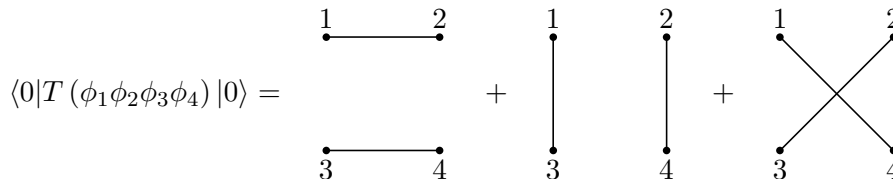


Abbildung 7.1: Die zur 4-Punktsfunktion beitragenden Graphen.

Die Summe der den Diagrammen zugeordneten Amplituden ist dann der Vakuumerwartungswert. Nun betrachten wir den Beitrag in der ersten Ordnung Störungstheorie zur Zweipunktsfunktion  $\langle \Omega|T\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle$ , wobei wir vorerst den Nenner in der Gellmann-Low-Formel nicht berücksichtigen,

$$\int d^4z \langle 0|T\phi(x)\phi(y)\mathcal{V}_w(\phi(z))|0\rangle = \frac{\lambda}{4!} \int d^4z \langle 0|T\phi(x)\phi(y)\phi^4(z)|0\rangle.$$

Wenden wir das Wick-Theorem auf den Erwartungswert auf der rechten Seite an, so erhalten wir  $5!! = 15$  Terme. 12 Terme gehören zu zusammenhängenden Graphen und sind von folgendem Typus: Es wird  $\phi(x)$  mit einem der  $\phi(z)$ ,  $\phi(y)$  mit einem anderen  $\phi(z)$  und

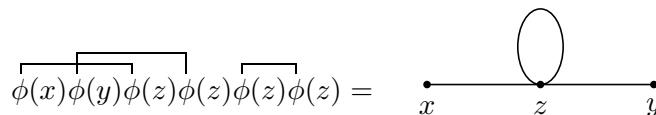


Abbildung 7.2: Wickkontraktionen.

schliessendlich die zwei verbleibenden  $\phi(z)$  miteinander kontrahiert. Die anderen drei Terme gehören zu nicht-zusammenhängenden Graphen bei denen  $\phi(x)$  mit  $\phi(y)$  und jeweils zwei Paare von  $\phi(z)$  kontrahiert werden, siehe Fig. 7.3. Wir finden also das Resultat

$$\overbrace{\phi(x)\phi(y)\phi(z)\phi(z)\phi(z)\phi(z)} = \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ \bullet \\ x \qquad y \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \circ \\ \text{---} \\ z \end{array}$$

Abbildung 7.3: Wickkontraktionen.

$$\begin{aligned} \int d^4z \langle 0|T \{ \phi(x)\phi(y)\mathcal{V}_w(\phi(z)) \} |0\rangle &= \frac{12\lambda}{4!} \int d^4z D_F(x-z)D_F(y-z)D_F(0) \\ &+ \frac{3\lambda}{4!} D_F(x-y) \int d^4z D_F(0)D_F(0). \end{aligned} \quad (7.59)$$

Für jede Linie ist ein Propagator einzusetzen und man nennt deshalb die Linien eines Diagramms selbst auch kurz Propagatoren. Wir müssen zwischen äußeren und inneren Punkten unterscheiden. Über die Koordinaten jedes inneren Punkt wird integriert und er liefert einen Faktor  $-i\lambda$ . Ein *innerer Punkt*, bei dem sich (in unserem Fall) 4 Linien treffen, heißt *Vertex*. Die Faktoren  $4!/12 = 2$  und  $4!/3 = 8$  heißen *Symmetriefaktoren*. Für Beträge höherer Ordnung ist die Berechnung dieser Faktoren etwas aufwendiger.

Alternativ können wir die Darstellung (7.39) für das Funktional  $Z[f]$  in Potenzen des Potentials entwickeln. So sind die Beiträge von der Ordnung  $\lambda^0$  und  $\lambda^1$  für die  $\phi^4$ -Theorie

$$\begin{aligned} Z[f] &= \left( 1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4z \frac{\delta^4}{\delta f^4(z)} + O(\lambda^2) \right) Z_0[f] \\ &= \left( 1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4z (3D_F^2(0) - 6D_F(0)(D_F f)^2(z) + (D_F f)^4(z)) \right) Z_0[f] + \dots, \end{aligned}$$

wobei wir die Abkürzung  $(D_F f)(z) = \int d^4u D_F(z-u)f(u)$  einführt. Das erzeugende Funktional  $Z[f]/Z[0]$  für die zeitgeordneten Vakuumerwartungswerte der wechselwirkenden Theorie hat dann wegen

$$\frac{1}{Z[0]} = 1 + \frac{i\lambda}{4!} \int 3D_F^2(0) + O(\lambda^2)$$

folgende Entwicklung in Potenzen der Kopplungskonstante

$$\frac{Z[f]}{Z[0]} = \left\{ 1 + \frac{i\lambda}{4!} \int dz (6D_F(0)(D_F f)^2(z) - (D_F f)^4(z)) \right\} Z_0[f] + O(\lambda^2). \quad (7.60)$$

Damit lautet die zeitgeordnete Zweipunktfunktion in erster Ordnung Störungstheorie

$$\begin{aligned} \tau(x_1, x_2) &= -\frac{\delta^2}{\delta f(x_1)\delta f(x_2)} \frac{Z[f]}{Z[0]} \\ &\approx D_F(x_1 - x_2) - \frac{i\lambda}{2} D_F(0) \int dz D_F(x_1 - z)D_F(x_2 - z). \end{aligned} \quad (7.61)$$



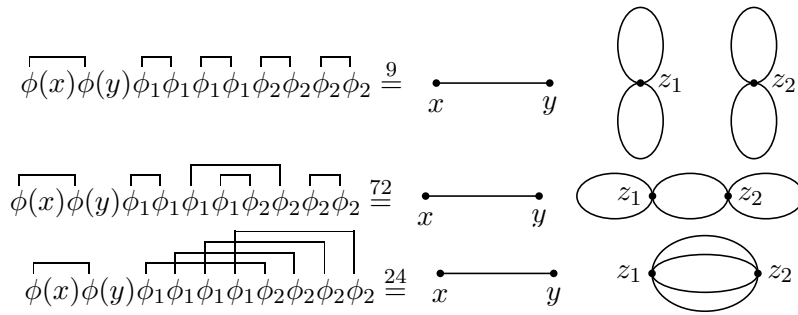
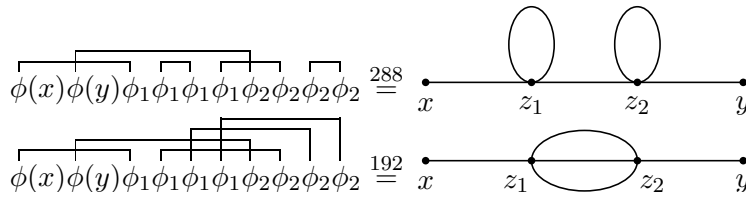


Abbildung 7.4: Wick-Kontraktionen



### 7.3.1 Zweite Ordnung Störungstheorie

Für die den Beitrag zur zeitgeordnete Zweipunktsfunktion in zweiter Ordnung Störungstheorie müssen wir

$$\frac{(-i\lambda)^2}{2!(4!)^2} \int d^4 z_1 d^4 z_2 \langle 0|T\phi(x_1)\phi(x)\phi(y)\phi^4(z_1)\phi^4(z_2)|0\rangle \quad (7.62)$$

berechnen. Nach der Wickschen Regel gibt es  $9!! = 945$  vollständige Kontraktionen des Produktes von 10 Faktoren. Da aber das Feld an den Raumzeit-Punkten  $z_i$  viermal auftritt, gibt es oft mehrere Kontraktionen mit demselben Graphen und derselben Amplitude:

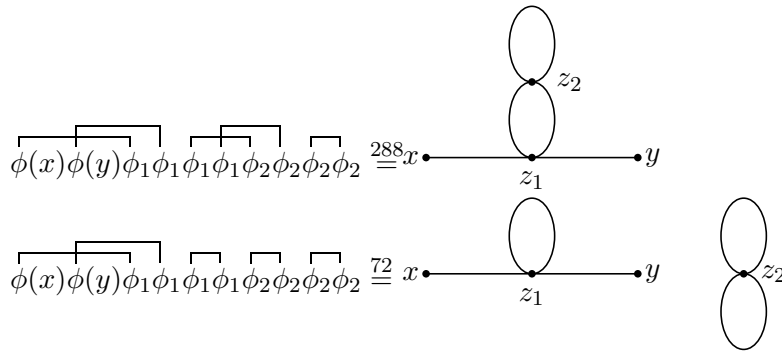
1. Wird  $\phi(x)$  mit  $\phi(y)$  kontrahiert, dann gibt es die  $7!! = 105$  Kontraktionen: Die zugehörigen 3 Diagramme sind nicht zusammenhängend und haben Symmetriefaktoren

$$\begin{aligned} S &= 2 \times 2^2 \cdot (2!)^4 = 128 \\ S &= 2 \cdot (2!)^3 = 16 \\ S &= 2 \cdot (4!) = 48. \end{aligned} \quad (7.63)$$

Die Bestimmung des Symmetriefaktors für ein Diagramm werden wir etwas später diskutieren.

2. Man kann auch  $\phi(x)$  mit dem Feld an einem inneren Vertex und  $\phi(y)$  mit einem Feld am anderen inneren Vertex kontrahiert werden. Davon gibt es 480 Kontraktionen mit den folgenden zusammenhängenden Graphen: Die beiden Graphen haben Symmetriefaktoren

$$S = (2!)^2 = 4 \quad \text{und} \quad S = (3!)^1 = 6. \quad (7.64)$$



3. Schlussendlich gibt es noch 360 Kontraktionen, bei denen  $\phi(x)$  und  $\phi(y)$  mit Feldern am selben inneren Vertex kontrahiert werden: Die beiden Graphen haben Symmetriefaktoren

$$S = 8 \times (2!)^1 = 16 \quad \text{und} \quad S = (2!)^2 = 4. \tag{7.65}$$

Wir haben jeweils über den Gleichheitszeichen die Anzahl Kontraktionen notiert, die zum jeweiligen Graphen führen.

Jedem Diagramm können wir nach den angegebenen Regeln einen analytischen Ausdruck zuordnen. Zum Beispiel dem zusammenhängenden Diagramm

$$\frac{(-i\lambda)^2}{S} \int d^4z_1 d^4z_2 D_F(x - z_1) D_F(y - z_1) D_F^2(z_1 - z_2) D_F(0).$$

Dabei haben wir den sogenannte *Symmetriefaktor*  $S(G)$  eines Graphen  $G$  eingeführt. Ist  $K(G)$  die Anzahl vollständiger Kontraktionen die zum selben Graphen  $G$  gehören, dann ist

$$\frac{K(G)}{2!(4!)^2} \equiv \frac{1}{S(G)}. \tag{7.66}$$

Der Symmetriefaktor ist leichter zu bestimmen als die Anzahl Kontraktionen. Für Diagramme der Ordnung  $n$  der Störungstheorie lautet die Beziehung

$$\frac{K(G)}{n!(4!)^n} \equiv \frac{1}{S(g)} \tag{7.67}$$

Wie berechnet man diesen Faktor. Bei der Zählung der Anzahl Kontraktionen die zum gleichen Graphen führen, hebt sich der Faktor  $n!$  fast immer gegen die Anzahl Permutationen der inneren Vertizes weg. An einem typischen Vertex  $z$  kommen vier Linien von vier anderen Vertizes an. Die Anzahl Möglichkeiten der Kontraktionen in  $\phi\phi\phi\phi$  ist  $4!$  und dies hebt den Nenner des Vertexbeitrages  $-i\lambda/4!$  weg. Weil sich die Fakultäten beinahe wegheben, assoziiert man einen Faktor  $-i\lambda$  mit jedem Vertex. Diese Weghebung geschieht nur, wenn der Graph keinerlei Symmetrien aufweist. Für Graphen mit Symmetrien wird die Anzahl Kontraktionen mit einem Faktor, dem sogenannten *Symmetriefaktor*, überzählt. Der Symmetriefaktor zählt auf wie viele Arten man die Komponenten eines Graphen vertauschen kann, ohne den Graphen zu ändern.

Der Symmetriefaktor eines Graphen ist die Ordnung der Symmetrie (Permutations) Gruppe des Graphen, wenn alle äußeren Linien und Vertizes festgehalten werden. Er ist gegeben durch das folgende Produkt [38]

$$S = R \cdot 2^{D_1} \cdot (2!)^{D_2} \cdot (3!)^{D_3} \cdot (4!)^{D_4}, \quad (7.68)$$

wobei  $R$  die Anzahl Permutationen von inneren Vertizes zählt, die den Graphen nicht ändern. Dabei dürfen die Vertizes nicht mit einem äußeren Vertex verbunden sein. Die Exponenten  $D_i$  haben folgende Bedeutungen:

- $D_1$  zählt die Anzahl Paare von Propagatoren  $D_F^2(z, z)$ , also die Anzahl Paare von Linien, die an einem inneren Vertex  $z$  beginnen und am gleichen Vertex enden.
- $D_2$  zählt die Anzahl Paare von Propagatoren  $D_F^2(z, z')$  mit  $z \neq z'$  plus die Anzahl Propagatoren  $D_F(z, z)$ . Also die Anzahl Paare von Linien, die an einem inneren Vertex beginnen und an einem anderen inneren Vertex enden plus die Anzahl Propagatoren, die am selben inneren Vertex beginnen und enden. Man beachte, dass  $D_F^2(z, z)$  eine 1 zum Exponenten  $D_1$  und eine 2 zum Exponenten  $D_2$  beiträgt.
- $D_3$  zählt die Anzahl Triplette von Propagatoren  $D_F^3(z, z')$  mit  $z \neq z'$ . Dies ist gleich der Anzahl Triplette von Linien zwischen zwei inneren Vertizes.
- $D_4$  zählt die Anzahl Quartette von Propagatoren  $D_F^4(z, z')$  mit  $z \neq z'$  oder die Anzahl Quartette von Linien zwischen zwei inneren Vertizes.

Für nicht-zusammenhängende Graphen erhält man das Produkt der Symmetriefaktoren seiner Zusammenhantskomponenten, eventuell noch versehen mit einem zusätzlichen Faktor, falls die Komponenten identisch sind. Beim Beweis der nützlichen und expliziten Formel (7.68) für die Symmetriefaktoren benutzt man die Zauberformel (7.25) von GELLMANN und LOW, worin man die (exponentierte) Störungsreihe (7.39) für  $Z[f]$  einsetzt. Für das darin auftretende erzeugende Funktional  $Z_0[f]$  der  $n$ -Punktfunktionen des freien Feldes braucht man die explizite Formel (7.37).

Wir haben die Symmetriefaktoren der Beiträge zweiter Ordnung zur Zweipunktfunktion mit der Formel (7.68) berechnet und in (7.63,7.64) und (7.65) angegeben. Damit ergeben

sich schlussendlich folgende Beiträge bis zur zweiten Ordnung:

$$\begin{aligned}
\langle 0|T\phi(x)\phi(y)\exp(-i\int d^4z\mathcal{V}(\phi(z)))|0\rangle &= D_F(x-y) \\
&- i\lambda\int dz\left(\frac{D_F(x-z)D_F(y-z)D_F(0)}{2}+\frac{D_F(x-y)D_F^2(0)}{8}\right) \\
&- \lambda^2\int dz_1dz_2\left\{D_F(x-y)\left(\frac{D_F^4(0)}{128}+\frac{D_F^2(0)D_F^2(z_1-z_2)}{16}+\frac{D_F^4(z_1-z_2)}{48}\right)\right. \\
&\quad + D_F(x-z_1)D_F(y-z_2)\left(\frac{D_F(z_1-z_2)D_F^2(0)}{4}+\frac{D_F^3(z_1-z_2)}{6}\right) \\
&\quad \left. + D_F(x-z_1)D_F(y-z_1)\left(\frac{D_F^3(0)}{16}+\frac{D_F^2(z_1-z_2)D_F(0)}{4}\right)\right\}+\dots \quad (7.69)
\end{aligned}$$

Entsprechend erhalten wir für den Nenner in der Gellmann-Low-Formel bis zur zweiten Ordnung der Störungstheorie

$$\begin{aligned}
Z[0] &= \langle 0|T\exp(-i\int d^4z\mathcal{V}(\phi(z)))|0\rangle \\
&= 1 - i\lambda\int dz\frac{D_F^2(0)}{8} \\
&\quad - \lambda^2\int dz_1dz_2\left(\frac{D_F^4(0)}{128}+\frac{D_F^2(z_1-z_2)D_F^2(0)}{16}+\frac{D_F^4(z_1-z_2)}{48}\right)+\dots,
\end{aligned}$$

und entsprechend

$$\frac{1}{Z[0]} = 1 + i\lambda\int dz\frac{D_F^2(0)}{8} + \lambda^2\int dz_1dz_2\left(\frac{D_F^2(z_1-z_2)D_F^2(0)}{16}+\frac{D_F^4(z_1-z_2)}{48}\right).$$

Multipliziert man dies mit (7.69) und behält Terme bis zur zweiten Ordnung, dann heben sich alle Terme in (7.69) weg, die von nicht-zusammenhängenden Graphen herrühren,

$$\begin{aligned}
\tau(x,y) &= D_F(x-y) - i\lambda\int dz\frac{D_F(x-z)D_F(y-z)D_F(0)}{2} \\
&- \lambda^2\int dz_1dz_2\left(D_F(x-z_1)D_F(y-z_2)\left(\frac{D_F(z_1-z_2)D_F^2(0)}{4}+\frac{D_F^3(z_1-z_2)}{6}\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{D_F(x-z_1)D_F(y-z_1)D_F^2(z_1-z_2)D_F(0)}{4}\right). \quad (7.70)
\end{aligned}$$

Hier ist eine allgemeinere Eigenschaft des Quotienten in der Gellmann-Low-Formel zum Vorschein gekommen, nach der sich die nicht-zusammenhängenden Graphen wegheben, und diese Eigenschaft werden wir nun beweisen.

### 7.3.2 Verbundenen Diagramme

Jedes Diagramm zerfällt in Zusammenhangskomponenten. Wir betrachten einen Graphen mit zwei äußeren Vertizes. Da an den äußeren Vertizes je eine Linie und an jedem inneren Vertex eine gerade Anzahl von Linien endet, liegen die äußeren Vertizes in derselben Zusammenhangskomponenten,

$$G = G_{xy} + G_1 + \cdots + G_m. \quad (7.71)$$

Die  $G_i$  enthalten keinen äußeren Vertex, es sind verbundene *Vakuumphagen*. Einem derartigen Diagramm wird die Amplitude

$$A(G) = A(G_{xy}) \prod_{i=1}^m \frac{A(G_i)}{S} \quad (7.72)$$

mit Symmetriefaktor  $S$  zugeordnet. Tritt ein Vakuumphage  $n_i$  mal auf, dann ist sein Beitrag zum Symmetriefaktor gleich  $n_i!$ . Schreiben wir in (7.72) nur die *verschiedenen* Graphen zusammen mit ihren 'Vielfachheiten' an, dann schreibt sich die Amplitude wie folgt,

$$A(G) = A(G_{xy}) \prod_{i=1}^n \frac{1}{n_i!} A_i^{n_i}, \quad A_i = A(G_i) \quad (7.73)$$

Im folgenden bezeichne  $\mathcal{G}_{xy}^c$  die Menge der verbundenen Graphen mit zwei äußeren Vertizes. Die Summe aller Amplituden, welche im Zähler der Gellmann-Low-Formel für die zeitgeordnete Zweipunktsfunktion auftritt, lautet

$$\sum_{G_{xy} \in \mathcal{G}_{xy}^c} A(G_{xy}) \times \sum_{\{n_i\}} \left( \prod_i \frac{1}{n_i!} A_i^{n_i} \right). \quad (7.74)$$

Der zweite Faktor ist die exponentierte Summe aller zusammenhängender Graphen,

$$\begin{aligned} \left( \sum_{n_1} \frac{1}{n_1!} A_1^{n_1} \right) \left( \sum_{n_2} \frac{1}{n_2!} A_2^{n_2} \right) \cdots &= \prod_i \left( \sum_{n_i} \frac{1}{n_i!} A_i^{n_i} \right) \\ &= \prod_i \exp(A_i) = \exp \left( \sum_i A_i \right) \end{aligned}$$

Die Summe der Beiträge aller Graphen zur Zweipunktsfunktion ist gleich die Summe aller verbundenen Zweipunktsfunktionen in  $\mathcal{G}_{xy}$ , multipliziert mit dem Exponential der Summe über alle verbundenen Vakuumphagen. Graphisch sieht dies folgendermaßen aus:

$$\lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \langle 0 | T \phi(x) \phi(y) \exp \left( -i \int d^4 y \mathcal{V}(\phi(y)) \right) | 0 \rangle \quad (7.75)$$

Der Nenner in der Gellmann-Low-Formel (7.24) ist die Summe über *Vakuumphagen* und damit das Exponential aller zusammenhängender Vakuumphagen, Die Exponentialfunk-

$$= \left( \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ x \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ y \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ x \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ y \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ x \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ y \end{array} + \dots \right) \times \exp \left( \begin{array}{c} \text{O} \\ \text{O} \\ \text{O} \\ \text{O} \end{array} + \dots \right)$$

$$\langle 0|T \exp(-i \int d^4y \mathcal{V}(\phi(y))) |0\rangle = \exp \left( \begin{array}{c} \text{O} \\ \text{O} \\ \text{O} \\ \text{O} \end{array} + \dots \right).$$

tionen im Zähler und Nenner der Gellmann-Low-Formel heben sich weg und wir finden das einfache Resultat, dass zur Zweipunktsfunktion nur alle zusammenhängenden Graphen mit zwei äußeren Vertizes beitragen. Die Verallgemeinerung von der Zweipunktsfunktion auf beliebige  $n$ -Punktsfunktionen ist naheliegend und nicht viel schwieriger zu beweisen:

$$\langle \Omega|T \phi(x_1) \cdots \phi(x_n)|\Omega\rangle = \left( \begin{array}{l} \text{Summe der Amplituden von verbundenen} \\ \text{Graphen mit äußeren Vertizes } x_1, \dots, x_n \end{array} \right). \quad (7.76)$$

Mit verbunden meint man hier, dass jeder innere Vertex mit irgend einem äußeren Vertex verbunden sein muss. Äußere Vertizes können dabei auch unverbunden sein. Die folgenden Diagramme tragen zur 4-Punktsfunktion bei: Nachdem wir die Feynmanregeln im Ortsraum (inklusive Symmetriefaktoren) genügend ausführlich besprochen haben, wollen wir diese auch noch im Impulsraum formulieren. Ausgangspunkt ist die Fourier-Darstellung des Feynman-Propagators,

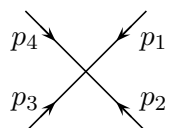
$$D_F(x - y) = i\Delta_F(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)}, \quad (7.77)$$

der zu jeder Linie in einem Diagramm gehört. Wir ordnen also jeder Linie einen 4-er Impuls  $p$  zu und zeigen die Richtung von  $p$  mit einem Pfeil an (das  $D_F$  eine gerade Funktion ist, ist für die  $\phi^4$ -Theorie die Richtung willkürlich). Treffen sich vier Linien an einem inneren Vertex, dann ergibt die Integration über die Position des Vertex Die auftretende Delta-Distribution bedeutet, dass an jedem inneren Vertex *Energie und Impuls* erhalten sind. Die gestattet auch, einige der auftretenden Impulsintegrationen explizit auszuführen. Damit erhält man folgende Feynmanregeln im *Impulsraum*:

1. Für jeden Propagator  $\begin{array}{c} p \\ \longrightarrow \end{array} = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$
2. Für jeden Vertex  $\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} p = -i\lambda$

$$\langle \Omega|T \phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle = \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ x \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ y \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ x \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ y \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ x \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ y \end{array} \dots$$

$$\langle \Omega | T \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 | \Omega \rangle = \text{---} + \text{---} + \text{---} + \frac{\text{O}}{\text{---}} + \text{---} + \dots$$



$$\longleftrightarrow \int d^4 z e^{-ip_1 z} e^{-ip_2 z} e^{-ip_3 z} e^{-ip_4 z} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4).$$

3. Für jeden äußeren Vertex  $\xrightarrow{p} \bullet_x = e^{-ipx}$

4. An jedem inneren Vertex gilt 4-er Impulserhaltung

5. Integriere über die unbestimmten Impulse  $\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$

6. Dividiere durch den Symmetriefaktor.

Schlussendlich bemerken wir noch, dass die Vorschrift

$$\lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \int_{-T}^T dt,$$

auf die wir in (7.16) stießen, sich im Impulsraum in die Vorschrift für die  $p^0$ -Integration übersetzt. In der komplexen  $p^0$ -Ebene muss man folgenden Integrationsweg wählen,



Dieser Integrationsweg führt aber genau auf den Feynman-Propagator. Für mehr Details verweise ich (zum Beispiel) auf das Lehrbuch von PESKIN und SCHROEDER [11]. Insbesondere die hier gegebene Ableitung der wichtigen Gellmann-Low-Formel findet man in diesem Buch.

## 7.4 Aufgaben

### Aufgabe 1: Superficial degree of divergence in $\phi^n$ theory

Define the superficial degree of divergences  $D$  of a loop diagram to be the difference between the powers of the momenta in the numerator and denominator. Thus, e.g. for a loop diagram of the form  $\int d^d p \frac{1}{p^2 - m^2}$ , the superficial degree of divergence is  $D = d - 2$ .

1. Give a formula for  $D$  in scalar  $\phi^n$  theory (i.e. with an interaction term  $\propto \lambda \int d^d x \phi^n(x)$ ) in  $d$  dimensions depending on the number of vertices of the diagram. (The result of problem 25 of the previous exercise sheet might be helpful.)
2. What is the meaning of  $D > 0$ ,  $D = 0$  and  $D < 0$  respectively?
3. Using the fact that the action is dimensionless in natural units, what is the dimension of the coupling  $\lambda$ . How is it related to the superficial degree of divergence?

(Consider only connected loop diagrams for this exercise.)

### Aufgabe 2: Relation für Schleifendiagramme

Überzeugen Sie sich rein graphentheoretisch davon, dass die Zahl von geschlossenen Schleifen (loops)  $L$  eines zusammenhängenden Diagramms gegeben ist durch

$$L = I - V + 1$$

wobei  $I$  die Zahl der inneren Linien und  $V$  die Zahl der Vertizes bezeichnen. (Hinweis: beginnen Sie mit  $L = 0$ ). (Hierbei soll die Anzahl der Felder an einem Vertex *nicht* festgelegt sein.)



## 8 Streuprozesse

Die S-Matrix oder Streumatrix beschreibt die Streuamplituden. Sie wurde 1943 von Heisenberg eingeführt.

Die Betragsquadrate der Elemente der S-Matrix geben für einen Anfangs- und einen Endzustand die entsprechende Wahrscheinlichkeit, dass dieser Anfangszustand bei der Streuung in den Endzustand übergeht. Die nach Lehmann, Symanzik und Zimmermann benannte LSZ-Reduktionsformel besagt, dass sich die S-Matrix einer Quantenfeldtheorie aus den zeitgeordneten n-Punkt-Funktionen berechnen lässt.

Die Formulierung einer S-Matrix ist nur möglich, wenn vor und nach dem Streuvorgang die Existenz nicht wechselwirkender asymptotischer Zustände beziehungsweise Felder angenommen wird.

### 8.1 Ein lösbares Modell

Wir setzen unsere Diskussion der Kopplung eines freien Quantenfeldes an eine äußere Quelle  $q(x)$  im Abschnitt (4.6) fort. Wir erinnern an die Feldgleichung

$$(\square + m^2)\phi(x) = q(x). \quad (8.1)$$

Die allgemeine Lösung hatten wir als Lösung der homogenen Gleichung plus eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung geschrieben,

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi_{\text{ein}}(x) - \int_T^{x^0} dy^0 \int d\mathbf{y} \Delta_m(x-y)q(y) \\ &= \phi_{\text{ein}}(x) - \int_T^\infty dy^0 \int d\mathbf{y} \Delta_{\text{ret}}(x-y)q(y) \end{aligned} \quad (8.2)$$

mit  $\Delta_{\text{ret}}(x) = \theta(x^0)\Delta_m(x)$ . Diese Lösung 'berührt' das freie Feld  $\phi_{\text{ein}}$  zur Zeit  $T$ ,

$$\phi(T, \mathbf{x}) = \phi_{\text{ein}}(T, \mathbf{x}) \quad \text{und} \quad \dot{\phi}(T, \mathbf{x}) = \dot{\phi}_{\text{ein}}(T, \mathbf{x}). \quad (8.3)$$

Die erste Eigenschaft ist evident, und die zweite folgt aus (wir halten  $\mathbf{x}$  fest)

$$\frac{d}{dt} \int_T^t dt' \Delta_m(t-t')q(t') \stackrel{\Delta_m(0)=0}{=} \int_T^t dt' \dot{\Delta}_m(t-t')q(t'),$$

ausgewertet zur Zeit  $T$ . Wir wollen annehmen, der Grenzfall  $T \rightarrow -\infty$  existiere und finden

$$\phi(x) = \phi_{\text{ein}}(x) - \int d^4y \Delta_{\text{ret}}(x-y)q(y). \quad (8.4)$$

Für sehr frühe Zeiten konvergiert (für geeignete  $q(y)$ ) diese Lösung gegen  $\phi_{\text{ein}}$  und deshalb nennen wir  $\phi_{\text{ein}}$  das einlaufende Feld. Ähnlich berührt die Lösung

$$\phi(x) = \phi_{\text{aus}}(x) + \int_{x^0}^T dy^0 \int d\mathbf{y} \Delta_m(x-y)q(y)$$

die freie Lösung  $\phi_{\text{aus}}$  zur Zeit  $T$ . Wir wollen wieder annehmen der Grenzfall  $T \rightarrow \infty$  existiere und erhalten

$$\phi(x) = \phi_{\text{aus}}(x) - \int d^4y \Delta_{\text{av}}(x-y)q(y) \quad \text{mit} \quad \Delta_{\text{av}}(x) = -\theta(-x^0)\Delta_m(x) \quad (8.5)$$

mit auslaufendem freien Feld  $\phi_{\text{aus}}$ . Für sehr späte Zeiten konvergiert  $\phi$  gegen  $\phi_{\text{aus}}$ . Mit  $\Delta_{\text{ret}} - \Delta_{\text{av}} = \Delta_m$  folgt

$$\phi_{\text{aus}}(x) = \phi_{\text{ein}}(x) - \int d^4y \Delta_m(x-y)q(y). \quad (8.6)$$

Die Pauli-Jordan-Funktion vermittelt zwischen der ein- und auslaufenden freien Lösung. Jeder der drei Terme in (8.6) ist eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung. Wir fassen die beiden asymptotischen freien Felder als Operatoren in einem *gemeinsamen* Hilbertraum  $\mathcal{H}$  auf. Demzufolge kann  $\mathcal{H}$  auf zwei Weisen als Fockraum geschrieben werden, wobei eine unitäre Transformation, der *Streuoperator*  $S$ , zwischen diesen beiden Darstellungen vermittelt. Wir konstruieren nun  $S$  für das betrachtete Modell.

Wir zerlegen die asymptotischen Felder in ihre Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

$$\phi_{\text{ein}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mu(\mathbf{p}) \left( a_p^{\text{ein}} e^{-ipx} + a_p^{\text{ein}\dagger} e^{ipx} \right) \quad (8.7)$$

$$\phi_{\text{aus}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mu(\mathbf{p}) \left( a_p^{\text{aus}} e^{-ipx} + a_p^{\text{aus}\dagger} e^{ipx} \right) \quad (8.8)$$

und definieren zwei Fock-Vakua,

$$a_p^{\text{ein}}|0\rangle_{\text{ein}} = 0 \quad \text{und} \quad a_p^{\text{aus}}|0\rangle_{\text{aus}} = 0. \quad (8.9)$$

Darauf aufbauend konstruieren wir die entsprechenden Mehrteilchenzustände,

$$|\mathbf{p}\rangle_{\text{ein}} = a_p^{\text{ein}\dagger}|0\rangle_{\text{ein}}, \quad |\mathbf{p}, \mathbf{p}'\rangle_{\text{ein}} = a_p^{\text{ein}\dagger} a_{p'}^{\text{ein}\dagger}|0\rangle_{\text{ein}}, \dots, \quad (8.10)$$

und analoge Zustände über  $|0\rangle_{\text{aus}}$ . Wir interpretieren sie als  $n$ -Teilchenzustände *vor* bzw. *nach* dem Streuprozess.

Wir werden nun zeigen, dass es einen unitären Operator  $S$  gibt mit den Eigenschaften

$$a_p^{\text{aus}} = S^{-1} a_p^{\text{ein}} S, \quad a_p^{\text{aus}\dagger} = S^{-1} a_p^{\text{ein}\dagger} S \quad \text{und} \quad |0\rangle_{\text{aus}} = S^{-1}|0\rangle_{\text{ein}}. \quad (8.11)$$

Seine Eindeutigkeit folgt aus der Irreduzibilität der Fock-Darstellung. Der Beweis macht Gebrauch von der Fourierdarstellung der homogenen Lösung

$$\int d^4y \Delta_m(x-y) q(y) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mu(\mathbf{p}) (e^{-ipx} \tilde{q}(\mathbf{p}) + e^{ipx} \tilde{q}^*(\mathbf{p})). \quad (8.12)$$

Ein Vergleich mit (8.6) führt auf

$$a_p^{\text{aus}} = a_p^{\text{ein}} - \tilde{q}(\mathbf{p}) \quad \text{und} \quad a_p^{\text{aus}\dagger} = a_p^{\text{ein}\dagger} - \tilde{q}^*(\mathbf{p}). \quad (8.13)$$

Wir setzen voraus, dass

$$\int d\mu(\mathbf{p}) |\tilde{q}(\mathbf{p})|^2 < \infty \quad (8.14)$$

gilt, damit die Funktion  $\tilde{q}(\mathbf{p})$  im Hilbertraum der Einteilchen-Zustände liegt. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, dann sind die beiden mit „ein“ und „aus“ bezeichneten Darstellungen der kanonischen Vertauschungsrelationen inäquivalent zueinander und es existiert keine unitäre Streumatrix die zwischen den beiden Darstellungen vermittelt.

Wir führen einen unitären Operator

$$S = e^B \quad \text{mit} \quad B + B^\dagger = 0 \quad (8.15)$$

ein und machen Gebrauch von der Formel

$$S^{-1} a_p^{\text{ein}} S = a_p^{\text{ein}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \text{ad}^n(B) a_p^{\text{ein}}, \quad (8.16)$$

wobei  $\text{ad}(B)$  folgende lineare Abbildung auf dem Raum der linearen Operatoren ist,

$$\text{ad}(B)A \equiv [B, A], \quad \text{so dass} \quad \text{ad}^2(B)A = [B, [B, A]]. \quad (8.17)$$

Der anti-hermitesche Operator  $B$  soll so gewählt werden, dass die Reihe in (8.16) gleich  $-\tilde{q}(\mathbf{p})$  ist, damit die rechte Seite in dieser Formel gleich  $a_p^{\text{aus}}$  in (8.13) ergibt. Wenn wir

$$[B, a_p^{\text{ein}}] = \tilde{q}(\mathbf{p}) \mathbb{1}$$

fordern, dann bricht die Reihe nach dem ersten Glied ab und wir erhalten das gewünschte Ergebnis. Offensichtlich müssen wir

$$B = a_{\text{ein}}(\tilde{q}) - a_{\text{ein}}^\dagger(\tilde{q}), \quad a_{\text{ein}}^\dagger(\tilde{q}) = \int d\mu(\mathbf{p}) \tilde{q}(\mathbf{p}) a_p^{\text{ein}\dagger} \quad (8.18)$$

wählen, damit gilt

$$S^{-1} a_p^{\text{ein}} S = a_p^{\text{ein}} + [a_{\text{ein}}^\dagger(\tilde{q}), a_p^{\text{ein}}] = a_p^{\text{ein}} - \tilde{q}(\mathbf{p}) = a_p^{\text{aus}}. \quad (8.19)$$

Aus den Kommutationsregeln für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren folgt

$$[a_{\text{ein}}(\tilde{q}), a_{\text{ein}}^\dagger(\tilde{q})] = \int d\mu(\mathbf{p}) |\tilde{q}(\mathbf{p})|^2 \equiv \|\tilde{q}\|^2 \quad (8.20)$$

und damit können wir mit Hilfe der *CBH-Formel* den (inversen) Streuoperator umschreiben,

$$\begin{aligned} S^{-1} &= e^{a_{\text{ein}}^\dagger(\tilde{q}) - a_{\text{ein}}(\tilde{q})} = e^{a_{\text{ein}}^\dagger(\tilde{q})} e^{-a_{\text{ein}}(\tilde{q})} e^{-\frac{1}{2}\|\tilde{q}\|^2} \\ S &= e^{a_{\text{ein}}(\tilde{q}) - a_{\text{ein}}^\dagger(\tilde{q})} = e^{-a_{\text{ein}}^\dagger(\tilde{q})} e^{a_{\text{ein}}(\tilde{q})} e^{-\frac{1}{2}\|\tilde{q}\|^2} \end{aligned} \quad (8.21)$$

Deshalb sind die beiden Vakua wie folgt verbunden,

$$|0\rangle_{\text{aus}} = S^{-1}|0\rangle_{\text{ein}} = e^{-\frac{1}{2}\|\tilde{q}\|^2} e^{a_{\text{ein}}^\dagger(\tilde{q})}|0\rangle_{\text{ein}}. \quad (8.22)$$

Also ist der Grundzustand des auslaufenden Feldes ein *kohärenter Zustand* für das einlaufende Feld.

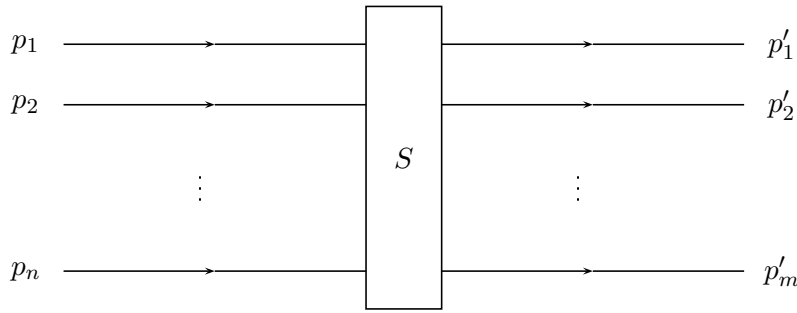
Hier sind einige Bemerkungen angebracht: Einfache Größen wie zum Beispiel die Teilchenzahl tritt in *zwei* Bedeutungen auf: einmal in Bezug auf das einlaufende Feld und einmal in Bezug auf das auslaufende Feld. Dies gilt im Prinzip für jede *Observable* wie zum Beispiel Impuls, Energie oder Ladung. Handelt es sich aber um eine *Erhaltungsgröße*, so fallen die beiden Versionen zusammen.

Ähnlich ist die Situation bei den *Zuständen*. A priori ist nicht klar, was wir meinen, wenn wir von einem Teilchenzustand mit Impuls  $p$  sprechen, da er in zwei Versionen auftritt, als einlaufender oder als auslaufender Zustand. Wir sagen, er ist in Bezug auf das einlaufende oder auslaufende Feld definiert.

Unabhängig vom gewählten Bild gelingt es aber, die Charakterisierung von Observablen und Zuständen allein in Bezug auf das einlaufende Feld vorzunehmen. Nach den Prinzipien der Quantenmechanik sind nur Erwartungswerte entscheidend, und die Vorschrift für ihre Berechnung muss eindeutig sein. Wie sieht dies in den beiden Bildern nun konkreter aus:

- Im Heisenberg-Bild ist der Zustand vor und nach dem Wechselwirkungsprozess der gleiche. Er kann durch einen Vektor  $|\Phi\rangle$  des Fockraums für das *einlaufende* Feld charakterisiert werden. Ist  $O$  eine Observable in bezug auf das einlaufende Feld, so gehört dazu die Observable  $S^{-1}OS$  nach dem Wechselwirkungsprozess. Anfänglich war der Erwartungswert  $\langle\Phi|O|\Phi\rangle$  und danach ist er  $\langle\Phi|S^{-1}OS|\Phi\rangle$ .
- Im Schrödinger-Bild ist eine Observable vor und nach dem Wechselwirkungsprozess die gleiche. Die konkrete Festlegung geschieht in Bezug auf das einlaufende Feld. Ist  $|\Phi\rangle$  der Zustand vor dem Prozess und in bezug auf das einlaufende Feld definiert, so ist  $S\Phi$  der Zustand danach. Aus dem anfänglichen Erwartungswert  $\langle\Phi|O|\Phi\rangle$  wird wie im Heisenberg-Bild  $\langle\Phi|S^{-1}OS|\Phi\rangle$ .

Obwohl beide Bilder zur Beschreibungen eines Quantensystems benutzt werden dürfen, sie sind ja äquivalent, wird das Schrödinger-Bild bei der Beschreibung von Streuexperimenten bevorzugt. Haben die beteiligten Teilchen feste Impulse, so charakterisiert man ein solches Experiment dann durch das folgende Diagramm Hier ist  $|p_1 p_2 \dots p_n\rangle^{\text{ein}}$  der *einlaufende* und  $S|p_1 p_2 \dots p_n\rangle^{\text{ein}}$  der *auslaufende Zustand*. Im Experiment wird der auslaufende Zustand nach möglichen Endzuständen  $|p'_1 p'_2 \dots p'_m\rangle$  von  $m$  Teilchen analysiert. Die naheliegende



Frage ist diejenige nach der Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Endzustand von  $m$  Teilchen bei einem gegebenen Anfangszustand von  $n$  Teilchen. Im Streuexperiment misst man jedoch nicht direkt diese Wahrscheinlichkeiten, sondern die Zahl der Ereignisse pro Zeit und Stromdichte der einfallenden Teilchen (Wirkungsquerschnitte). Die entscheidende Größe ist dabei die *Übergangsamplitude*

$$\begin{aligned} {}^{\text{aus}}\langle p'_1, \dots, p'_m | p_1, \dots, p_n \rangle^{\text{ein}} &= {}^{\text{aus}}\langle p'_1, \dots, p'_m | S | p_1, \dots, p_n \rangle^{\text{aus}} \\ &= {}^{\text{ein}}\langle p'_1, \dots, p'_m | S | p_1, \dots, p_n \rangle^{\text{ein}} \end{aligned} \quad (8.23)$$

Wir kehren zu unserem lösbaaren System zurück und beantworten die Frage, was die Quelle  $q(x)$  an Teilchen abstrahlt. Wir wollen also annehmen, dass anfänglich keine Teilchen vorhanden waren. Also berechnen wir

$$\begin{aligned} {}^{\text{ein}}\langle p'_1, \dots, p'_m | S | 0 \rangle^{\text{ein}} &= \frac{(-1)^m}{m!} e^{-\frac{1}{2}\|\tilde{q}\|^2} {}^{\text{ein}}\langle p'_1, \dots, p'_m | \left( a_{\text{ein}}^\dagger(\tilde{q}) \right)^m | 0 \rangle^{\text{ein}} \\ &= (-)^m e^{-\frac{1}{2}\|\tilde{q}\|^2} \tilde{q}(\mathbf{p}'_1) \cdots \tilde{q}(\mathbf{p}'_m), \end{aligned} \quad (8.24)$$

und diese Amplituden beschreiben die *Emission von Teilchen*. Für die *Absorption von  $n$  Teilchen* mit gegebenen Impulsen finden wir die Amplitude

$${}^{\text{aus}}\langle 0 | p_1, \dots, p_n \rangle^{\text{ein}} = e^{-\frac{1}{2}\|\tilde{q}\|^2} \tilde{q}^*(\mathbf{p}_1) \cdots \tilde{q}^*(\mathbf{p}_n). \quad (8.25)$$

Schliesslich gibt

$$|{}^{\text{aus}}\langle 0 | 0 \rangle^{\text{ein}}|^2 = e^{-\|\tilde{q}\|^2} \quad (8.26)$$

die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass weder Emission noch Absorption beobachtet wird.

## 8.2 Streuoperator im allgemeinen Fall

In einer nicht-linearen Theorie wechselwirken die mit dem Feld assoziierten Teilchen. Dies führt zu Emission, Absorption und Streuung von Teilchen und diese Effekte sollen im Folgenden untersucht werden. Wir betrachten ein wechselwirkendes Skalarfeld  $\phi(x)$  und leiten

einen allgemeinen Ausdruck für den Streuoperator ab. Dabei setzen die Gültigkeit der kanonischen Vertauschungsrelationen voraus:

$$[\phi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{y})] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)}. \quad (8.27)$$

Motiviert durch unsere Betrachtungen im letzten Abschnitt machen wir im weiteren Vorgehen folgende *drei Annahmen*:

1. Es existieren asymptotische freie Felder  $\phi_{\text{ein}}$  und  $\phi_{\text{aus}}$  und ihre kanonisch konjugierten Impulsfelder  $\pi_{\text{ein}}$  und  $\pi_{\text{aus}}$ . Die freien Felder erfüllen die Vertauschungsrelation (8.27).
2. Es existiert ein gemeinsamer Hilbertraum  $\mathcal{H}$ , auf dem alle Felder als Operatoren wirken. Die Darstellungen der kanonischen Vertauschungsrelationen für die wechselwirkenden und asymptotischen Felder sind unitär äquivalent, d.h. zu jeder Zeit  $t$  existiert ein unitärer Operator  $U(t)$  mit

$$\phi(t, \mathbf{x}) = U^{-1}(t)\phi_{\text{ein}}(t, \mathbf{x})U(t) \quad (8.28)$$

$$\pi(t, \mathbf{x}) = U^{-1}(t)\pi_{\text{ein}}(t, \mathbf{x})U(t). \quad (8.29)$$

Es existieren die Grenzwerte

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} U(t) = \mathbb{1} \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} U(t) = S. \quad (8.30)$$

Der eingeführte *Streuoperator*  $S$  ist unitär, d.h. jeder Operator, der zu einer festen Zeit mit  $\phi_{\text{ein}}$  und  $\pi_{\text{ein}}$  vertauscht, ist ein Vielfaches des Einheitsoperators.

Hier sind einige Bemerkungen angebracht:

1. Die Gültigkeit der kanonischen Vertauschungsrelationen (8.27) für wechselwirkende Felder ist ungeklärt und wurde von führenden Quantenfeldtheoretikern wie A. WIGHTMAN und R. STREATER in Frage gestellt.
2. Für Theorien mit Confinement mag die letzte Annahme zu stark sein. So treten weder Quarks noch Gluonen als asymptotische Zustände der Quantenchromodynamik auf.

Ausgehend von den Heisenberg-Gleichungen für das wechselwirkende Feld

$$i\dot{\phi} = [\phi, H], \quad i\dot{\pi} = [\pi, H] \quad \text{mit} \quad H = H[\pi, \phi] \quad (8.31)$$

und für das einlaufende freie Feld

$$i\dot{\phi}_{\text{ein}} = [\phi_{\text{ein}}, H_0], \quad i\dot{\pi}_{\text{ein}} = [\pi_{\text{ein}}, H_0] \quad \text{mit} \quad H_0 = H_0[\pi_{\text{ein}}, \phi_{\text{ein}}] \quad (8.32)$$

mit den entsprechenden Lösungen

$$\begin{aligned} \phi(t, \mathbf{x}) &= e^{iH(t-t_0)}\phi(t_0, \mathbf{x})e^{-iH(t-t_0)} \\ \phi_{\text{ein}}(t, \mathbf{x}) &= e^{iH_0(t-t_0)}\phi_{\text{ein}}(t_0, \mathbf{x})e^{-iH_0(t-t_0)} \end{aligned}$$

findet man die schon in (7.7) abgeleitete Zusammenhang

$$\phi(t, \mathbf{x}) = U^\dagger(t, t_0) \phi_{\text{ein}}(t, \mathbf{x}) U(t, t_0) \quad (8.33)$$

mit dem Zeitentwicklungsoperator im Wechselwirkungsbild,

$$U(t, t_0) = e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} = T \exp \left\{ -i \int_{t_0}^t dt' V_w(t') \right\}. \quad (8.34)$$

Das Potential im Wechselwirkungsbild ist

$$V_w(t) = \int d\mathbf{x} \mathcal{V}(\phi_{\text{ein}}(x)) \quad \text{mit} \quad \mathcal{V} = \mathcal{H} - \mathcal{H}_0. \quad (8.35)$$

Die Felder  $\phi$  und  $\phi_{\text{ein}}$  stimmen zur Zeit  $t_0$  überein. Damit  $\phi$  in der asymptotischen Vergangenheit gegen  $\phi_{\text{ein}}$  konvergiert, muss  $t_0$  gegen  $-\infty$  streben. In Einklang mit unseren Annahmen soll der Grenzwert

$$U(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} U(t, t_0) \quad (8.36)$$

existieren. In der asymptotischen Zukunft konvergiert das Feld dann gegen das auslaufende freie Feld,

$$\phi(t, \mathbf{x}) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \phi_{\text{aus}}(x) \quad (8.37)$$

mit unitärem *Streuoperator*

$$S = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ t_0 \rightarrow -\infty}} U(t, t_0) = T \exp \left\{ -i \int d^4x \mathcal{V}(x) \right\}, \quad \mathcal{V}(x) = \mathcal{V}(\phi_{\text{ein}}(x)), \quad (8.38)$$

wobei im letzten Integral über alle Raumzeitpunkte im Minkowski-Raum zu integrieren ist. Anstelle von  $\mathcal{V}$  findet man in der Literatur das Syvol  $\mathcal{H}_I$  oder wegen  $\mathcal{H}_I = -\mathcal{L}_I$  auch

$$S = T \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_I(\phi_{\text{ein}}) \right\}. \quad (8.39)$$

Ohne Wechselwirkung gibt es natürlich keine Streuung,

$$S = \mathbb{1} \quad \text{für} \quad \mathcal{V} = 0. \quad (8.40)$$

### Eigenschaften der *S*-Matrix

Wichtige allgemeine Eigenschaften der Streumatrix (des Streuoperators), wie zum Beispiel die Lorentz-Invarianz, die Unitarität und das daraus abgeleitete optische Theorem folgen aus den allgemeinen Prinzipien einer quantisierten relativistischen Feldtheorie und sollen hier besprochen werden.

- **Lorentzinvarianz:**

Der Term  $n$ 'ter Ordnung in der Entwicklung

$$S = \mathbb{1} + S^{(1)} + S^{(2)} + \dots \quad (8.41)$$

nach Potenzen des Potentials lautet

$$S^{(n)} = \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots \int d^4x_n T \mathcal{V}(x_1) \cdots \mathcal{V}(x_n). \quad (8.42)$$

Da  $\mathcal{V}(x)$  ein skalare Feld ist wäre (8.42) ohne Zeitordnung offensichtlich eine lorentz-invariante Größe.

Aber hier kommt uns zugute, dass  $\phi_{\text{ein}}$  ein *kausales Feld* ist, und deshalb  $\mathcal{V}$  an raumartig getrennten Punkten kommutiert,

$$[\mathcal{V}(x), \mathcal{V}(y)] = 0 \quad \text{für} \quad (x - y)^2 < 0. \quad (8.43)$$

Andererseits kann eine eigentliche Lorentz-Transformation die Zeitordnung von zeit- oder lichtartig getrennten Ereignissen nicht umkehren, da eine derartige Transformation den abgeschlossenen Vorwärts- bzw. Rückwärtslichtkegel in sich abbildet. Also ist (8.42) auch mit Zeitordnung Lorentzinvariant.

- **Unitarität:**

Der Streuoperator ist der asymptotische Limes des unitären Entwicklungsoperators im Wechselwirkungsbild und sollte deshalb unitär sein,

$$S^\dagger S = S S^\dagger = \mathbb{1}. \quad (8.44)$$

Sind  $|i\rangle$  und  $|j\rangle$  zwei Anfangszustände mit  $|i'\rangle = S|i\rangle$  und  $|j'\rangle = S|j\rangle$ , dann gilt

$$\langle i'|j'\rangle = \langle i|S^\dagger S|j\rangle = \sum_f \langle i|S^\dagger|f\rangle \langle f|S|j\rangle = \sum_f \bar{S}_{fi} S_{fj} = \langle i|j\rangle = \delta_{ij}. \quad (8.45)$$

Diese Identität drückt die Erhaltung der Wahrscheinlichkeit bei einem Streuprozess aus.

- **T-Matrix:**

Um triviale Übergänge  $|i\rangle \rightarrow |i\rangle$  bei denen nichts geschieht wegzulassen definiert man die *Übergangsmatrix*  $T$  durch

$$S = \mathbb{1} + iT. \quad (8.46)$$

Die Unitarität der Streumatrix impliziert

$$\mathbb{1} = (\mathbb{1} - iT^\dagger)(\mathbb{1} + iT) = \mathbb{1} + i(T - T^\dagger) + T^\dagger T,$$

was den Imaginärteil und das Betragsquadrat von  $T$  verbindet,

$$\frac{1}{i} (T - T^\dagger) = T^\dagger T. \quad (8.47)$$



Für die diagonalen Matrixelemente  $T_{ii} = \langle i|T|i\rangle$  dieser Operatorgleichung folgt

$$2\Im(T_{ii}) = \langle i|T^\dagger T|i\rangle = \sum_f |T_{fi}|^2. \quad (8.48)$$

Diese Identität verbindet die Übergangswahrscheinlichkeiten eines Anfangszustandes  $|i\rangle$  in irgend einen Endzustand  $|f\rangle$  mit dem Imaginärteil der Amplitude für den Übergang des Zustandes  $|i\rangle$  in sich selbst. Es ist die allgemeine Form des *optischen Theorems*. Es ist eine Verallgemeinerung des aus der Potentialstreuung oder Optik bekannten Sachverhaltes, nachdem der totale Streuquerschnitt proportional zum Imaginärteil der Streuamplitude in Vorwärtsrichtung ist.

Deshalb bezeichnet man zurecht die Beziehung (8.47) als *Operatorversion des optischen Theorems*. Da die linke Seite dieser Beziehung linear und die rechte Seite quadratisch in der Übergangsmatrix  $T$  ist, verbindet das optische Theorem verschiedene Ordnungen der Störungsreihe.

### 8.3 Streuamplituden und Wirkungsquerschnitte

Die Streuamplituden sind die Matrixelemente der Übergangsmatrix  $T$ . Speziell erhalten wir die *invarianten Amplitude*

$$\langle \{\mathbf{p}_f\} | T | \{\mathbf{p}_i\} \rangle \equiv T_{fi} \equiv (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \mathcal{M}_{fi} \quad (8.49)$$

wobei  $P_i$  die Summe der 4-er Impulse aller einlaufenden und  $P_f$  aller auslaufenden Teilchen bezeichnet,

$$P_i = \sum p_i \quad \text{und} \quad P_f = \sum p_f, \quad (8.50)$$

und  $\mathcal{M}_{fi}$  das Matrixelement

$$\mathcal{M}_{fi} = \langle \{\mathbf{p}_f\} | \mathcal{M} | \{\mathbf{p}_i\} \rangle. \quad (8.51)$$

Beim Übergang von den  $T$ -Matrix- zu den  $\mathcal{M}$ -Matrixelementen wurde die Erhaltung von Energie und Impuls in jedem Streuprozess berücksichtigt.  $P_i$  ist der gesamte 4-er Impuls im Anfangszustand und  $P_f$  im Endzustand.

In einem Experiment werden aber (differentielle) *Wirkungsquerschnitte* gemessen. Eine wirklich befriedigenden Behandlung dieser wichtigen Grösse ist nicht ganz einfach und wird hier auch nicht angestrebt. Wir geben nur die Vorschriften zur Berechnung von Wirkungsquerschnitten. Für eine ausführlichere Diskussion verweise ich auf die im Literaturverzeichnis angegebenen Lehrbücher.

Die Einführung des differentiellen Wirkungsquerschnitts setzt einige formale Definitionen voraus: *Übergangswahrscheinlichkeit, Übergangsrate, differentielle Übergangsrate und Stromdichte*.

Die *Übergangswahrscheinlichkeit* von einem Anfangszustand  $|i\rangle$  in einen Endzustand  $|f\rangle$  ist gegeben durch

$$p_{fi} = |T_{fi}|^2 = (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) V_4 |\mathcal{M}_{fi}|^2. \quad (8.52)$$

Hier erscheint das (unendliche) Volumen  $V_4$  der Raumzeit. Dieser Faktor kommt vom quadrieren der Delta-Distribution in der Definition (8.49) der  $\mathcal{M}$ -Matrix. Quantisieren wir ein Feld im endlichen Volumen  $V_4$ , zum Beispiel mit periodischen Randbedingungen, dann ist

$$V_4 \delta_P = \int_{V_4} d^4x e^{iPx},$$

wobei  $P$  einer der erlaubten 4-er Impulse im betrachteten Quantisierungsvolumen ist und  $\delta_P$  das Kronecker-Symbol bezeichnet. Strebt  $V_4$  gegen den Minkowski-Raum, dann strebt die rechte Seite gegen  $(2\pi)^4 \delta^4(P)$ . In diesem Sinne ist die Ersetzung

$$(2\pi)^8 \delta(P) \delta(P) = (2\pi)^4 V_4 \delta_P \delta^4(P) = (2\pi)^4 V_4 \delta^4(P)$$

zu verstehen. Der Volumenfaktor verschwindet, wenn wir die *Übergangsrate* berechnen,

$$R_{fi} = |p_{fi}|/V_4 = (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) |\mathcal{M}_{fi}|^2. \quad (8.53)$$

In einem Streuexperiment ist der Endzustand kein gebundener Zustand. Man sagt, er liegt im Kontinuum und meint damit, dass die Eigenwerte  $P_f$  im kontinuierlichen Spektrum des 4-er Impulsoperators liegen. Deshalb führt man die sogenannte *differentielle Übergangsrate*

$$dR = R_{fi} dN_f = (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) |\mathcal{M}_{fi}|^2 dN_f \quad (8.54)$$

ein. Hier ist  $dN_f$  die Anzahl Endzustände in einem Detektorelement und ist gegeben durch das Produkt der lorentzinvarianten Elemente im Impulsraum der auslaufenden Teilchen,

$$dN_f \equiv \prod_f \frac{d\mu(\mathbf{p}_f)}{(2\pi)^3} = \prod_f \frac{d\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}_f}}. \quad (8.55)$$

Die im Detektor gemessene Rate hängt noch vom Fluss der einlaufenden Teilchen ab. Deshalb müssen wir noch durch den entsprechenden Flussfaktor dividieren. Für den Übergang von 2 in  $N$  Teilchen ist der Fluss gleich

$$F \equiv \rho_1 \rho_2 v_{12}, \quad (8.56)$$

wobei  $\rho_1, \rho_2$  die Stromdichten der einlaufenden Teilchen und  $v_{12}$  ihre relative Geschwindigkeit bezeichnet. Der Faktor kann folgenermassen bestimmt werden: Für die Einteilchen-Wellenfunktion

$$\phi_{\mathbf{p}}(x) \equiv \langle 0 | \phi(x) | \mathbf{p} \rangle = e^{-ipx}$$

ist der Wahrscheinlichkeitsstrom

$$j^\mu = 2 \operatorname{Im}(\phi_{\mathbf{p}} \partial^\mu \phi_{\mathbf{p}}^*) = 2p^\mu,$$

oder in der  $3 + 1$  Zerlegung

$$j^0 = \rho = 2E_{\mathbf{p}} = 2\gamma m \quad \text{und} \quad \mathbf{j} = 2\mathbf{p} = 2\gamma m \mathbf{v}, \quad (8.57)$$

wobei  $\gamma$  den relativistischen Faktor bezeichnet. Mit  $\mathbf{v}_i = \mathbf{p}_i/E_i$  finden wir den Flussfaktor

$$F = 2E_1 2E_2 |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = 4|E_2 \mathbf{p}_1 - E_1 \mathbf{p}_2|. \quad (8.58)$$

Der interessierende *differentielle Wirkungsquerschnitt* ist nun das Verhältnis von differentieller Übergangsrate und Flussfaktor,

$$d\sigma \equiv \frac{dR}{F}. \quad (8.59)$$

Sammeln wir unsere Resultate, dann ergibt sich der folgende Ausdruck für diese wichtige Grösse

$$d\sigma = \frac{1}{2E_1 2E_2 v_{12}} \left( \prod_f \frac{d\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) |\mathcal{M}_{fi}|^2. \quad (8.60)$$

Sind die  $N$  auslaufenden Teilchen ununterscheidbar, dann müssen wir auf der rechten Seite auch noch durch den Faktor  $N!$  dividieren.

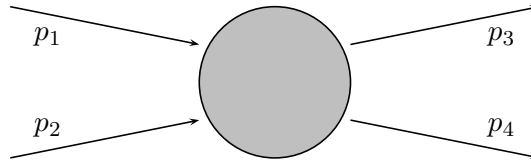
Wir fassen die Vorschriften zur Berechnung der Streuamplituden zusammen: Die Formel für die Streumatrixelemente beim Stoss von 2 Teilchen lauten

$$\begin{aligned} & i\mathcal{M} \cdot (2\pi)^4 \delta^4 \left( p_1 + p_2 - \sum p_f \right) \\ & = \left\{ \begin{array}{l} \text{die Summe über alle verbundenen und amputierten Feynman} \\ \text{Diagramme mit } p_1, p_2 \text{ einlaufend und } p_f \text{ auslaufend.} \end{array} \right. \quad (8.61) \end{aligned}$$

Hier meint man mit verbunden, dass ein Diagramm kein Vakuumdiagramm als Subdiagramm enthält und dass alle äusseren Linien miteinander verbunden sind. Ähnlich wie bei der Diskussion der Störungsreihe für die Vakuumerwartungswerte der Produkte von zeitgeordneten Operatoren kann der Beitrag der nicht-verbundenen Vakuumdiagramme exponentiert werden und führt zu einer irrelevanten Phase für die Streumatrix, die den asymptotischen Impulseigenzustände der wechselwirkenden durch diejenigen der freien Theorie ersetzt,

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{p}'_1 \dots \mathbf{p}'_n | iT | \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \rangle \\ & = \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \left( {}_0 \langle \mathbf{p}'_1 \dots \mathbf{p}'_n | T \left( \exp \left[ -i \int_{-T}^T dt \mathcal{V}(t) \right] \right) | \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \rangle_0 \right) \begin{array}{l} \text{verbunden} \\ \text{amputiert} \end{array} \quad (8.62) \end{aligned}$$

Wie in der Gellman-Low-Formel stehen rechts nur Grössen der freien Theorie. Was es mit der Amputation auf sich hat soll anhand eines lehrreichen Beispiels erläutert werden.



### 8.3.1 Streuung von $2 \rightarrow 2$

Der elementare Prozess in einer Skalarfeldtheorie mit  $\phi^4$ -Wechselwirkung ist die Streuung von zwei Teilchen. Zwei Teilchen mit Impulsen  $p_1, p_2$  in der asymptotischen Vergangenheit streuen und erscheinen in der fernen Zukunft als Teilchen mit Impulsen  $p_3, p_4$ . Wir finden für die Wahrscheinlichkeitsamplitude den Ausdruck

$$\text{aus} \langle \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4 | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle^{\text{ein}} = \langle \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4 | T \left\{ \mathbb{1} - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4z \phi^4(z) + \dots \right\} | \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1 \rangle, \quad (8.63)$$

wobei das Matrixelement auf der rechten Seite in der freien Theorie (mit Feld  $\phi_{\text{ein}}$ ) berechnet wird. Im Folgenden werden wir den Subskript 'ein' nicht mehr schreiben. Wir berechnen nun diesen Prozess in nullter, erster und zweiter Ordnung Störungstheorie. In nullter Ordnung Störungstheorie finden wir

$$\langle \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4 | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle = \langle \mathbf{p}_3 | \mathbf{p}_1 \rangle \langle \mathbf{p}_4 | \mathbf{p}_2 \rangle + \langle \mathbf{p}_3 | \mathbf{p}_2 \rangle \langle \mathbf{p}_4 | \mathbf{p}_1 \rangle. \quad (8.64)$$

Die Einteilchenzustände mit festem Impuls,

$$|\mathbf{p}\rangle = (2\pi)^{3/2} a_p^\dagger |0\rangle \quad (8.65)$$

haben die konventionell gewählten inneren Produkte

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{q} \rangle = (2\pi)^3 2E_p \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}). \quad (8.66)$$

Mit Hilfe der Identitäten

$$\begin{aligned} (2\pi)^{3/2} a_p &\equiv \phi^{(+)}(\mathbf{p}) = i \int d\mathbf{x} e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) \\ (2\pi)^{3/2} a_p^\dagger &\equiv \phi^{(-)}(\mathbf{p}) = -i \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi(x) \end{aligned} \quad (8.67)$$

folgt auch

$$|\mathbf{p}\rangle = \phi^{(-)}(\mathbf{p})|0\rangle, \quad \langle \mathbf{p}| = \langle 0| \phi^{(+)}(\mathbf{p}). \quad (8.68)$$

Bei einer etwas sorgfältigeren Diskussion der Streuquerschnitte führt man lokalisierte Wellenpakete ein,

$$|f\rangle = \int d\mu(\mathbf{p}) f(\mathbf{p}) |\mathbf{p}\rangle \quad \text{mit} \quad \langle f|f\rangle = 1. \quad (8.69)$$

Mit unserer Wahl für die Normierung der Einteilchenzustände bedeutet die letzte Bedingung

$$\langle f|f\rangle = \int d\mu(\mathbf{p}) |f(\mathbf{p})|^2 = 1. \quad (8.70)$$

Für eine schöne Ableitung von Wirkungsquerschnitten mit Hilfe von Wellenpaketen verweise ich auf das Lehrbuch von L.S. BROWN [2].

In erster Ordnung Störungstheorie finden wir den Betrag

$$\begin{aligned} \int d^4z \langle \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4 | \phi^4(z) | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle &= \int d^4z \langle \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4 | e^{iPz} \phi^4(0) e^{-iPz} | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle \\ &= \int d^4z e^{-iz(p_1+p_2-p_3-p_4)} \langle \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4 | \phi^4(0) | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \langle 0 | \phi^{(+)}(\mathbf{p}_3) \phi^{(+)}(\mathbf{p}_4) \phi^4(0) \phi^{(-)}(\mathbf{p}_1) \phi^{(-)}(\mathbf{p}_2) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (8.71)$$

Das Matricelement auf der rechten Seite berechnet man mit den Kontraktionsregeln. Vernachlässigt man Kontraktionen der  $\phi(0)$  untereinander (die nicht zur Streuung beitragen, siehe später), dann findet man

$$\langle \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4 | \phi^4(0) | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle = 4!.$$

Damit ergibt sich bis zur ersten Ordnung das Resultat

$$\text{aus} \langle \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4 | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle^{\text{ein}} = \langle \mathbf{p}_3 | \mathbf{p}_1 \rangle \langle \mathbf{p}_4 | \mathbf{p}_2 \rangle + \langle \mathbf{p}_3 | \mathbf{p}_2 \rangle \langle \mathbf{p}_4 | \mathbf{p}_1 \rangle - i\lambda(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i). \quad (8.72)$$

Nun kehren wir zum differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\Delta\sigma = \int_{\Delta} \frac{d\mu(\mathbf{p}_3)}{(2\pi)^3} \frac{d\mu(\mathbf{p}_4)}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_1 2E_2 v_{12}} (2\pi)^4 \delta^4 \left( \sum p_f - \sum p_i \right) |\mathcal{M}_{fi}|^2 \quad (8.73)$$

zurück und schreiben diesen in einer manifest lorentzinvariant Form. Alle Terme bis auf den Flussfaktor im Nenner sind bereits invariant und es fehlt nur die invariante Form dieses Faktors. Für kollinear einlaufende Teilchen mit Impulsen  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  ist

$$\begin{aligned} (p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2 &= (E_1 E_2 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2)^2 - m_1^2 m_2^2 \\ &= (\mathbf{p}_1^2 + m_1^2)(\mathbf{p}_2^2 + m_2^2) - 2E_1 E_2 \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1^2 \mathbf{p}_2^2 - m_1^2 m_2^2 \\ &= E_1^2 \mathbf{p}_2^2 + E_2^2 \mathbf{p}_1^2 - 2E_1 E_2 \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = E_1^2 E_2^2 \left( \frac{\mathbf{p}_1}{E_1} - \frac{\mathbf{p}_2}{E_2} \right)^2. \end{aligned}$$

Also ist der Flussfaktor

$$E_1 E_2 v_{12} = \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}, \quad (8.74)$$

und dies ist die lorentzinvariante Form des Flussfaktors. Hier ist der geeignete Ort für eine kurze Erörterung der relativistischen Kinematik von Stossprozessen.

### 8.3.2 Mandelstam-Variablen

Mit Hilfe der drei *Mandelstam-Variablen* kann der Flussfaktor und differentielle Wirkungsquerschnitt weiter vereinfacht werden. Die Mandelstam-Variable

$$s = (p_1 + p_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2p_1 p_2 \quad (8.75)$$

ist gleich der quadrierten Schwerpunktsenergie und mit ihrer Hilfe lautet der Flussfaktor

$$4E_1 E_2 v_{12} = 2\sqrt{[s - (m_1 - m_2)^2][s - (m_1 + m_2)^2]}. \quad (8.76)$$

Dieser verschwindet an der kinematischen Schwelle  $s = (m_1 + m_2)^2$ . Da die totale Energie und der totale Impuls beim Streuprozess erhalten sind, gilt

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2. \quad (8.77)$$

Neben der Variablen für die Gesamtenergie benutzt man die zweite Mandelstam-Variable für den 4-er Impulsübertrag

$$t = (p_3 - p_1)^2 = (p_4 - p_2)^2. \quad (8.78)$$

Mit dem gleichen Recht führt man eine Variable für den 4-er Impulsübertrag zwischen dem anderen Teilchenpaar ein,

$$u = (p_4 - p_1)^2 = (p_3 - p_2)^2. \quad (8.79)$$

Eine kurze Rechnung zeigt, dass folgende Relation gilt,

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2, \quad (8.80)$$

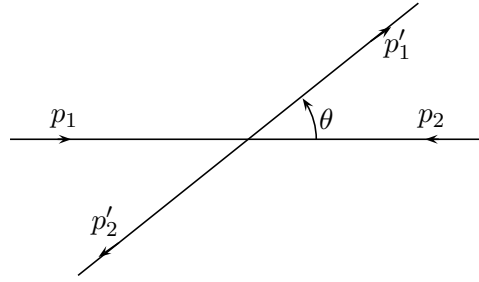
wobei wir etwas verallgemeinerten, und für die auslaufenden Teilchen andere Massen erlaubten als für die einlaufenden Teilchen. Alle Skalarprodukte von Impulsen sind durch  $s, t$  und die Teilchenmassen bestimmt:

$$\begin{aligned} 2p_1 \cdot p_2 &= s - m_1^2 - m_2^2 \\ 2p_1 \cdot p_3 &= m_1^2 + m_3^2 - t \\ 2p_1 \cdot p_4 &= s + t - m_2^2 - m_3^2 \\ 2p_2 \cdot p_3 &= s + t - m_1^2 - m_4^2 \\ 2p_2 \cdot p_4 &= m_2^2 + m_4^2 - t \\ 2p_3 \cdot p_4 &= s - m_3^2 - m_4^2 \end{aligned} \quad (8.81)$$

Der Wirkungsquerschnitt für die  $2 \rightarrow 2$  Streuung enthält eine 6-dimensionale Integration über die auslaufenden Impulse. Wegen der Energie-Impulserhaltung bleiben davon zwei übrig und wir benötigen deshalb nur zwei unabhängige Variablen für die Beschreibung des Streuprozesses. Üblicherweise benutzt man den Raumwinkel, in den eines der beiden Teilchen gestreut wird. Vernachlässigen wir den Spin (bei polarisierten Teilchenstrahlen), dann ist eine Drehung um die Strahlachse eine Symmetrieoperation und der differentielle Wirkungsquerschnitt hängt nur vom Streuwinkel  $\theta$  ab.

Anstelle des auf ein Kugeloberflächenelement  $d\Omega$  bezogenen differentiellen Wirkungsquerschnitt (Flächeninhalte sind nicht lorentzinvariant) ist es vorteilhaft, den invarianten Wirkungsquerschnitt pro invariantem  $dt$  zu berechnen. Dazu fügen wir die Identität

$$1 = \int dt \delta(t - (p_3 - p_1)^2) \quad (8.82)$$



in die Formel (8.73) ein und integrieren über alle Impulse im Endzustand. Den Integranden der verbleibenden  $t$ -Integration identifizieren wir als invarianten 'differentiellen Wirkungsquerschnitt'  $d\sigma/dt$ . Wir finden

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int_{\Delta} d\mu(\mathbf{p}_3) d\mu(\mathbf{p}_4) \delta(t - (p_3 - p_1)^2) \\ &\quad \times \frac{(2\pi)^4 \delta(p_3 + p_4 - p_1 - p_2)}{2\sqrt{[s - (m_1 - m_2)^2][s - (m_1 + m_2)^2]}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \\ &= \frac{\Phi(t, s)}{2\sqrt{[s - (m_1 - m_2)^2][s - (m_1 + m_2)^2]}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \end{aligned} \quad (8.83)$$

mit relativistisch invarianter Phasenraum-Volumen  $\Phi(t, s)$ . Dieses ist in allen Inertialsystem gleich und wir berechnen es im Schwerpunktsystem, in dem  $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$  gilt. Wegen der Impulserhaltung ist die Integration über  $d\mathbf{p}_4$  in (8.83) denkbar einfach: Im Schwerpunktsystem muss  $\mathbf{p}_4$  im Integranden durch  $-\mathbf{p}_3$  ersetzt werden. Mit

$$\begin{aligned} t - (p_3 - p_1)^2 &= t - m_3^2 - m_1^2 + 2E_3E_1 - 2r|\mathbf{p}_1| \cos \theta \\ E_3 + E_4 - E_1 - E_2 &= E_3(r) + E_4(r) - \sqrt{s} \end{aligned}$$

mit  $r = |\mathbf{p}_3|$  und  $E_{3,4}(r) = \sqrt{r^2 + m_{3,4}^2}$ , ergibt sich für das Integral

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\Omega \int_0^\infty dr r^2 \frac{1}{4E_3(r)E_4(r)} \delta(E_3(r) + E_4(r) - \sqrt{s}) \\ &\quad \times \delta(t - m_3^2 - m_1^2 + 2E_3(r)E_1(\mathbf{p}_1) - 2r|\mathbf{p}_1| \cos \theta) \\ &= \frac{1}{16\pi} \frac{1}{|\mathbf{p}|\sqrt{s}}. \end{aligned}$$

wobei wir den Betrag des Impulses  $|\mathbf{p}|$  (von einem der beiden einlaufenden Teilchen) im Schwerpunktsystem einführen

$$E_1(\mathbf{p}) + E_2(\mathbf{p}) = \sqrt{s}. \quad (8.84)$$

Durch quadrieren, umformen und nochmals quadrieren findet man für  $|\mathbf{p}|$  die Darstellung

$$|\mathbf{p}|^2 = \frac{s^2 + (m_1^2 - m_2^2)^2}{4s} - \frac{m_1^2 + m_2^2}{2} \quad (8.85)$$

Bei einer elastischen Streuung von Teilchen gleicher Masse vereinfacht sich das Resultat zu

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{16\pi} \frac{1}{s(s-4m^2)} |\mathcal{M}|^2. \quad (8.86)$$

Für den Prozess im Schwerpunktsystem wird die Streuung durch den Streuwinkel  $\theta$  beschrieben. In diesem System ist

$$\begin{aligned} t &= (p_3 - p_1)^2 = -(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1)^2 = -2\mathbf{p}_1^2 + 2\mathbf{p}_3\mathbf{p}_1 = -2\mathbf{p}^2(1 - \cos\theta) \\ &= \frac{1}{2}(s - 4m^2)(1 - \cos\theta) \end{aligned} \quad (8.87)$$

und entsprechend

$$dt = (s - 4m^2) \frac{d\Omega}{4\pi}. \quad (8.88)$$

Damit ergibt sich für den differentiellen Wirkungsquerschnitt bezogen auf Raumwinkelbereiche die einfache Formel

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4s} \left| \frac{\mathcal{M}}{4\pi} \right|^2. \quad (8.89)$$

Für *identische Teilchen*

ist der totale Wirkungsquerschnitt gegeben durch

$$\sigma = \frac{1}{2} \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}. \quad (8.90)$$

In diesem Fall ist die invariante Amplitude invariant unter dem Austausch  $p_3 \leftrightarrow p_4$  und die differentiellen Wirkungsquerschnitte für Streuwinkel  $\theta$  und  $\pi - \theta$  sind identisch.

Setzen wir unser obiges Resultat in erster Ordnung Störungstheorie ein,  $\mathcal{M} = \lambda$ , dann finden wir den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4s} \left( \frac{\lambda}{4\pi} \right)^2 \quad (8.91)$$

und den totalen Wirkungsquerschnitt

$$\sigma = \frac{\lambda^2}{32\pi} \frac{1}{s}. \quad (8.92)$$

## 8.4 Die LSZ-Reduktionsformel

Die LSZ-Reduktionsformel (nach ihren Entdeckern, den deutschen theoretischen Physikern Harry Lehmann, Kurt Symanzik and Wolfhart Zimmermann) ist eine Methode, die S-Matrix-Elemente der Streuamplitude aus den zeitgeordneten Korrelationsfunktionen einer Quantenfeldtheorie zu berechnen. Die Formulierung einer S-Matrix ist nur möglich,



wenn vor und nach dem Streuvorgang die Existenz nicht-wechselwirkender asymptotischer Zustände bzw. Felder angenommen wird. Wir wollen deshalb im Folgenden annehmen, dass in der frühen Vergangenheit oder der späten Zukunft das wechselwirkende Feld freien asymptotischen Feldern annähert,

$$\phi(x) \longrightarrow Z^{1/2} \phi_{\text{ein}}(x), \quad \text{für } x^0 \rightarrow -\infty \quad (8.93)$$

$$\phi(x) \longrightarrow Z^{1/2} \phi_{\text{aus}}(x), \quad \text{für } x^0 \rightarrow \infty. \quad (8.94)$$

Wir werden zeigen, dass dann die Elemente der Streumatrix mit den Green'schen Funktionen der Wechselwirkenden Theorie in Beziehung stehen. Startpunkt ist die Relation

$$\begin{aligned} \text{aus} \langle q_1, \dots | p_1, p_2, \dots \rangle_{\text{ein}} &= \text{aus} \langle q_1, \dots | a_{\text{ein}}^\dagger(p_1) | p_2, \dots \rangle_{\text{ein}} \\ &= \frac{\kappa}{i} \int_t d^3x e^{-ip_1x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \text{aus} \langle q_1, q_2 \dots | \phi_{\text{ein}}(x) | p_2, \dots \rangle_{\text{ein}} \end{aligned} \quad (8.95)$$

Das Raumintegral kann zu beliebigen Zeiten ausgewertet werden und wir betrachten den Grenzfall  $t \rightarrow -\infty$ , wor wir das freie einlaufende Feld  $\phi_{\text{ein}}$  durch das wechselwirkende Feld  $Z^{-1/2}\phi(x)$  ersetzen können,

$$\text{aus} \langle q_1, \dots | p_1, \dots \rangle_{\text{ein}} = \frac{\kappa}{i\sqrt{Z}} \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t d^3x e^{-ip_1x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \text{aus} \langle q_1, \dots | \phi(x) | p_2, \dots \rangle_{\text{ein}}. \quad (8.96)$$

Mithilfe der Relation

$$\left( \lim_{t \rightarrow \infty} - \lim_{t \rightarrow -\infty} \right) \int d\mathbf{x} \psi(t, \mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\partial}{\partial t} \int d^3\mathbf{x} \psi(t, \mathbf{x}) \quad (8.97)$$

und der asymptotischen Formel für  $t \rightarrow \infty$  finden wir dann

$$\begin{aligned} \text{aus} \langle q_1, \dots | p_1, \dots \rangle_{\text{ein}} &= \text{aus} \langle q_1, \dots | a_{\text{aus}}^\dagger(p_1) | p_2, \dots \rangle_{\text{ein}} \\ &+ \frac{i\kappa}{\sqrt{Z}} \int d^4x \partial_0 \left( e^{-ip_1x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \text{aus} \langle q_1, \dots | \phi(x) | p_2, \dots \rangle_{\text{ein}} \right), \end{aligned} \quad (8.98)$$

wobei sich das letzte Integral über die gesamte Raumzeit erstreckt. Der erste Term auf der rechten Seite trägt nur bei, wenn mindestens ein Teilchen nicht gestreut wird, da  $a_{\text{aus}}^\dagger(p_1)$  nach links als Vernichtungsoperator  $a_{\text{aus}}(p_1)$  wirkt,

$$\text{aus} \langle q_1, \dots | a_{\text{aus}}^\dagger(p_1) | p_2, \dots \rangle_{\text{ein}} = \sum_{k=1}^n 2\omega_{\mathbf{p}_k} \delta(\mathbf{q}_k - \mathbf{p}_1) \text{aus} \langle q_1, \dots, \check{q}_k \dots | p_2, \dots \rangle_{\text{ein}}. \quad (8.99)$$

Derartige Beiträge nennt man *nicht-zusammenhängend*.

Wir betrachten nun den letzten Term in (8.98) etwas genauer. Da wir die Amplituden nicht mit Testfunktionen verschmierten, sollten wir den Ausdruck als Integralkern auffassen. Es ist dann erlaubt, bezüglich der räumlichen Koordinaten partiell zu integrieren und Randterme wegzulassen. Aber für die Zeitkoordinate ist das natürlich nicht gestattet (der Streuprozess rührt von unterschiedlichen Termen bei  $t \rightarrow \pm\infty$ ). Da  $p_1^2 = m^2$  ist, gilt

$$-\partial_0^2 e^{-ip_1x} = (p_1^0)^2 e^{-ip_1x} = (\mathbf{p}_1^2 + m^2) e^{-ip_1x} = (-\Delta + m^2) e^{-ip_1x} \quad (8.100)$$

und wir können den letzten Term in (8.98) wie folgt umformen

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \partial_0 \left( e^{-ip_1x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \text{aus} \langle q_1, \dots | \phi(x) | p_2, \dots \rangle_{\text{ein}} \right) \\
&= \int d^4x \left( \left( (-\Delta + m^2) e^{-ip_1x} + e^{-ip_1x} \partial_0^2 \right) \text{aus} \langle q_1, \dots | \phi(x) | p_2, \dots \rangle_{\text{ein}} \right) \quad (8.101) \\
&= \int d^4x e^{-ip_1x} (\square + m^2) \text{aus} \langle q_1, \dots | \phi(x) | p_2, \dots \rangle_{\text{ein}}
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt partiell integriert haben. Wir fassen zusammen und gewinnen dermassen den ersten Schritt einer Rekursionsrelation:

$$\begin{aligned}
\text{aus} \langle q_1, \dots | p_1, \dots \rangle_{\text{ein}} &= \sum_{k=1}^n 2\omega_{\mathbf{p}_k} \delta(\mathbf{q}_k - \mathbf{p}_1) \text{aus} \langle q_1, \dots, \check{q}_k \dots | p_2, \dots \rangle_{\text{ein}} \\
&+ \frac{i\kappa}{\sqrt{Z}} \int d^4x e^{-ip_1x} (\square + m^2) \text{aus} \langle q_1, \dots | \phi(x) | p_2, \dots \rangle_{\text{ein}} \quad (8.102)
\end{aligned}$$

Dieser Schritt kann nun mehrfach wiederholt werden. Um genauer zu sehen, was dabei passiert, schreiben wir den nächsten Schritt noch explizit aus. Dabei betrachten wir nun den Beitrag von  $a_{\text{aus}}(q_1)$ . Was die nicht zusammenhängenden Terme betrifft, so geschieht hier nichts Neues und wir schreiben ihren Beitrag nicht mehr explizit auf. Zunächst haben wir wieder

$$\begin{aligned}
\text{aus} \langle q_1, q_2, \dots | \phi(x) | p_2, \dots \rangle_{\text{ein}} &= \text{aus} \langle q_2, \dots | a_{\text{aus}}(q_1) \phi(x) | p_2, \dots \rangle_{\text{ein}} \\
&= \frac{i\kappa}{\sqrt{Z}} \lim_{y^0 \rightarrow \infty} \int d\mathbf{y} e^{iq_1y} \overleftrightarrow{\partial}_{y^0} \text{aus} \langle q_2, \dots | \phi(y) \phi(x) | p_2, \dots \rangle_{\text{ein}} \quad (8.103)
\end{aligned}$$

Wir würden nun gerne wieder das letzte Integral durch ein 4-dimensionales Integral über den Minkowskiraum ersetzen. Dabei benötigen wir aber eine Trick, damit der Operator  $a_{\text{ein}}(q_1)$  für  $t \rightarrow -\infty$  direkt auf den einlaufenden Zustand  $|p_2, \dots \rangle_{\text{ein}}$  wirkt. Dieser beruht auf dem zeit-geordneten Produkt der Feldoperatoren

$$T\phi(y)\phi(x) = \begin{cases} \phi(y)\phi(x) & \text{falls } y^0 > x^0 \\ \phi(x)\phi(y) & \text{falls } x^0 > y^0. \end{cases} \quad (8.104)$$

Da das Integral in (8.103) für asymptotische Zeiten  $y^0 \rightarrow \infty$  ausgewertet ist, dürfen wir das Produkt der Felder durch ihr zeitgeordnetes Produkt ersetzen. Nun benutzen wir wieder die Identität (8.97) und ersetzen den Integranden zur asymptotischen Zukunft durch denjenigen in der asymptotischen Vergangenheit plus das Zeitintegral der Zeitableitung,

$$\begin{aligned}
& \text{aus} \langle q_1, q_2, \dots | \phi(x) | p_2, \dots \rangle_{\text{ein}} \\
&= \frac{i\kappa}{\sqrt{Z}} \lim_{y^0 \rightarrow -\infty} \int d\mathbf{y} e^{iq_1y} \overleftrightarrow{\partial}_{y^0} \text{aus} \langle q_2, \dots | T\phi(y)\phi(x) | p_2, \dots \rangle_{\text{ein}} \quad (8.105) \\
&+ \frac{i\kappa}{\sqrt{Z}} \int d^4y \partial_{y^0} \left( e^{-iq_1x} \overleftrightarrow{\partial}_{y^0} \text{aus} \langle q_1, \dots | T\phi(y)\phi(x) | p_2, \dots \rangle_{\text{ein}} \right)
\end{aligned}$$

Im ersten Integral können wir das zeitgeordnete Produkt durch  $\phi(x)\phi(y)$  ersetzen, da  $y^0$  in der asymptotischen Vergangenheit vorkommt. Dann extrahiert die links-rechts Ableitung plus Integral über den Raum den Vernichtungsoperator des einlaufenden Feldes. Im zweiten Integral führt eine räumliche partielle Integration wieder auf den Klein-Gordon Operator, so dass

$$\begin{aligned} \text{aus}\langle q_1, q_2, \dots | \phi(x) | p_2, \dots \rangle_{\text{ein}} &= \text{aus}\langle q_2, \dots | \phi(x) a_{\text{in}}(q_1) | p_2, \dots \rangle_{\text{ein}} \\ &+ \frac{i\kappa}{\sqrt{Z}} \int d^4y e^{-iq_1y} (\square_y + m^2) \text{aus}\langle q_2, \dots | T\phi(y)\phi(x) | p_2, \dots \rangle_{\text{ein}} \end{aligned} \quad (8.106)$$

Der erste Term auf der rechten Seite führt wiederum zu einem nicht-zusammenhängenden Term. Nach Reduktion von zwei Teilchen erhalten wir also die Formel

$$\begin{aligned} \text{aus}\langle q_1, q_2, \dots | p_1, p_2, \dots \rangle &= \text{ein}\langle q_1, q_2, \dots | S | p_1, p_2, \dots \rangle_{\text{ein}} \\ &= \text{nicht zusammenhängende Terme} \\ &+ \frac{(i\kappa)^2}{Z} \int d^4y_1 d^4x_1 e^{iq_1y_1 - ip_1x_1} (\square_{y_1} + m^2) (\square_{x_1} + m^2) \times \\ &\quad \times \text{aus}\langle q_2, \dots | T\phi(y_1)\phi(x_1) | p_2, \dots \rangle_{\text{ein}} . \end{aligned} \quad (8.107)$$

Es ist nun offensichtlich, wie dieser Schritt iteriert werden kann, und man erhält

$$\begin{aligned} \text{aus}\langle q_1, \dots, q_n | p_1, \dots, p_m \rangle &= \text{ein}\langle q_1, \dots, q_n | S | p_1, \dots, p_m \rangle_{\text{ein}} \\ &= \text{nicht zusammenhängende Terme} \\ &+ \left( \frac{(i\kappa)^2}{Z} \right)^{\frac{m+n}{2}} \int d^4y_1 \dots d^4x_m \exp \left( i \sum_{k=1}^n q_k y_k - i \sum_{k=1}^m p_k x_k \right) \times \\ &\quad \times (\square_{y_1} + m^2) \dots (\square_{x_m} + m^2) \text{aus}\langle 0 | T\phi(y_1) \dots \phi(x_m) | 0 \rangle_{\text{ein}} . \end{aligned} \quad (8.108)$$

Dies ist die LSZ Reduktionsformel von Lehman, Symanzik und Zimmermann. Sie ist eine Beziehung zwischen on-shell Übergangsamplituden (die 4-er Impulse liegen auf der Massenschale) und den Vakuumerwartungswerten von zeitgeordneten Produkten der wechselwirkenden Theorie. Die Formel impliziert, dass die Green'schen Funktionen Pole in den lorentzinvarianten Variablen  $p_i^2$  besitzen, wobei  $p_i$  die zu  $x_i$  konjugierte Variable ist. Bis auf Normierung ist das  $S$ -Matrixelement gerade das Residuum dieser multiplen Pole.

Eine weitere bemerkenswerte Eigenschaft der LSZ Reduktionsformel besteht in der Symmetrie zwischen den ein- und auslaufenden Teilchen. Diese Symmetrie ist eine Manifestation der sogenannten PCT Symmetrie, die für allgemeine lokale Lorentz-invarianten Quantenfeldtheorien gilt.

## 8.5 Aufgaben

### Aufgabe 1: Scattering in an interacting theory

Consider a theory with three real scalar fields  $\phi(x)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , which has an action given by

$$S = \int d^4x \left( \frac{1}{2} \sum_i \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i - \frac{1}{2} \sum_i m_i^2 \phi_i^2 + g \phi_1 \phi_2 \phi_3 \right) .$$

1. Which vertex exists in this theory?
2. Which of the following scattering processes are possible at tree-level (i.e., without loop diagrams)?
  - $1, 1 \rightarrow 1, 1$
  - $1, 2 \rightarrow 1, 2$
  - $3, 3 \rightarrow 2, 2$
  - $1, 1 \rightarrow 2, 3$
3. Calculate the probabilities for these processes (at tree level) and express them using the Mandelstam variables  $s$ ,  $t$  and  $u$ .

### Aufgabe 2: Zerfall und $\chi - \phi$ Streuung (nach Brown)

Betrachte die Feldtheorie für zwei Skalarfelder  $\phi$  und  $\chi$  mit Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} M^2 \phi^2 + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - \frac{1}{2} m^2 \chi^2 + \frac{1}{2} g \phi \chi^2$$

Dieses Modell ist das 'skalare Gegenstück' zur Quantenelektrodynamik. Dabei spielt  $\phi$  die Rolle eines skalaren (und massiven) „Photons“ und  $\chi$  die Rolle eines skalaren „Elektrons“. Wir erinnern uns daran, dass die Streuamplitude  $T$  durch

$$\text{aus } \langle \dots | \dots \rangle^{\text{ein}} = \langle | \rangle \langle | \rangle - i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) T$$

definiert ist. Für  $M > 2m$  kann ein  $\phi$ -Teilchen in zwei  $\chi$ -Teilchen zerfallen.

1. Berechne die Zerfallsrate in erster Ordnung Störungstheorie!
2. Entwickle die  $T$ -Matrixelemente bis zur Ordnung  $g^2$  und berechne dann die Streuamplitude für  $\chi - \phi$ -Streuung in tiefster Ordnung Störungstheorie. Diese Streuung entspricht der Compton-Streuung in der QED.
3. Erklären Sie, wie die Amplitude zu den folgenden beiden Feynman-Graphen in Beziehung stehen.



4. Wir definieren die Mandelstam-Variablen

$$s = (p + k)^2, \quad t = (p' - p)^2, \quad u = (k' - p)^2.$$

Beweisen Sie  $s + t + u = 2m^2 + 2M^2$  und drücken sie  $T$  durch  $s, t$  und  $u$  aus.

**Aufgabe 3:  $\chi$ - $\chi$  Streuung**

1. Berechne nun die Streuamplitude für die  $\chi - \chi$ -Streuung in tiefster (nichttrivialer) Ordnung. Wie sehen die Feynmangraphen aus? Drücke  $T$  durch die entsprechenden Variablen  $s, t$  und  $u$  aus.
2. Was ist der differentielle Wirkungsquerschnitt  $d\sigma/d\Omega$  für  $\chi - \chi$ -Streuung im SPS.

**Lösungen****Aufgabe 2: Zerfall und  $\chi - \phi$  Streuung (nach Brown)**

Das Potential ist  $\mathcal{V} = g\phi\chi^2/2$  und führt in der ersten Ordnung Störungstheorie auf die Amplitude

$$\langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 | T | \mathbf{p} \rangle = (2\pi)^4 \delta(P_f - P_i) \mathcal{M}_{fi}, \quad \mathcal{M}_{fi} = \frac{ig}{2} \langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 | \phi(0) \chi^2(0) | \mathbf{p} \rangle$$

Die invariante Amplitude ist

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{ig}{2} \langle 0 | \phi(0) | \mathbf{p} \rangle \cdot \langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 | \chi^2(0) | 0 \rangle.$$

Wir benutzen die Identitäten

$$[\phi(x), \phi^-(\mathbf{p})] = e^{-ipx}, \quad [\phi(x), \phi^+(\mathbf{p})] = -e^{ipx}, \quad [\phi^+(\mathbf{p}), \phi^-(\mathbf{p})] = (2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$$

und explizite Form der Einteilchenzustände

$$|\mathbf{p}\rangle = \phi^-(\mathbf{p})|0\rangle \quad \text{und} \quad \langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 | = \langle 0 | \chi^+(\mathbf{k}_1) \chi^+(\mathbf{k}_2)$$

und finden die Matrixelemente

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi(0) | \mathbf{p} \rangle &= \langle 0 | \phi(0) \phi^-(\mathbf{p}) | 0 \rangle = 1 \\ \langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 | \chi^2(0) | 0 \rangle &= \langle 0 | \chi^+(\mathbf{k}_1) \chi^+(\mathbf{k}_2) \chi(0) \chi(0) | 0 \rangle = 2 \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Zerfallswahrscheinlichkeit pro Zeit quadrieren wir, ersetzen das Quadrat der Delta-Distribution durch die Delta-Distribution multipliziert mit  $(2\pi)^4 V$  und integrieren über die Ausgangsimpulse. Multiplizieren wir noch mit  $1/2$  wegen der Gleichheit der auslaufenden Teilchen, so ergibt sich die Zerfallsrate

$$\Gamma = (2\pi)^4 \frac{g^2}{2} \int \frac{d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}_1}} \int \frac{d\mathbf{k}_2}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}_2}} \delta^{(4)}(p - k_1 - k_2).$$

Im Schwerpunktsystem des zerfallenden Teilchens ist

$$p^0 = M, \quad \mathbf{p} = 0$$

und die Delta-Distribution erzwingt

$$\mathbf{k}_2 = -\mathbf{k}_1 \quad \text{und} \quad k_1^0 = k_1^0$$

Nun können wir leicht das  $d\mathbf{k}_2$ -Integral ausführen,

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{g^2}{8} \int \frac{d\mathbf{k}_1}{\omega_{\mathbf{k}_1}^2} \delta(M - 2k_1^0) \\ &= \frac{g^2}{8\pi} \int \frac{du u^2}{m^2 + u^2} \delta\left(M - 2\sqrt{m^2 + u^2}\right). \end{aligned}$$

Das Argument  $f(u)$  der Delta-Distribution hat eine positive Nullstelle bei

$$u_0 = \frac{1}{2}\sqrt{M^2 - 4m^2} \quad \text{und} \quad f'(u_0) = -\frac{2u_0}{\sqrt{m^2 + u_0^2}}$$

und deshalb ist die Zerfallsrate je Zeiteinheit gleich

$$\Gamma = \frac{g^2}{16\pi} \sqrt{1 - 4(m/M)^2} \quad (\text{Faktor } 1/2M \text{ fehlt})$$





## 9 Fermionen

Nach dem Spin-Statistik-Theorem gehorchen Teilchen mit ganzem Spin der Bose-Einstein Statistik und Teilchen mit halb-ganzem Spin der Fermi-Dirac Statistik. Teilchen mit halb-ganzem Spin, sogenannte Fermionen, erfüllen demnach das *Pauli'sche Ausschließungsprinzip*. Die zugehörigen Felder sind keine Tensorfelder sondern Spinorfelder – in einem gewissen Sinne sind Tensoren das Quadrat von Spinoren. Im Gegensatz zu den bosonischen Feldern transformieren die Felder von Fermionen nach Darstellungen der quantenmechanischen Lorentz-Gruppe  $SL(2, \mathbb{C})$  und nicht nach Darstellungen der Lorentzgruppe.

### 9.1 Diracgleichung

Ich gehe davon aus, dass sie die Diracgleichung aus der Vorlesung QM II kennen und erinnern hier nur an die wichtigsten Eigenschaften der Spinorfelder und Diracgleichung. Spin- $\frac{1}{2}$  Felder werden durch vierkomponentige Spinoren  $\psi(x)$  beschrieben deren Lagrangedichte und Feldgleichung 4-dimensionale  $\gamma$ -Matrizen  $\gamma^\mu$  enthalten. Diese gehorchen den algebraischen Beziehungen

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}\mathbb{1}_4, \quad \gamma_\mu^\dagger = \gamma_0\gamma_\mu\gamma_0. \quad (9.1)$$

Die letzte Beziehung bedeutet, dass  $\gamma_0$  hermitesch und  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  antihermitesch sind. Wegen  $\gamma_0^2 = \mathbb{1}$  hat  $\gamma_0$  die Eigenwerte  $\pm 1$  und wegen  $\gamma_i^2 = -\mathbb{1}$  sind die Eigenwerte von  $\gamma_i$  gleich  $\pm i$ . Die von den  $\gamma_\mu$  erzeugte Algebra mit Relationen (9.1) heißt *Clifford-Algebra*. Es existiert nur eine nicht-triviale irreduzible Darstellung dieser Algebra und diese ist 4-dimensional.

Unter orthochronen eigentlichen Poincare-Transformationen transformiert ein Spinorfeld  $\psi(x)$  wie folgt

$$\psi'(x') = S\psi(x), \quad x' = \Lambda(S)x + a. \quad (9.2)$$

Darin ist die Spintransformation gegeben durch

$$S = \exp\left(\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\Sigma^{\alpha\beta}\right) \quad \text{mit} \quad \Sigma^{\alpha\beta} = \frac{1}{4i}[\gamma^\alpha, \gamma^\beta], \quad \omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha} \in \mathbb{R}. \quad (9.3)$$

Die Indizes der Gamma-Matrizen werden mit der Metrik nach oben oder unten gezogen,

$$\gamma^\mu = g^{\mu\nu}\gamma_\nu \quad , \quad \gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu. \quad (9.4)$$

Die Lorentztransformation  $\Lambda$  berechnet sich aus der Spintransformation gemäß

$$S^{-1}\gamma^\mu S = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu, \quad (\Lambda^\mu_\nu) = \exp(\omega), \quad \omega = (\omega^\mu_\nu). \quad (9.5)$$

Jeder Spintransformation ist eine eindeutige Lorentz-Transformation zugeordnet. Umgekehrt gibt es zu jeder Lorentztransformation zwei Spintransformationen mit  $S^{-1}\gamma S = \Lambda\gamma$ . Die Spingruppe ist die doppelte Überlagerung der Lorentzgruppe, ähnlich wie die quantenmechanische Drehgruppe  $SU(2)$  die doppelte Überlagerung der Drehgruppe  $SO(3)$  ist. Spintransformationen sind nicht unitär, erfüllen aber die Bedingung

$$\gamma^0 S^\dagger \gamma^0 = S^{-1}. \quad (9.6)$$

Deshalb ergibt sich für den *Dirac-konjugierten Spinor* das Transformationsgesetz

$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}, \quad \bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0. \quad (9.7)$$

Im Gegensatz zu Tensorfeldern, deren Komponenten beim Wechsel des Inertialsystems wie die Komponenten eines Vektorfeldes transformieren, transformieren die vier Komponenten eines Spinorfeldes mit der Spintransformation  $S$ . Aber die folgenden 16 Felder sind (Pseudo)Tensorfelder:

$$\begin{aligned} S(x) &= \bar{\psi}(x)\psi(x) && \text{Skalarfeld} && 1 \\ j^\mu(x) &= \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) && \text{Vektorfeld (Strom)} && 4 \\ T^{\mu\nu}(x) &= \bar{\psi}(x)[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\psi(x) && \text{antisymm. Tensorfeld} && 6 \\ A^\mu(x) &= \bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma^\mu\psi(x) && \text{Pseudovektorfeld (Axialstrom)} && 4 \\ P(x) &= \bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x) && \text{Pseudoskalarfeld} && 1 \end{aligned} \quad (9.8)$$

Hier tritt die hermitesche Matrix  $\gamma_5$  auf,

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad \text{mit} \quad \gamma_5^2 = \mathbb{1}, \quad \gamma_5 = \gamma_5^\dagger, \quad \{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0. \quad (9.9)$$

Die letzte Gleichung bedingt die Spurfreiheit der Gamma-Matrizen,  $\text{tr} \gamma_\mu = 0$ .

Die lorentzinvariante Lagrangedichte für das freie Spin- $\frac{1}{2}$  lautet

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\rlap{-}\not{\partial} - m) \psi, \quad \rlap{-}\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu, \quad (9.10)$$

und die zugehörige Euler-Lagrange Gleichung ist die kovariante freie Dirac-Gleichung

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \iff -i\partial_\mu \psi^\dagger \gamma^{\dagger\mu} - m\psi^\dagger = 0. \quad (9.11)$$

Die Wirkung ist invariant unter Translationen in Raum und Zeit. Der zugehörige Noetherstrom ist der kanonische Energie-Impuls Tensor des freien Dirac-Feldes,

$$T^{\mu\nu} = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial^\nu \psi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (9.12)$$

Die erhaltenen Ladungen bilden den 4-er Impuls

$$P^\nu = \int_{x^0=0} d\mathbf{x} T^{0\nu} = \int_{x^0=0} d\mathbf{x} (i\bar{\psi}\gamma^0 \partial^\nu \psi - g^{0\nu} \mathcal{L}). \quad (9.13)$$

Der kanonische Energie-Impuls Tensor ist unsymmetrisch und muss als Quelle des Gravitationsfeldes verbessert werden. Die erhaltenen Größen  $P^\mu$  ändern dabei aber nicht und wir dürfen zu ihrer Berechnung die Formel (9.13) benutzen. Insbesondere lautet die Energie des Dirac-Feldes

$$H = P^0 = \int d\mathbf{x} \psi^\dagger h \psi, \quad h = -i\gamma^0 \gamma^i \partial_i + \gamma^0 m \equiv \alpha^i \partial_i + \beta m. \quad (9.14)$$

Die Lagrangedichte ist auch invariant unter globalen  $U(1)$ -Phasentransformationen

$$\psi(x) \longrightarrow e^{i\lambda} \psi(x) \quad , \quad \bar{\psi}(x) \longrightarrow e^{-i\lambda} \bar{\psi}(x), \quad (9.15)$$

und diese innere Symmetrie führt auf den erhaltenen Noetherstrom

$$j^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \quad (9.16)$$

mit zugehöriger zeitunabhängiger Noetherladung

$$Q = \int d\mathbf{x} \psi^\dagger \psi. \quad (9.17)$$

Das Vektorfeld  $j^\mu$  wird mit der elektrischen 4-er Stromdichte identifiziert und  $Q$  mit der elektrischen Ladung.

## 9.2 Lösungen der freien Diracgleichung

Zur Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung  $(i\not{\partial} - m)\psi = 0$  setzen wir eine ebene Welle an,

$$\psi(x) = e^{-ipx} u \quad \text{mit konstantem } u \in \mathbb{C}^4. \quad (9.18)$$

Dies ist eine Lösung der Dirac-Gleichung, falls

$$(\not{p} - m)u = 0 \implies (\not{p} + m)(\not{p} - m)u = (p^2 - m^2)u \quad (9.19)$$

gilt. Die letzte Gleichung hat nur eine Lösung für  $p^2 = m^2$  und dies ist gerade die Bedingung dafür, dass jede Komponente von  $\psi$  die Klein-Gordon-Gleichung mit Masse  $m$  erfüllt. Also liegt der 4-er Impuls auf dem Massenhypersphäroid im Vorwärts- beziehungsweise Rückwärtslichtkegel,

$$p \in V_m = V_m^+ \cup V_m^- \quad \text{mit} \quad V_m^\pm = \{p \in \mathbb{R}^4 | p^2 = m^2, \pm p^0 > 0\} \quad (9.20)$$

Liegt  $p$  auf dem Hypersphäroid  $V_m^-$  im Rückwärtslichtkegel dann liegt  $-p$  auf dem Hypersphäroid  $V_m^+$  im Vorwärtslichtkegel. Deshalb haben die Lösungen die Form

$$\begin{aligned} \psi(x) &= e^{-ipx} u, & (\not{p} - m)u &= 0, & p &\in V_m^+, \\ \psi(x) &= e^{+ipx} v, & (\not{p} + m)v &= 0, & p &\in V_m^-. \end{aligned} \quad (9.21)$$

Wegen  $p^2 = m^2$  hat  $\not{p}$  die Eigenwerte  $\pm m$ . Die Eigenräume zu den Eigenwerten  $\pm m$  sind je 2-dimensional, da  $\text{tr } \not{p} = p_\mu \text{tr } \gamma^\mu = 0$  ist. Wir bezeichnen die entsprechenden Eigenvektoren, die sogenannten *Polarisationsvektoren*, mit

$$u(\sigma, p) \quad \text{und} \quad v(\sigma, p), \quad \sigma = 1, 2. \quad (9.22)$$

Diese sind wie folgt normiert: im Ruhesystem mit  $p = (m, \mathbf{0})$  lauten Gleichungen (9.21) für die konstanten Spinoren  $u$  und  $v$

$$(\gamma^0 - 1)u = 0 \quad \text{und} \quad (\gamma^0 + 1)v = 0. \quad (9.23)$$

Da  $\gamma^0$  hermitesch ist, können wir die Eigenvektoren bezüglich dem Standard-Skalarprodukt auf  $\mathbb{C}^4$  orthogonal wählen. Deshalb gilt im *Ruhesystem* des Elektrons

$$u^\dagger(\sigma, p)u(\sigma', p) = v^\dagger(p, \sigma)v(\sigma', p) = 2m\delta_{\sigma\sigma'} \quad (9.24)$$

$$u^\dagger(\sigma, p)v(\sigma', p) = v^\dagger(p, \sigma)u(\sigma', p) = 0. \quad (9.25)$$

Der Faktor  $2m$  ist Konvention. Die Eigenvektoren von  $\gamma^0$  definieren auch die Projektoren auf die entsprechenden Eigenräume von  $\gamma^0$  zu den Eigenwerten  $\pm 1$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma=1,2} u(\sigma, p)u^\dagger(\sigma, p) &= 2m \frac{1 + \gamma^0}{2} \\ \sum_{\sigma=1,2} v(\sigma, p)v^\dagger(\sigma, p) &= 2m \frac{1 - \gamma^0}{2}. \end{aligned} \quad (9.26)$$

Diese Relationen gelten im Ruhesystem des Elektrons. Für den Übergang in andere Inertialsysteme schreiben wir sie in kovarianter Form. Dazu benutzen wir, dass wegen (9.23) im Ruhesystem die Beziehungen in (9.25) wie folgt geschrieben werden können,

$$\begin{aligned} \bar{u}(\sigma, p)u(\sigma', p) &= 2m\delta_{\sigma\sigma'} \quad , \quad \bar{v}(\sigma, p)v(\sigma', p) = -2m\delta_{\sigma\sigma'} \\ \bar{u}(\sigma, p)v(\sigma', p) &= 0 \quad , \quad \bar{v}(\sigma, p)u(\sigma', p) = 0, \end{aligned} \quad (9.27)$$

und diejenigen in (9.26) gemäß

$$\sum_{\sigma=1,2} u(\sigma, p)\bar{u}(p, \sigma) = \not{p} + m \quad , \quad \sum_{\sigma=1,2} v(\sigma, p)\bar{v}(p, \sigma) = \not{p} - m. \quad (9.28)$$

Wir machten von der speziellen Form des 4-er Impulses im Ruhesystem Gebrauch. Beim Übergang in ein beliebiges Inertialsystem benutzen wir (9.5) mit dem Resultat

$$S(\not{p} \pm m) = (\not{p}' \pm m)S, \quad p' = \Lambda(S)p, \quad (9.29)$$

Die Spinoren im Impulsraum transformieren unter Lorentz-Transformationen gemäß

$$u(\sigma, p') = Su(\sigma, p) \quad \text{und} \quad v(\sigma, p') = Sv(\sigma, p). \quad (9.30)$$

Nun sei  $S$  so gewählt, dass  $\Lambda(S)$  den Impuls  $p$  im Ruhesystem in einen beliebigen anderen Impuls auf  $V_m^+$  abbildet. Dann ist

$$\bar{u}(\sigma, p')u(\sigma', p') = \bar{u}(\sigma, p)S^{-1}Su(\sigma', p) = 2m\delta_{\sigma\sigma'}$$

und analog

$$\sum_{\sigma} u(\sigma, p')\bar{u}(\sigma, p') = S \sum_{\sigma} u(\sigma, p)\bar{u}(\sigma, p)S^{-1} \stackrel{(9.29)}{=} \not{p}' + m.$$

Ganz analog verfährt man mit den entsprechenden Ausdrücken für  $v(\sigma, p)$ . Dies beweist, dass Orthogonalitätsrelationen (9.27) und Vollständigkeitsrelationen (9.28) in beliebigen Inertialsystemen, als für beliebige Teilchenimpulse, gültig sind. In den folgenden Rechnungen sind die weiteren Identitäten

$$\bar{u}(\sigma, p)\gamma^{\mu}u(\sigma', p) = \bar{v}(\sigma, p)\gamma^{\mu}v(\sigma', p) = 2p^{\mu}\delta_{\sigma\sigma'} \quad (9.31)$$

hilfreich. Auf beiden Seiten stehen Vektoren und es genügt, diese vektorielle Beziehung im Ruhesystem des Elektrons nachzuprüfen. Im Ruhesystem ist wegen  $\gamma^0 u(\sigma, p) = u(\sigma, p)$  und  $\bar{u}(\sigma, p)\gamma^0 = \bar{u}(\sigma, p)$

$$\bar{u}(\sigma, p)\gamma^{\mu}u(\sigma', p) = \bar{u}(\sigma, p)\gamma^0\gamma^{\mu}\gamma^0u(\sigma', p).$$

Deshalb erhalten wir Null für  $\mu = 1, 2, 3$  und mit (9.27) das Resultat  $2p^0\delta_{\sigma\sigma'}$  für  $\mu = 0$ . Dies ist aber gerade die Relation (9.31) im Ruhesystem des Elektrons.

Die allgemeine klassische Lösung der Dirac-Gleichung lautet somit

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mu(\mathbf{p}) \sum_{\sigma} \left( u(\sigma, p)a_{\sigma}(p)e^{-ipx} + v(\sigma, p)b_{\sigma}^{\dagger}(p)e^{ipx} \right) \quad (9.32)$$

mit  $p \in V_m^+$  und beliebigen Amplituden  $a_{\sigma}(p)$  und  $b_{\sigma}(p)$ . Der konjugierte Spinor hat die Zerlegung

$$\bar{\psi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mu(\mathbf{p}) \sum_{\sigma} \left( \bar{v}(\sigma, p)b_{\sigma}(p)e^{-ipx} + \bar{u}(\sigma, p)a_{\sigma}^{\dagger}(p)e^{ipx} \right) \quad (9.33)$$

Mit Hilfe von (9.31) findet man für den 4-er Impuls (9.13) des Feldes

$$P^{\nu} = \int d\mu(\mathbf{p}) \sum_{\sigma} p^{\nu} \left( a_{\sigma}^{\dagger}(p)a_{\sigma}(p) - b_{\sigma}(p)b_{\sigma}^{\dagger}(p) \right). \quad (9.34)$$

Inbesondere finden wir für die Energie des Dirac-Feldes den Ausdruck

$$H = \int d\mu(\mathbf{p})\omega_p \sum_{\sigma} \left( a_{\sigma}^{\dagger}(p)a_{\sigma}(p) - b_{\sigma}(p)b_{\sigma}^{\dagger}(p) \right), \quad \omega_p = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}. \quad (9.35)$$

Sie ist nicht positiv definit wie für skalare oder vektorielle Teilchen.

### 9.3 Quantisierung des Diracfeldes

Bei der Quantisierung werden das Dirac-Feld  $\psi$  und seine Fourier-Koeffizienten  $a_\sigma, b_\sigma$  zu Operatoren auf einem Hilbert-Raum. Würden wir Vertauschungsrelationen für diese Operatoren fordern dann wäre die Energie nach unten unbeschränkt, im Widerspruch zur Forderung, dass in einer relativistischen Feldtheorie das Spektrum von  $P^\mu$  im abgeschlossenen Vorwärtslichtkegel liegen muß. Die Energie wird (bis auf eine Konstante) positiv, wenn wir *kanonische Antivertauschungsrelationen* postulieren:

$$\{a_\sigma(p), a_{\sigma'}^\dagger(p')\} = \{b_\sigma(p), b_{\sigma'}^\dagger(p')\} = 2\omega_p \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{\sigma\sigma'} \quad (9.36)$$

$$\{a_\sigma^\#(p), a_{\sigma'}^\#(p')\} = \{b_\sigma^\#(p), b_{\sigma'}^\#(p')\} = 0. \quad (9.37)$$

Hier steht  $a^\#$  für  $a$  oder für  $a^\dagger$ . Der Übergang von Kommutations- zu Antikommutationsregeln wird auch für die Einhaltung des Pauliprinzips führen. Zum Beispiel verschwindet  $a_\sigma^\dagger(p)a_\sigma(p)^\dagger$  aufgrund der Antikommutationsregeln, so dass man mit  $a_\sigma(p)^\dagger$  nicht zwei Teilchen mit denselben Quantenzahlen  $\sigma$  und  $p$  aus einem Fock-Vakuum erzeugen kann.

In der Tat wählen wir als Hilbert-Raum den Fock-Raum über einem invarianten Vakuumzustand  $|0\rangle$ , der von den Vernichtungsoperatoren annihilert wird,

$$a_\sigma(p)|0\rangle = b_\sigma(p)|0\rangle = 0. \quad (9.38)$$

Man definiert das normalgeordnete Produkt von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren so, dass alle Vernichtungsoperatoren rechts und alle Erzeugungsoperatoren links stehen. Ist die Permutation der Umordnung ungerade, dann wird wegen der Anti-Vertauschungsrelationen noch mit  $-1$  multipliziert. Mit  $\langle 0|a_\sigma(p)a_{\sigma'}^\dagger(p')|0\rangle = \{a_\sigma(p), a_{\sigma'}^\dagger(p')\}$  gilt zum Beispiel

$$:a_\sigma(p)a_{\sigma'}^\dagger(p'):= a_\sigma(p)a_{\sigma'}^\dagger(p') - \langle 0|a_\sigma(p)a_{\sigma'}^\dagger(p')|0\rangle = -a_{\sigma'}^\dagger(p')a_\sigma(p) \quad (9.39)$$

$$:b_\sigma(p)b_{\sigma'}^\dagger(p'):= b_\sigma(p)b_{\sigma'}^\dagger(p') - \langle 0|b_\sigma(p)b_{\sigma'}^\dagger(p')|0\rangle = -b_{\sigma'}^\dagger(p')b_\sigma(p). \quad (9.40)$$

Der normal-geordnete Hamilton-Operator

$$:H:= \int d\mu(\mathbf{p})\omega_p \sum_\sigma \left( a_\sigma^\dagger(p)a_\sigma(p) + b_\sigma^\dagger(p)b_\sigma(p) \right) \quad (9.41)$$

ist nicht-negativ und annihilert den Vakuumzustand. Mit den nützlichen Identitäten

$$[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B \quad \text{und} \quad [AB, C] = A[B, C] + [A, C]B \quad (9.42)$$

folgen die Kommutationsregeln

$$\begin{aligned} [a_\sigma^\dagger(p)a_\sigma(p), a_{\sigma'}^\dagger(q)] &= +2\omega_p \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \delta_{\sigma\sigma'} a_\sigma^\dagger(p) \\ [a_\sigma^\dagger(p)a_\sigma(p), a_{\sigma'}(q)] &= -2\omega_p \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \delta_{\sigma\sigma'} a_\sigma(p). \end{aligned} \quad (9.43)$$

Benutzen wir diese Regeln im Kommutator der Impulse mit dem Feld so ergibt sich

$$\begin{aligned} i[P^\mu, \psi(x)] &= \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mu(\mathbf{p}) p^\mu \sum_\sigma \left( -u(\sigma, p) a_\sigma(p) e^{-ipx} + v(\sigma, p) b_\sigma^\dagger(p) e^{ipx} \right) \\ &= \partial_\mu \psi(x) \end{aligned} \quad (9.44)$$

und wie erwartet erzeugen die hermiteschen  $P^\mu$  Verschiebungen in Raum und Zeit. Die Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren haben die Zeitentwicklungen

$$\begin{aligned} \dot{a}_\sigma(p) &= i[H, a_\sigma(p)] = -i\omega_p a_\sigma(p) \Rightarrow a_\sigma(t, p) = e^{-i\omega_p t} a_\sigma(p) \\ \dot{b}_\sigma^\dagger(p) &= i[H, b_\sigma^\dagger(p)] = i\omega_p b_\sigma^\dagger(p) \Rightarrow b_\sigma^\dagger(t, p) = e^{i\omega_p t} b_\sigma^\dagger(p), \end{aligned} \quad (9.45)$$

in Übereinstimmung mit der klassischen Lösung (9.32) für das Dirac-Feld.

### 9.3.1 Zweipunktfunktionen

Wir berechnen die relevanten Zweipunktfunktion des quantisierten Diracfeldes. Das Diracfeld hat die Entwicklung (9.32) und sein konjugiertes Feld die Entwicklung (9.33). Dabei sind die Fourierkoeffizienten Operatoren im Fockraum mit den Antivertausungsrelationen (9.36) und (9.37). Die Zweipunkt-Funktion ist der Vakuum-Erwartungswert

$$\langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mu(\mathbf{p}) d\mu(\mathbf{q}) e^{-ipx+iqy} \sum_{\sigma, \sigma'} u(\sigma, p) \bar{u}(q, \sigma') \langle 0 | a_\sigma(p) a_{\sigma'}^\dagger(q) | 0 \rangle.$$

Im letzten Erwartungswert dürfen wir das Produkt von  $a$  und  $a^\dagger$  durch ihren Antikommutator ersetzen und dies führt auf den Faktor  $2\omega_p \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \delta_{\sigma\sigma'}$ . Wir erhalten mit (9.28)

$$\begin{aligned} \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mu(\mathbf{p}) e^{-ip(x-y)} (\not{p} + m) \\ &= (i\not{\partial}_x + m) \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mu(\mathbf{p}) e^{-ip(x-y)}. \end{aligned}$$

Im letzten Ausdruck steht die Zweipunktfunktion  $W(x-y) = i\Delta_+(x-y)$  des Skalarfeldes, und deshalb ist

$$iS_+(x-y) \equiv \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle = (i\not{\partial}_x + m) i\Delta_+(x-y). \quad (9.46)$$

Die andere nicht-verschwindende Zweipunkt-Funktionen ist

$$\langle 0 | \bar{\psi}_j(x) \psi_i(y) | 0 \rangle = (i\not{\partial}_x - m)_{ij} i\Delta_+(x-y). \quad (9.47)$$

Dagegen verschwinden die Vakuumerwartungswerte von zwei  $\psi$  oder zwei  $\bar{\psi}$ ,

$$\langle 0 | \psi_i(x) \psi_j(y) | 0 \rangle = \langle 0 | \bar{\psi}_i(x) \bar{\psi}_j(y) | 0 \rangle = 0. \quad (9.48)$$

Wegen (9.36) ist der Antikommutator zweier Fermionfelder proportional zum Einheitsoperator,

$$\begin{aligned}\{\psi_i(x), \bar{\psi}_j(y)\} &= \langle 0 | \{\psi_i(x), \bar{\psi}_j(y)\} | 0 \rangle \\ &= (i\cancel{\partial}_x + m)_{ij} i\Delta_+(x-y) + (i\cancel{\partial}_y - m)_{ij} i\Delta_+(y-x) \\ &= (i\cancel{\partial}_x + m)_{ij} i\Delta_m(x-y) = iS_m(x-y),\end{aligned}\quad (9.49)$$

wobei die Pauli-Jordansche Kommutatorfunktion  $\Delta_m(\xi) = \Delta_+(\xi) - \Delta_+(-\xi)$  benutzt wurde. Insbesondere ist

$$\{\psi_i(x), \bar{\psi}_j(y)\} = 0 \quad \text{für} \quad (x-y)^2 < 0. \quad (9.50)$$

Diese ungewohnte Form der *Kausalitätsbedingung* ist physikalisch sinnvoll, sind doch die eichabhängigen  $\psi(x)$  und  $\bar{\psi}(y)$  selbst keine Observablen. Nur eichinvariante gerade Produkte des Diracfeldes kommen als Observable in Betracht. Hätten wir  $\psi$  bosonisch quantisiert, so wäre der Antikommutator (9.49) nicht ein Vielfaches von  $\mathbb{1}$  und würde für raumartig getrennte  $x$  und  $y$  auch nicht verschwinden. Der Kommutator

$$[\psi_i(x), \bar{\psi}_j(y)] = (i\cancel{\partial}_x + m)_{ij} i(\Delta_+(x-y) + \Delta_+(y-x))$$

würde dann für raumartig separierte Argumente ebenfalls nicht verschwinden. Die Stabilitäts- und Kausalitäts-Forderungen führen relativ zwangsläufig auf fermionische Antikommutationsregeln für die Fourier-Koeffizienten des Quantenfeldes  $\psi$ .

Das zeitgeordnete Produkt

$$T\psi_i(x)\bar{\psi}_j(y) = \theta(x^0 - y^0)\psi_i(x)\bar{\psi}_j(y) - \theta(y^0 - x^0)\bar{\psi}_j(y)\psi_i(x) \quad (9.51)$$

liefert den *Feynman-Propagator* für das Dirac-Feld,

$$\langle 0 | T\bar{\psi}_i(x)\psi_j(y) | 0 \rangle = iS_F(x-y)_{ij}. \quad (9.52)$$

Die Rechnung führt auf

$$iS_F(z) = \theta(z^0)(i\cancel{\partial}_z + m) i\Delta_+(z) + \theta(-z^0)(i\cancel{\partial}_z + m) i\Delta_+(-z)$$

und auf der rechten Seite dürfen wir wegen  $\delta(z^0)(\Delta_+(z) - \Delta_+(-z)) = 0$  die Stufenfunktion „durch die Ableitung ziehen“. Wir erinnern uns an die Definition des Feynman-Propagators für das skalare Feld,

$$\Delta_F(z) = \theta(z^0)\Delta_+(z) + \theta(-z^0)\Delta_+(-z),$$

und erhalten

$$S_F(z) = (i\cancel{\partial}_z + m) \Delta_F(z) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\cancel{p} + m}{p^2 - m^2 + i0} e^{-ipz}. \quad (9.53)$$

Die Vakuumerwartungswerte der zeitgeordneten Produkte von  $\bar{\psi}\psi$  sind deshalb

$$\langle 0 | T\bar{\psi}_i(x)\psi_j(y) | 0 \rangle = iS_F(x-y)_{ij}, \quad (9.54)$$



während diejenigen von  $\psi\psi$  und  $\bar{\psi}\bar{\psi}$  verschwinden,

$$\langle 0|T\psi_i(x)\psi_j(y)|0\rangle = \langle 0|T\bar{\psi}_i(x)\bar{\psi}_j(y)|0\rangle = 0.$$

Schlussendlich betrachten wir noch die kovariant erhaltene Stromdichte

$$j^\mu(x) = :\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x):, \quad (9.55)$$

welche auf die erhaltene Ladung

$$Q = \int_{x^0=t} d\mathbf{x} :\psi^\dagger(x)\psi(x): \quad (9.56)$$

führt. Die Rechnung ergibt

$$Q = \sum_\sigma \int d\mu(\mathbf{p}) \left( a_\sigma^\dagger(\mathbf{p})a_\sigma(\mathbf{p}) - b_\sigma^\dagger(\mathbf{p})b_\sigma(\mathbf{p}) \right), \quad (9.57)$$

wobei das Minus von der Normalordnung von  $b_\sigma(\mathbf{p})b_\sigma^\dagger(\mathbf{p})$  herrührt. Offensichtlich erhöhen die  $a^\dagger$  die Ladung um eine Einheit und die  $b^\dagger$  erniedrigen sie um eine Einheit,

$$[Q, a_\sigma^\dagger(\mathbf{p})] = a_\sigma^\dagger(\mathbf{p}) \quad \text{und} \quad [Q, b_\sigma^\dagger(\mathbf{p})] = -b_\sigma^\dagger(\mathbf{p}). \quad (9.58)$$

Damit erzeugt  $a_\sigma^\dagger(\mathbf{p})$  ein Teilchen mit Quantenzahlen  $(\mathbf{p}, \sigma)$  und Ladung  $+1$  (wir identifizieren es mit einem Elektron) und  $b_\sigma^\dagger(\mathbf{p})$  ein Antiteilchen mit Quantenzahlen  $(\mathbf{p}, \sigma)$  der Ladung  $-1$  (Positron). Die Ladung  $Q$  ist erhalten,  $[Q, H] = 0$ , und erzeugt Eichtransformationen

$$e^{i\lambda Q}\psi(x)e^{-i\lambda Q} = e^{-i\lambda}\psi(x). \quad (9.59)$$

## 9.4 Aufgaben

### Aufgabe 1: Dirac theory

Consider free massive fermions described by the Dirac equation

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \quad .$$

A commonly used convention for the  $\gamma$  matrices is

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{K}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{K}_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix},$$

where  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) denote the usual Pauli matrices. In the following we consider plane wave solutions of the above Dirac equation.

1. Show that the following four spinors ( $\alpha = 1, 2$ ),

$$\begin{aligned}\psi^{(\alpha)}(x) &= u^{(\alpha)}(p)e^{-ipx} && \text{positive energy} \\ \psi^{(\alpha)}(x) &= v^{(\alpha)}(p)e^{+ipx} && \text{negative energy} \quad ,\end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned}u^{(1)}(p) &= \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_+}{E+m} \end{pmatrix} , & u^{(2)}(p) &= \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_-}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix} , \\ v^{(1)}(p) &= \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_+}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , & v^{(2)}(p) &= \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{p_-}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ,\end{aligned}$$

are solutions of the free Dirac equation. We have introduced the abbreviations  $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$  and  $p_{\pm} = p_x \pm ip_y$ .

2. Convince yourself that the spinors above obey the following normalization and orthogonality relations:

$$\begin{aligned}\bar{u}^{(\alpha)}(p)u^{(\beta)}(p) &= \delta_{\alpha\beta} \quad , \\ \bar{v}^{(\alpha)}(p)v^{(\beta)}(p) &= -\delta_{\alpha\beta} \quad , \\ \bar{u}^{(\alpha)}(p)v^{(\beta)}(p) &= \bar{v}^{(\alpha)}(p)u^{(\beta)}(p) = 0 \quad , \\ u^{(\alpha)\dagger}(p)u^{(\beta)}(p) &= v^{(\alpha)\dagger}(p)v^{(\beta)}(p) = \frac{E}{m}\delta_{\alpha\beta} \quad ,\end{aligned}$$

where  $\bar{u} = u^\dagger\gamma^0$  and  $\bar{v} = v^\dagger\gamma^0$ .

### Aufgabe 2: The fifth $\gamma$ matrix

Consider the fifth  $\gamma$  matrix defined by

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad .$$

Using the Clifford algebra relation

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{K}_4 \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3) \quad ,$$

show that

1.  $(\gamma^5)^2 = \mathbb{K}_4$
2.  $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (\mu = 0, 1, 2, 3)$

**Aufgabe 3: Dirac field bilinears**

Under Lorentz transformation, the fermion fields  $\psi(x)$  transform in the following way:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = S\psi(x)$$

where the matrix  $S$  was introduced in the lecture. It was shown that  $\bar{\psi}\psi$  transforms as a scalar under Lorentz transformation.

Now consider the following basis of general Dirac field bilinears:

$$\bar{\psi}\Gamma\psi \quad , \quad \text{with } \Gamma \in \{1, \gamma^\mu, \gamma^5, \gamma^\mu\gamma^5, \sigma^{\mu\nu}\} \quad ,$$

where we have introduced  $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ .

How does each of these bilinears behave under Lorentz transformation?



# 10 Kovariante Quantisierung des elektromagnetischen Feldes

Im Kapitel 5 quantisierten wir das elektromagnetische Feld in der Coulomb-Eichung. Diese physikalische Eichung führt relativ direkt zu Resultaten, ist aber nicht verträglich mit der Lorentz-Invarianz der Elektrodynamik. Nun wollen wir das elektromagnetische Feld quantisieren ohne die Lorentzinvarianz zu verletzen.

## 10.1 Kovariante Eichfixierung

Die Lagrangedichte des freien elektromagnetischen Feldes

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \quad (10.1)$$

führt auf folgende, zu den Komponenten des Vektorpotentials konjugierten Impulsfelder

$$\pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 A^\mu)} = -F_{0\mu} = \partial_\mu A_0 - \partial_0 A_\mu. \quad (10.2)$$

Die rechten Seiten sind unabhängig von  $\dot{A}_0$  und deshalb wird  $\dot{A}_0$  durch die Impulsfelder nicht festgelegt; des Weiteren ist  $\pi_0 = 0$  und ist deshalb kein dynamisches Feld. Die Elektrodynamik ist ein sogenanntes *singuläres System* und diese Eigenschaft hat ihren Ursprung in der Eichinvarianz. Für Betrachtungen bei denen man die relativistische Kovarianz beibehalten möchte ist folgende *eichvariante* Lagrange-Dichte mit Eichfixierungsterm zweckmäßig,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\xi}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 \\ &= -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A_\mu + \xi \partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu) \end{aligned} \quad (10.3)$$

Mit Hilfe von

$$\frac{\partial \mathcal{L}_\xi}{\partial(\partial^\mu A^\nu)} = -F_{\mu\nu} - \xi \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha A^\alpha. \quad (10.4)$$

finden wir die *Euler-Lagrange-Gleichungen*

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \xi \partial^\nu (\partial_\alpha A^\alpha) = \square A^\nu - (1 - \xi) \partial^\nu (\partial_\alpha A^\alpha) = 0. \quad (10.5)$$

Nimmt man die 4-er Divergenz der letzten Gleichung dann folgt

$$\xi \square G = 0 \quad \text{für} \quad G = \partial_\alpha A^\alpha.$$

Für  $\xi \neq 0$  ist diese Bedingung äquivalent

$$\ddot{G} = \Delta G. \quad (10.6)$$

Wir folgern, dass für  $G|_{t=0} = 0$  und  $\dot{G}|_0 = 0$  für alle Zeiten die Lorentz Eichbedingung

$$G = \partial_\alpha A^\alpha = 0 \quad (10.7)$$

gilt. Man nennt deshalb den Term proportional zu  $\xi$  in (10.3) einen *eichfixierenden Term*. Gilt  $\partial_\alpha A^\alpha = 0$ , dann ist (10.5) äquivalent zu den Maxwell-Gleichungen.

Mit Eichfixierungsterm lauten die konjugierten Impulsfelder

$$\pi_\mu = -F_{0\mu} - \eta_{0\mu} \xi (\partial_\alpha A^\alpha)$$

und in der 1 + 3-Zerlegung

$$\pi_0 = -\xi(\dot{\varphi} - \nabla \cdot \mathbf{A}) \quad \text{sowie} \quad \boldsymbol{\pi} = \dot{\mathbf{A}} - \nabla \varphi \quad (10.8)$$

was für  $\xi \neq 0$  nach den 'Geschwindigkeiten'  $(\dot{\varphi}, \dot{\mathbf{A}})$  aufgelöst werden kann und entsprechend eine Hamiltonsche Formulierung zulässt.

Die Wahl  $\xi = 1$  nennt man *Feynman-Eichung*. In dieser Eichung sind die beiden letzten Terme in der Lagrange-Dichte (10.3) eine totale Divergenz,

$$\frac{1}{2} \partial_\mu (A_\nu (\partial^\nu A^\mu - \eta^{\mu\nu} \partial_\alpha A^\alpha)).$$

Damit ist die Lagrange-Dichte äquivalent zu

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu. \quad (10.9)$$

Dies entspricht der Lagrange-Dichte von 4 reellen und masselosen Skalarfeldern. Allerdings ist noch die Eichbedingung  $\partial_\alpha A^\alpha = 0$  zu berücksichtigen und in dieser kovariante Lorentz Eichung vereinfachen sich gemäß (10.5) die Maxwell-Gleichungen auf die Wellengleichungen für die Komponenten des Potentials,

$$\square A^\mu = 0. \quad (10.10)$$

Der Feldstärketensor bestimmt das Potential allerdings nur bis auf eine residuale Eichtransformation

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu - \partial_\mu \lambda \quad \text{mit} \quad \square \lambda = 0. \quad (10.11)$$

## 10.2 Quantisierung des Photonfeldes

Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist die Lagrange-Dichte (10.9) welche auf die kovarianten Wellengleichungen (10.10) führt, die für Felder mit den Anfangsbedingungen

$$\partial_\mu A^\mu|_{t=0} = 0 \quad \text{und} \quad \partial_0(\partial_\mu A^\mu)|_{t=0} = 0 \quad (10.12)$$

äquivalent zu den Maxwell-Gleichungen sind. Der Energie-Impuls-Tensor

$$T^{\mu\nu} = -\partial^\mu A_\alpha \partial^\nu A^\alpha - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}_1 \quad (10.13)$$

liefert den Feldimpuls

$$P^\mu = \int_{x^0=0} d\mathbf{x} T^{0\mu} = - \int d\mathbf{x} (\partial_0 A_\nu \partial^\mu A^\nu + \eta^{0\mu} \mathcal{L}_1). \quad (10.14)$$

Ebene Wellen-Lösungen der Wellengleichungen (10.10) haben die Form

$$A_\mu(x) = \varepsilon_\mu(\lambda, k) e^{\pm i k x}, \quad \lambda = 0, 1, 2, 3, \quad (10.15)$$

mit  $k^2 = 0$  und  $k^0 > 0$ , dass heißt mit  $k \in V_0$ . Die Polarisationsvektoren  $\varepsilon_\mu(\lambda, k)$  werden reell gewählt mit Orthogonalitätsbedingung

$$\varepsilon_\mu(\lambda, k) \varepsilon^\mu(\lambda', k) = \varepsilon(\lambda, k) \cdot \varepsilon(\lambda', k) = \eta^{\lambda\lambda'}. \quad (10.16)$$

Die Vollständigkeitsrelation lautet  $\eta_{\lambda\lambda'} \varepsilon(\lambda, k) \otimes \varepsilon(\lambda', k) = \mathbb{1}$ , oder in Komponenten

$$\sum_{\lambda\lambda'} \eta_{\lambda\lambda'} \varepsilon^\mu(\lambda, k) \varepsilon_\nu(\lambda', k) = \delta^\mu_\nu, \quad (10.17)$$

und folgt aus der Zerlegung eines beliebigen Vektors  $x \in \mathbb{R}^4$  als Linearkombination der  $\varepsilon(0, k), \dots, \varepsilon(3, k)$ . Die Polarisierungen können näher festgelegt werden durch Wahl eines zeitartigen Vektors  $n$  mit  $n \cdot n = 1$ . Dann erfüllen

$$\begin{aligned} \varepsilon(0, k) &= n \\ \varepsilon(3, k) &= \frac{k - (k \cdot n)n}{k \cdot n} \\ n \cdot \varepsilon(\lambda, k) &= k \cdot \varepsilon(\lambda, k) = 0, \quad \varepsilon(\lambda, k) \cdot \varepsilon(\lambda, k) = -1, \quad \lambda = 1, 2 \end{aligned} \quad (10.18)$$

die Normierung (10.16) und es ist

$$\varepsilon(0, k) + \varepsilon(3, k) = \frac{k}{k \cdot n}. \quad (10.19)$$

Um die Normierung zu beweisen benutzt man  $k \cdot k = 0$ . Ist zum Beispiel  $n = (1, 0, 0, 0)$  die Zeitrichtung im betrachteten Bezugssystem, dann gilt

$$\begin{aligned} \varepsilon(0, k) &= (1, \mathbf{0}) \\ \varepsilon(3, k) &= \hat{\mathbf{k}} \\ \varepsilon(\lambda, k) &= (0, \varepsilon(\lambda, k)) \quad \text{mit} \quad \varepsilon^2(\lambda, k) = 1, \quad \varepsilon(\lambda, k) \cdot \mathbf{k} = 0 \quad \lambda = 1, 2. \end{aligned} \quad (10.20)$$

Wir nennen  $\varepsilon(0, k)$  *skalare*,  $\varepsilon(1, k), \varepsilon(2, k)$  *transversale* und  $\varepsilon(3, k)$  *longitudinale Polarisation*. Die skalare und longitudinale Polarisierungen sind unphysikalisch und werden nur gebraucht um die Kovarianz zu erhalten.

Die allgemeine reelle Lösung der Wellengleichung lautet

$$A_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\lambda=0}^3 \int d\mu(\mathbf{k}) \varepsilon_\mu(\lambda, k) \left( a_\lambda(k) e^{-ikx} + a_\lambda^\dagger(k) e^{ikx} \right), \quad (10.21)$$

wobei wie früher mit dem invarianten Maß  $d\mu(\mathbf{k}) = d^3k/2|\mathbf{k}|$  auf  $V_0$  integriert wird. Für die Lagrange-Dichte in der Feynman-Eichung ist  $\pi_\mu = -\dot{A}_\mu$  oder

$$\pi_\mu(x) = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\lambda=0}^3 \int d\mu(\mathbf{k}) \omega_{\mathbf{k}} \varepsilon_\mu(\lambda, k) \left( a_\lambda(k) e^{-ikx} - \text{h.c.} \right). \quad (10.22)$$

Wir quantisieren das Feld kanonisch, im ersten Schritt ohne die Eichbedingung  $\partial_\alpha A^\alpha = 0$  zu berücksichtigen. Diese Methode der kovarianten Quantisierung stammt von GUPTA und BLEULER. Wir werden notwendigerweise auf einen unphysikalischen Raum mit indefiniter Metrik geführt. Im zweiten Schritt werden wir dann die Eichbedingung derart implementieren, dass sie im indefiniten Raum einen Unterraum mit positiver Metrik definiert. Dieser Hilbertraum wird dann zum Zustandsraum des quantisierten elektromagnetischen Feldes.

Die Vertauschungsregeln zu fester Zeit sind

$$[A^\mu(\mathbf{x}), \pi_\nu(\mathbf{y})] = i\delta_\nu^\mu \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (10.23)$$

ergänzt durch die trivialen Kommutationsregeln

$$[A_\mu(\mathbf{x}), A_\nu(\mathbf{y})] = [\pi_\mu(\mathbf{x}), \pi_\nu(\mathbf{y})] = 0. \quad (10.24)$$

Setzt man hier obige Entwicklungen ein, so findet man

$$\begin{aligned} [a_\lambda(k), a_{\lambda'}^\dagger(k')] &= -2\omega_{\mathbf{k}} \eta_{\lambda\lambda'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\ [a_\lambda^\#(k), a_{\lambda'}^\#(k')] &= 0, \quad a^\# = \{a, a^\dagger\}. \end{aligned} \quad (10.25)$$

Für den Feldimpuls (10.14) findet man nach bosonischer Normalordnung

$$P^\mu = \int d\mu(\mathbf{k}) k^\mu \left( \sum_{i=1}^3 a_i^\dagger(k) a_i(k) - a_0^\dagger(k) a_0(k) \right), \quad (10.26)$$

und wie erwartet erzeugt er die infinitesimalen Translationen des Potentials,

$$[iP_\mu, A_\nu(x)] = \partial_\mu A_\nu(x). \quad (10.27)$$

Betrachten wir die Kommutationsregeln (10.25) für die  $a_0$  und  $a_0^\dagger$  sowie derer Beitrag zur Energie, dann offenbart sich ein Vorzeichenproblem. Verglichen mit einem Skalarfeld hat



der Kommutator  $[a_0, a_0^\dagger]$  das falsche Vorzeichen und als Konsequenz ist der Beitrag proportional zu  $a_0^\dagger a_0$  in der Energie negativ.

Die Operatoren  $a_\lambda(k)$  und  $a_\lambda^\dagger(k)$  seien auf einem *Fockraum*  $\mathcal{F}$  mit Vakuum  $|0\rangle$  dargestellt,

$$a_\lambda(k)|0\rangle = 0, \quad \forall \lambda \text{ und } k \in V_0. \quad (10.28)$$

Normierbare Einteilchenzustände

$$|f\rangle = \sum_\lambda \int d\mu(\mathbf{k}) f_\lambda(k) a_\lambda^\dagger(k) |0\rangle \quad (10.29)$$

haben die Norm

$$\langle f|f\rangle = - \int d\mu(\mathbf{k}) \bar{f}_\lambda(k) \eta_{\lambda\lambda'} f_\lambda'(k). \quad (10.30)$$

Offensichtlich gibt es Zustände  $|f\rangle$  mit  $\langle f|f\rangle \leq 0$ , sogenannte *Geister*. Das Skalarprodukt  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  ist indefinit was mit der üblichen Wahrscheinlichkeitsinterpretation von Quantentheorien unverträglich ist. Diese Grundvoraussetzung zu opfern kann doch nur heißen, dass wir *unphysikalische* Zustände des Photons eingeführt haben. Das soeben eingeführte 'Photon' hat vier unabhängige Polarisationszustände. Zwei davon müssen unechte oder unphysikalische Zustände sein.

## 10.3 Raum der physikalischen Zustände

Um einen *physikalischen Unterraum*  $\mathcal{F}_{\text{phys}}$  von  $\mathcal{F}$  zu finden folgen wir GUPTA und BLEULER und implementieren die bisher nicht berücksichtigte Eichbedingung  $\partial_\mu A^\mu$ . Der naheliegende Versuch physikalische Zustände  $|\psi\rangle$  durch

$$\partial_\mu A^\mu |\psi\rangle = 0 \quad \text{für alle } x \quad (10.31)$$

zu charakterisieren, scheidet schon zur Zeit 0, da wir mit  $\partial_\mu A^\mu(0, \mathbf{x}) = -\pi^0 + \nabla \cdot \mathbf{A}$

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \psi | [\partial_\mu A^\mu(0, \mathbf{x}), A_\nu(0, \mathbf{y})] | \psi \rangle = -\langle \psi | [\pi^0(\mathbf{x}), A_\nu(\mathbf{y})] | \psi \rangle \\ &= -i\eta_{0\nu} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \langle \psi | \psi \rangle. \end{aligned}$$

folgern würden. Also ist diese Bedingung zu stark. Wenn wir aber nur fordern, dass die Erwartungswerte von  $\partial_\mu A^\mu$  in physikalischen Zuständen verschwindet, dann genügt es die schwächere Bedingung

$$\partial_\mu A^{+\mu}(x) |\psi\rangle = 0 \quad (10.32)$$

zu verlangen, wobei  $A^+$  den positiven Frequenzanteil des Photonfeldes bezeichnet,

$$A^{+\mu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\lambda=0}^3 \int d\mu(\mathbf{k}) \varepsilon_\mu(\lambda, k) a_\lambda(k) e^{-ikx}. \quad (10.33)$$

Negativer und positiver Frequenzanteil in der Zerlegung des hermiteschen Feldes

$$A_\mu(x) = A_\mu^+(x) + A_\mu^-(x) \quad (10.34)$$

sind zueinander adjungiert, so dass die Eichbedingung im Sinne von Erwartungswerten immer noch gültig ist,

$$\langle \psi | \partial_\mu A^\mu(x) | \psi \rangle = \langle \psi | \partial_\mu A^{+\mu}(x) | \psi \rangle + \langle \partial_\mu A^{+\mu}(x) \psi | \psi \rangle = 0.$$

Die Divergenz von  $A^+$  ist

$$\partial_\mu A^{+\mu}(x) = -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mu(\mathbf{k}) k_\mu \varepsilon^\mu(\lambda, k) a_\lambda(k) e^{-ikx} \quad (10.35)$$

und mit Hilfe der Relationen (10.18) vereinfacht sich dieser Ausdruck zu

$$\partial_\mu A^{+\mu}(x) = -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mu(\mathbf{k}) k \cdot n (a_0(k) - a_3(k)) e^{-ikx} \quad (10.36)$$

Für zeitartige  $n$  und lichtartige  $k$  verschwindet  $k \cdot n$  nie und die Gupta-Bleuler Bedingung (10.32) ist äquivalent zu

$$(a_3(k) - a_0(k)) | \psi \rangle = 0 \quad \forall k \in V_0. \quad (10.37)$$

Wir werden jetzt beweisen, dass auf dem Unterraum

$$\tilde{\mathcal{F}} = \{ | \psi \rangle \in \mathcal{F} \mid (a_3(k) - a_0(k)) | \psi \rangle = 0 \quad \forall k \in V_0 \} \quad (10.38)$$

das Skalarprodukt positiv-semi-definit ist.

*Beweis:* Der sogenannte hermitesche *Geistzahl-Operator* auf  $\mathcal{F}$

$$N' = \int d\mu(\mathbf{k}) \left( a_3^\dagger(k) a_3(k) - a_0^\dagger(k) a_0(k) \right) \quad (10.39)$$

hat im indefiniten Raum  $\mathcal{F}$  die Eigenwerte in  $\mathbb{N}_0$ . Wegen der ungewöhnlichen Kommutationsregeln sind die Eigenwerte von  $a_0^\dagger a_0$  in  $-\mathbb{N}_0$ . Der Geistzahloperator zählt die Anregungen mit  $\lambda = 3$  und mit  $\lambda = 0$ . Zwei Vektoren  $|\psi_1\rangle$  und  $|\psi_2\rangle$  mit verschiedenen Geistzahlen,

$$N' |\psi_i\rangle = n'_i |\psi_i\rangle, \quad n'_1 \neq n'_2$$

haben verschwindendes inneres Produkt. Wegen

$$[N', a_3(k) - a_0(k)] = -(a_3(k) - a_0(k))$$

bildet der Geistzahl-Operator den Unterraum  $\tilde{\mathcal{F}}$  auf sich ab: Für  $|\psi\rangle \in \tilde{\mathcal{F}}$  ist nämlich

$$(a_3(k) - a_0(k)) N' |\psi\rangle = (N' - 1) (a_3(k) - a_0(k)) |\psi\rangle = 0 \quad \text{für } |\psi\rangle \in \tilde{\mathcal{F}}. \quad (10.40)$$

Es genügt somit, die Eigenschaft  $\langle \psi | \psi \rangle \geq 0$  auf Eigenzuständen von  $N'$  nachzuprüfen. Wegen

$$n' \langle \psi | \psi \rangle = \langle \psi | N' | \psi \rangle = \int d\mu (\langle a_3 \psi | a_3 | \psi \rangle - \langle a_0 \psi | a_0 | \psi \rangle) = 0$$

ist  $\langle \psi | \psi \rangle = 0$  für  $n' \neq 0$ . Alle Zustände mit nicht-verschwindender Geistzahl haben Norm Null – man nennt sie *Geistzustände* oder *Geister*. Alle Zustände mit verschwindender Geistzahl sind von der Form

$$|\psi\rangle = \prod_{r=1}^n a_{i_r}^\dagger(k_r)|0\rangle, \quad i_r = 1, 2, \quad (10.41)$$

und haben eine positive Norm. Zustände  $|\phi\rangle \in \tilde{\mathcal{F}}$  mit verschwindender Norm rühren von der residuellen Eichfreiheit: ist nämlich

$$|\psi'\rangle = |\psi\rangle + |\phi\rangle, \quad (10.42)$$

so ist  $\langle \psi' | \psi' \rangle = \langle \psi | \psi \rangle$  und

$$\langle \psi' | A^\mu(x) | \psi' \rangle = \langle \psi | A^\mu(x) | \psi \rangle - \partial^\mu \lambda(x). \quad (10.43)$$

Wir unterdrücken den Beweis und bemerken nur, dass die Eichfunktion von den Vektoren  $|\phi\rangle$  mit Geistzahl  $n' > 0$  und von  $\psi$  abhängt,

$$\lambda(x) = \frac{1}{in'(2\pi)^{3/2}} \int d\mu(\mathbf{k}) \frac{e^{ikx}}{k \cdot n} \langle \psi | a_0(k) | \phi \rangle + \text{komplex konjugiert.}$$

Zustände  $|\psi\rangle, |\psi'\rangle$  in  $\tilde{\mathcal{F}}$  die sich um ein Geist-Zustand  $|\phi\rangle$  unterscheiden sind zu identifizieren,

$$|\psi\rangle \sim |\psi'\rangle = |\psi\rangle + |\phi\rangle \iff \langle \psi - \psi' | \psi - \psi' \rangle = 0, \quad (10.44)$$

und dies führt auf folgende Charakterisierung der physikalischen Zustände,

$$\mathcal{F}_{\text{phys}} := \tilde{\mathcal{F}} / \sim. \quad (10.45)$$

Das Skalarprodukt auf  $\mathcal{F}_{\text{phys}}$  ist unabhängig vom gewählten Repräsentanten und positiv definit. Diese Aussage beweist man mit Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle \psi | \phi \rangle| \leq \langle \psi | \psi \rangle^{1/2} \langle \phi | \phi \rangle^{1/2}. \quad (10.46)$$

Sind  $|\phi_i\rangle$  zwei Zustände mit Norm Null, dann folgt damit

$$\langle \psi_1 + \phi_1 | \psi_2 + \phi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle. \quad (10.47)$$

Als möglichen Repräsentanten jeder Klasse kann man das eindeutig Element der Klasse mit Geistzahl 0 wählen. Diese Wahl hängt aber von der Wahl von  $n$  ab.

Observablen  $O = O^\dagger : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  die  $\tilde{\mathcal{F}}$  invariant lassen heißen *eichinvariant*. Wegen

$$\langle \phi | O^\dagger O | \psi \rangle \stackrel{(10.46)}{=} 0 \quad (10.48)$$

bilden eichinvariante Observablen äquivalente Zustände in äquivalente Zustände ab. Beispiele sind die elektromagnetische Feldstärke

$$F_{\mu\nu}(x) = F_{\mu\nu}^T(x) - \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mu(\mathbf{k}) (k_\mu \varepsilon_\nu(0, k) - \mu \leftrightarrow \nu) \times (a_3(k) - a_0(k)) e^{-ikx} - \text{k.k.} \quad (10.49)$$

Hier ist  $F_{\mu\nu}^T$  der Beitrag der transversalen Polarisierungen  $\lambda = 1, 2$ . Analog findet man für den Feldimpuls den Ausdruck

$$P_\mu = P_\mu^T + \int d\mu(\mathbf{k}) k_\mu \left\{ (a_3^\dagger(k) - a_0^\dagger(k)) a_3(k) + a_0^\dagger(k) (a_3(k) - a_0(k)) \right\}. \quad (10.50)$$

Die Geister tragen nicht zu den Erwartungswerten  $\langle \psi | F_{\mu\nu}(x) | \psi \rangle$  und  $\langle \psi | P_\mu | \psi \rangle$  bei. Insbesondere ist  $H = P^0$  positiv auf dem physikalischen Hilbertraum  $\mathcal{F}_{\text{phys}}$ .

Schlussendlich bestimmen wir noch die relevanten Zweipunktsfunktionen. In der Formel

$$\begin{aligned} \langle 0 | A^\mu(x) A^\nu(x) | 0 \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mu(\mathbf{k}) d\mu(\mathbf{k}') e^{-ikx} e^{ik'y} \\ &\cdot \sum_{\lambda\lambda'} \varepsilon^\mu(\lambda, k) \varepsilon^\nu(\lambda', k) \langle 0 | a_\lambda(k) a_{\lambda'}^\dagger(k') | 0 \rangle \end{aligned}$$

benutzen wir die Kommutationsregel (10.25) und die Vollständigkeitsrelation (10.17) und finden

$$\langle 0 | A^\mu(x) A^\nu(x) | 0 \rangle = -\eta^{\mu\nu} i\Delta_+(x-y), \quad (10.51)$$

was sofort auf den kausalen Kommutator

$$[A^\mu(x), A^\nu(y)] = -\eta^{\mu\nu} i\Delta(x-y) \mathbb{1}, \quad (10.52)$$

und folgenden Feynman-Propagator

$$\langle 0 | T A^\mu(x) A^\nu(x) | 0 \rangle = -\eta^{\mu\nu} i\Delta_F(x-y) \quad (10.53)$$

führt. Abschließend sind noch einige Bemerkungen zum Gupta-Bleuler Verfahren angebracht.

Das Verfahren scheint nur wie ein mathematischer Trick, dazu erdacht, um die richtige Feynman-Funktion auf direktem Weg zu erzeugen. Die Überzeugung setzt sich aber zunehmend durch, dass hier ein wesentliches Strukturelement der Eichtheorien entdeckt worden ist. Mit den masselosen Eichbosonen untrennbar verknüpft ist das Auftreten von unphysikalischen Zuständen. Sie hinterlassen nie Spuren im Experiment, sind dennoch für eine vollständige Fassung der Theorie unverzichtbar.

Bei konkreten Rechnungen in der QED braucht man die *Wick-Identität* für das Photonfeld in der Gupta-Bleuler-Darstellung. Die Ableitung ist ähnlich wie für das skalare Feld und wir geben deshalb nur das Resultat an,

$$T \exp \{(A, j)\} = : \exp \{(A, j)\} : \exp \left\{ \frac{i}{2} (j, \Delta_F j) \right\}, \quad (10.54)$$

wobei wir folgende Abkürzungen

$$\begin{aligned} (A, j) &= \int d^4x A^\mu(x) j_\mu(x) \\ (j, \Delta_F j) &= \int d^4x d^4y j^\mu(x) \eta_{\mu\nu} \Delta_F(x-y) j^\nu(y). \end{aligned} \quad (10.55)$$

einführten.

# 11 Quantenelektrodynamik

Wir haben einige Aspekte von wechselwirkenden relativistischen Quantenfeldtheorien anhand des einfachen Skalarfeldes besprochen. Nachdem wir freie Spin- $\frac{1}{2}$  und Spin-1 Felder untersuchten, können wir uns nun der quantisierten Elektrodynamik, kurz Quantenelektrodynamik oder QED, zuwenden. Es folgt eine Diskussion von ausgewählten Streuprozessen in dieser höchst erfolgreichen Theorie.

Die QED ist eine Eichfeldtheorie die geladene Teilchen mit Spin  $1/2$  (z.B. Elektron, Myon oder Quark) in Wechselwirkung mit dem Photonfeld modelliert. Die Wechselwirkung zwischen den Feldern rührt von die minimale Ersetzung

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu(A) = \partial_\mu + ieA_\mu \quad (11.1)$$

in der Lagrange-Dichte für das Dirac-Feld. Die kovariante Ableitung und der Diracoperator

$$\not{D}_A = \gamma^\mu D_\mu(A) \quad (11.2)$$

transformieren beide kovariant unter Eichtransformationen

$$\not{D}_{A'} = e^{ie\lambda} \not{D}_A e^{-ie\lambda}, \quad \text{wobei} \quad A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \lambda \quad (11.3)$$

ist. Falls also  $\psi$  die Dirac-Gleichung im Potential  $A$  löst, dann löst das transformierte Spinorfeld  $\psi' = e^{ie\lambda}\psi$  die Dirac-Gleichung im eichtransformierten Potential  $A'$ . Offensichtlich ist die lokale Feldtransformation

$$(A_\mu, \psi) \longrightarrow (A'_\mu, \psi') = (A_\mu - \partial_\mu \lambda, e^{ie\lambda}\psi) \quad (11.4)$$

eine lokale Symmetrietransformation der Dirac-Theorie. Der zugehörige erhaltener Noetherstrom ist die elektrische Stromdichte der Elektronen und Positronen

$$j^\mu(x) = e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \quad , \quad \partial_\mu j^\mu = 0. \quad (11.5)$$

Der Kommutator zweier kovarianter Ableitungen ist proportional zum Feldstärketensor,

$$[D_\mu, D_\nu] = ieF_{\mu\nu}. \quad (11.6)$$

Die eichinvariante Lagrange-Dichte hat die Form

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I, \quad (11.7)$$

mit der Dichte  $\mathcal{L}_0$  für freie Felder,

$$\mathcal{L}_0(x) = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x) + \bar{\psi}(x)(i\cancel{D} - m)\psi(x) \quad (11.8)$$

und dem Wechselwirkungsterm, der den kovariant erhaltenen 4-er Stromdichte des geladenen Dirac Feldes enthält,

$$\mathcal{L}_1(x) = -eA_\mu(x)j^\mu(x), \quad j^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x). \quad (11.9)$$

Das Hamiltonsche Wirkungsprinzip für die lorentzinvariante Wirkung  $S_{\text{QED}} = \int \mathcal{L}_{\text{QED}}$  führt auf die Diracgleichung

$$(i\cancel{D} - m)\psi = 0 \quad (11.10)$$

und die inhomogene Maxwellgleichung

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad \text{mit} \quad j^\nu = ie\bar{\psi}\gamma^\nu\psi. \quad (11.11)$$

Wie im letzten Kapitel bereits diskutiert, ist die Elektrodynamik aufgrund der lokalen Eichinvarianz ein singuläres System – der zu  $A_0$  konjugierte Impuls verschwindet. Für dieses System mit Zwangsbedingungen werden wir eine Eichbedingung auferlegen müssen. Eine beliebige Eichung ist die kovariante Lorenzeichung. Hier ist die relativistische Kovarianz in jedem Schritt gewährleistet. Wir arbeiten aber zunächst in der Coulomb-Eichung. Diese ist nicht manifest kovariant, führt aber relativ schnell zu interessanten Resultaten.

## 11.1 QED in der Coulomb-Eichung

Durch Wahl einer geeigneten Eichfunktion  $\lambda$  kann man immer die transversale Eichung erreichen,

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} - \Delta\lambda \stackrel{!}{=} 0. \quad (11.12)$$

Im Gegensatz zur Elektrodynamik ohne Materiefelder kann man aber nicht simultan  $A_0 = 0$  fordern. Das skalare Potential  $A_0$  wird zu einer abhängigen Variablen, die über die Feldgleichungen eliminiert werden kann. Das Gauss-Gesetz

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad \text{mit} \quad \rho = e\psi^\dagger\psi, \quad \mathbf{E} = -\nabla A_0 - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (11.13)$$

impliziert nämlich in der transversalen Eichung

$$\Delta A_0 = -\rho. \quad (11.14)$$

Die eindeutige Lösung dieser Poissongleichung kennen wir aus der Elektrostatik

$$A_0(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho(t, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y}, \quad (11.15)$$

also wird  $A_0$  ein Funktional von  $\rho = e\psi^\dagger\psi$ . Wir zerlegen das elektrische Feld in einen transversalen und longitudinalen Anteil

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla A_0 \equiv \mathbf{E}_\perp + \mathbf{E}_\parallel. \quad (11.16)$$

Allgemein nennt man ein Gradientenfeld *longitudinal* und ein quellenfreies nennt man *transversal*. Transversale und longitudinale Felder sind senkrecht in  $L_2(\mathbb{R}^3) \times \mathbb{R}^3$ ,

$$\int d\mathbf{x} \mathbf{V}_\perp \cdot \mathbf{V}_\parallel = \int d\mathbf{x} \mathbf{V}_\perp \cdot \nabla \varphi = - \int d\mathbf{x} (\nabla \cdot \mathbf{V}_\perp) \varphi = 0,$$

und entsprechend kann die Lagrangedichte für das Photonenfeld durch

$$\mathcal{L}_\gamma = \frac{1}{2} (\mathbf{E}_\perp^2 + \mathbf{E}_\parallel^2 - B^2) \quad (11.17)$$

ersetzt werden. Da der Diracterm keine Zeitableitungen des Potentials enthält, sind die zu den Potentialen  $A_0$  und  $\mathbf{A}$  konjugierten Impulsfelder  $\pi^0 = 0$  und  $\boldsymbol{\pi} = -\mathbf{E}$ . Das zu  $\psi$  konjugierte Impulsfeld ist genauso wie in der freien Diractheorie proportional zum adjungierten Feld,  $\pi_\psi = i\psi^\dagger$ . Deshalb ergibt sich die Hamiltondichte

$$\mathcal{H} = \pi_i \dot{A}^i + \pi_\psi \dot{\psi} - \mathcal{L} = -\mathbf{E} \cdot \dot{\mathbf{A}} + i\psi^\dagger \dot{\psi} - \mathcal{L} = \mathcal{H}_\gamma + \mathcal{H}_e + \mathcal{H}_{\text{int}} \quad (11.18)$$

Führt man die aus der Diractheorie bekannten Matrizen  $\beta = \gamma^0$  und  $\alpha^i = \gamma^0 \gamma^i$  ein und setzt  $\alpha^i \partial_i = \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla$ , dann schreiben sich die drei Beiträge zur Hamiltondichte wie folgt,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\gamma &= \frac{1}{2} \mathbf{E}_\perp^2 + \frac{1}{2} B^2 \\ \mathcal{H}_e &= \psi^\dagger (-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \beta m) \psi \\ \mathcal{H}_{\text{int}} &= j^\mu A_\mu - \frac{1}{2} \mathbf{E}_\parallel^2. \end{aligned} \quad (11.19)$$

Es sind die Dichten für die Energie des Photonfelds in der Coulomb-eichung, die Energie des Diracfelds und die Energie der Wechselwirkung. Die zur Wechselwirkung gehörige Energie kann mit Hilfe von  $\nabla \cdot \mathbf{E}_\parallel = \rho$  noch umgeformt werden. Wir beachten

$$\int d\mathbf{x} \rho A^0 = \int (\nabla \cdot \mathbf{E}_\parallel) A^0 = - \int \mathbf{E}_\parallel \cdot \nabla A^0 = \int \mathbf{E}_\parallel^2 \equiv 2H_{\text{coul}},$$

und deshalb ist

$$H_{\text{int}} = H_{\text{coul}} - \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \quad \text{mit} \quad H_{\text{coul}} = \frac{e^2}{8\pi} \int \frac{\rho(t, \mathbf{x}) \rho(t, \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{x} d\mathbf{y}. \quad (11.20)$$

Das longitudinale Feld  $\mathbf{E}_\parallel$  oder letztlich das Potential  $A_0$  bestimmt die instantane Coulomb-Wechselwirkung zwischen zwei Ladungen. Da  $\mathbf{A}$  in  $H_{\text{int}}$  transversal ist, ist in der Form (11.20) das longitudinale Feld vollständig eliminiert zugunsten der instantanen Coulomb-Wechselwirkung.

Quantisiert wird durch Übergang zu Feldoperatoren und durch Weglassen der Nullpunktenergien. Letzteres kann mit Hilfe des Normalproduktes von  $H$  erreicht werden,

$$H = \int : \mathcal{H}_\gamma + \mathcal{H}_e + \mathcal{H}_{\text{int}} : d\mathbf{x}. \quad (11.21)$$

Die auftretenden Divergenzen bei der Berechnung von beobachtbaren Größen können durch eine Redefinition der Masse, Ladung und Felder absorbiert werden.

## 11.2 Streuung am äußeren Potential

Wir betrachten zunächst die Streuung eines Elektrons an einem äußeren elektrostatischen Potential ( $A^0, \mathbf{A} = 0$ ), welches durch das Elektron nicht beeinflusst wird. Das Elektron wird als Probeteilchen im gegebenen klassischen Feld betrachtet. Seine Rückwirkung auf das Potential wird vernachlässigt.

Nach den Überlegungen im letzten Abschnitt ist die Hamiltondichte gegeben durch

$$H_{\text{int}} = \int \rho A_{\text{ext}}^0 d\mathbf{x}, \quad (11.22)$$

wobei  $\rho = e : \psi_{\text{ein}}^\dagger \psi_{\text{ein}} :$  die gestreuten Teilchen beschreibt. Wir benutzen, dass im Wechselwirkungsbild das freie einlaufende Feld in  $H_{\text{int}}$  auftritt. Die S-Matrixelemente für den Übergang vom Anfangszustand  $|i\rangle$  in den Endzustand  $|f\rangle \neq |i\rangle$  ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \langle f | T \exp \left\{ -ie \int d^4x : \psi_{\text{ein}}^\dagger(x) \psi_{\text{ein}}(x) : A_{\text{ext}}^0(x) \right\} | i \rangle \\ &= -ie \langle f | \int d^4x : \psi_{\text{ein}}^\dagger(x) \psi_{\text{ein}}(x) : A_{\text{ext}}^0(x) | i \rangle + O(e^2). \end{aligned} \quad (11.23)$$

Dabei sind die Anfangs- und Endzustand Eielektronenzustände mit festen Impulsen und Helizitäten,

$$|i\rangle = a_\sigma^\dagger(p)|0\rangle \quad \text{und} \quad |f\rangle = a_{\sigma'}^\dagger(p')|0\rangle. \quad (11.24)$$

Das in erster Ordnung Störungstheorie auftretende Matrixelement lautet damit

$$S_{fi}^{(1)} = -ie \int d^4x \langle 0 | a_{\sigma'}(p') : \psi_{\text{ein}}^\dagger(x) \psi_{\text{ein}}(x) : a_\sigma^\dagger(p) | 0 \rangle A_{\text{ext}}^0(x).$$

Zur Berechnung der auftretenden Vakuumamplitude setzen wir die Modenentwicklung für das einlaufende Feld ein. Wir unterdrücken dabei den Index „ein“ an den Operatoren. Es lohnt sich hier, das Diracfeld in seinen positiven und negativen Energieanteil zu zerlegen,

$$\begin{aligned} \psi &= \psi^+ + \psi^- \quad \text{mit} \quad \psi^+(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mu(\mathbf{p}) \sum_\sigma u(\sigma, p) a_\sigma(p) e^{-ipx} \\ \psi^-(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mu(\mathbf{p}) \sum_\sigma v(\sigma, p) b_\sigma^\dagger(p) e^{ipx}. \end{aligned} \quad (11.25)$$



Der Teil  $\psi^+$  enthält nur Vernichtungsoperatoren und  $\psi^-$  nur Erzeugungsoperatoren. Daraus folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} \langle 0|a_{\sigma'}(p') : \psi^\dagger(x)\psi(x) : a_\sigma^\dagger(p)|0\rangle &= \langle 0|a_{\sigma'}(p') : \psi^{+\dagger}(x)\psi^+(x) : a_\sigma^\dagger(p)|0\rangle \\ &+ \langle 0|a_{\sigma'}(p') : \psi^{-\dagger}(x)\psi^-(x) : a_\sigma^\dagger(p)|0\rangle. \end{aligned} \quad (11.26)$$

Der erste Term auf der rechten Seite ist

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mu(\mathbf{q}') d\mu(\mathbf{q}) \sum_{\rho', \rho} u^\dagger(\rho', q') u(\rho, q) e^{i(q'-q)x} \langle 0|a_{\sigma'}(p') a_{\rho'}^\dagger(q') a_\rho(q) a_\sigma^\dagger(p)|0\rangle.$$

Wegen  $a_\rho(q)|0\rangle = 0$  dürfen wir die beiden letzten Operatoren im Vakuum-Erwartungswert durch ihren Antikommutator ersetzen. Dasselbe gilt dann auch für die beiden ersten Operatoren und wir erhalten

$$\langle 0|a_{\sigma'}(p') a_{\rho'}^\dagger(q') a_\rho(q) a_\sigma^\dagger(p)|0\rangle = 2E_p 2E_{p'} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{q}') \delta_{\sigma\rho} \delta_{\sigma'\rho'}.$$

Die Integrationen und Summationen können leicht ausgeführt werden und der erste Term auf der rechten Seite von (11.26) lautet

$$\frac{1}{(2\pi)^3} e^{i(p'-p)x} u^\dagger(\sigma', p') u(\sigma, p). \quad (11.27)$$

Der zweite Term auf der rechten Seite in (11.26) verschwindet,

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mu(\mathbf{q}') d\mu(\mathbf{q}) \sum_{\rho', \rho} v^\dagger(\rho', q') v(\rho, q) e^{i(q-q')x} \langle 0|a_{\sigma'}(p') : b_{\rho'}(q') b_\rho^\dagger(q) : a_\sigma^\dagger(p)|0\rangle = 0,$$

da wegen der Normalordnung  $b_{\rho'}(q')$  direkt auf das Vakuum wirkt. Damit finden wir das Matrixelement

$$S_{fi}^{(1)} = -\frac{ie}{(2\pi)^3} \int d^4x e^{i(p'-p)x} A_{\text{ext}}^0(x) u^\dagger(\sigma', p') u(\sigma, p). \quad (11.28)$$

In erster Ordnung Störungstheorie werden die S-Matrixelemente durch die Fouriertransformierte des äußeren Potentials bestimmt. Wählen wir die Streuung am Kern mit Coulombpotential

$$A_{\text{ext}}^0(x) = -\frac{1}{4\pi} \frac{Ze}{|\mathbf{x}|}, \quad (11.29)$$

dann erhält man

$$\begin{aligned} \int d^4x A_{\text{ext}}^0(x) e^{i(p'-p)x} &= -\frac{Ze}{2} \delta(E - E') \int \frac{e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|} \\ &= -2\pi \delta(E' - E) \frac{Ze}{|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|^2}, \end{aligned}$$

und entsprechend das S-Matrixelement

$$S_{fi} = \frac{ie}{(2\pi)^2} \delta(E' - E) \frac{Ze}{|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|^2} u^\dagger(\sigma', p') u(\sigma, p). \quad (11.30)$$

Die  $\delta$ -Distribution besagt, dass das gestreute Elektron die gleiche Energie wie das einlaufende Elektron haben muss, da das statische Potential weder Energie aufnehmen noch abgeben kann.

Die *Übergangsrate* ist gegeben durch  $|S_{fi}|^2$ , dividiert durch die Dauer der Wechselwirkung. Diese kann man über folgende Betrachtung einführen,

$$\delta(E' - E) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(E-E')t} dt \xrightarrow{E \rightarrow E'} \frac{T}{2\pi}. \quad (11.31)$$

Also nehmen wir beim quadrieren der Amplitude folgende Ersetzung vor,

$$|\delta(E' - E)|^2 \longrightarrow \frac{T}{2\pi} \delta(E' - E) \quad (11.32)$$

und finden die Übergangsrate

$$\frac{|S_{fi}|^2}{T} = \frac{4Z^2\alpha^2}{(2\pi)^3} \frac{|u^\dagger(\sigma', p')u(\sigma, p)|^2}{|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|^4} \delta(E' - E) \quad (11.33)$$

Den Wirkungsquerschnitt für die Streuung erhält man durch Multiplikation mit dem Phasenraumelement  $d\mu(\mathbf{p}')$  der Endzustände und Division durch den einfallenden Fluss  $(2\pi)^{-3}|\mathbf{p}|/E$ . Dann erhalten wir für die Übergangswahrscheinlichkeit in die Endzustände in das Impulsintervall  $d\mathbf{p}'$  um  $\mathbf{p}'$  den Ausdruck

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{|S_{fi}|^2}{T} \frac{(2\pi)^3 E}{|\mathbf{p}|} d\mu(\mathbf{p}') \\ &= 4Z^2\alpha^2 \frac{|u^\dagger(\sigma', p')u(\sigma, p)|^2}{|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|^4} \frac{E}{|\mathbf{p}|} d\mu(\mathbf{p}') \delta(E' - E). \end{aligned} \quad (11.34)$$

Den differentiellen Wirkungsquerschnitt bezüglich des Raumwinkels  $\Omega$  des gestreuten Elektrons erhält man nach Integration über  $|\mathbf{p}'|$ . Mit

$$d\mu(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} |\mathbf{p}| dE d\Omega \quad (11.35)$$

führt die Integration über  $|\mathbf{p}'|$  auf

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 2Z^2\alpha^2 E \frac{|u^\dagger(\sigma', p')u(\sigma, p)|^2}{|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|^4} \Big|_{E'=E}. \quad (11.36)$$

Wir wollen annehmen, dass das einlaufende Elektron unpolarisiert ist und dass wir die Polarisation der gestreuten Teilchen nicht beobachten. Dann müssen wir über die Polarisationsrichtungen der einlaufenden Elektronen mitteln und über die Polarisationsrichtungen im Endzustand summieren.

Wir sehen uns die Mittelung bzw. Summation über die Spinfreiheitsgrade an. Mit Hilfe von (9.28) ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} |u^\dagger(\sigma', p') u(\sigma, p)|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} \bar{u}(\sigma', p') \gamma^0 u(\sigma, p) \bar{u}(\sigma, p) \gamma^0 u(\sigma', p') \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\sigma'} \bar{u}(\sigma', p') \gamma^0 (\not{p} + m) \gamma^0 u(\sigma', p') \\
&= \frac{1}{2} \text{tr} (u(\sigma', p') \bar{u}(\sigma', p') \gamma^0 (\not{p} + m) \gamma^0) \\
&= \frac{1}{2} \text{tr} (\not{p}' + m) \gamma^0 (\not{p} + m) \gamma^0. \tag{11.37}
\end{aligned}$$

Hier treten erstmalig Spuren von Produkten von Gamma-Matrizen auf. Bei der Berechnung von Wirkungsquerschnitten und Zerfallsraten in der QED stößt man immer auf derartige Spuren. Inzwischen gibt es Computerprogramme, die uns die Arbeit abnehmen. Trotzdem sollte man die Spuren der einfachen Produkte von Gamma-Matrizen kennen. Hier einige ausgewählte Resultate:

$$\text{tr} (\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}, \tag{11.38}$$

$$\text{tr} (\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}) = 0 \quad \text{für ungerade } n, \tag{11.39}$$

$$\text{tr} (\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta) = 4(g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}). \tag{11.40}$$

Die erste Beziehung folgt aus der definierenden Relation der Cliffordalgebra. Zum Beweis der zweiten Identität benutzen wir die mit allen  $\gamma^\mu$  antikommutierende hermitesche Matrix  $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ . Wegen der Zyklichkeit der Spur und mit  $\gamma_5^2 = \mathbb{1}$  folgt

$$\text{tr} (\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}) = \text{tr} (\gamma_5 \gamma^{\mu_1} \gamma_5 \gamma^{\mu_2} \dots \gamma_5 \gamma^{\mu_n} \gamma_5) = (-1)^n \text{tr} (\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}).$$

Also verschwindet die Spur für ungerade  $n$ . Zum Beweis der letzten Identität formen wir  $\text{tr} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta$  um, indem wir  $\gamma^\mu$  zyklisch nach rechts vertauschen und dann mit Hilfe der Antivertauschungsrelationen durch die anderen  $\gamma$ -Matrizen „durchziehen“,

$$\begin{aligned}
\text{tr} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta &= \text{tr} \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu = 2g^{\beta\mu} \text{tr} \gamma^\nu \gamma^\alpha - \text{tr} \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \\
&= 2g^{\beta\mu} \text{tr} \gamma^\nu \gamma^\alpha - 2g^{\alpha\mu} \text{tr} \gamma^\nu \gamma^\beta + \text{tr} \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \\
&= 2g^{\beta\mu} \text{tr} \gamma^\nu \gamma^\alpha - 2g^{\alpha\mu} \text{tr} \gamma^\nu \gamma^\beta + 2g^{\nu\mu} \text{tr} \gamma^\alpha \gamma^\beta - \text{tr} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta.
\end{aligned}$$

Diese Identität lösen wir nach  $\text{tr} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta$  und berechnen die Spuren der Produkte von zwei  $\gamma$ -Matrizen mit Hilfe von (11.38). Es ergibt sich die Formel (11.40). Nun berechnen wir die Spur in (11.37). Es ist

$$\text{tr} (\not{p}' \gamma^0 \not{p} \gamma^0) = p'_\mu p_\nu \text{tr} \gamma^\mu \gamma^0 \gamma^\nu \gamma^0 = 8EE' - 4pp' \tag{11.41}$$

und damit folgt, wenn wir noch die Energieerhaltung ausnutzen, zum Beispiel in  $pp' = E^2 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}'$ , die Relation

$$\frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} |u^\dagger(\sigma', p') u(\sigma, p)|^2 = 4E^2 - 2pp' + 2m^2 = 2(E^2 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' + m^2). \tag{11.42}$$

Wir führen den Streuwinkel ein,

$$\cos \vartheta = \frac{\mathbf{p}' \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}'| |\mathbf{p}|}, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi. \quad (11.43)$$

Damit vereinfacht sich die Spinsumme zu

$$\frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} |u^\dagger(\sigma', \mathbf{p}') u(\sigma, \mathbf{p})|^2 = 2 (2m^2 + \mathbf{p}^2 (1 + \cos \vartheta)) = 4 \left( m^2 + \mathbf{p}^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \right) \quad (11.44)$$

Mit Hilfe von  $|\mathbf{p}|/E = \beta$  und  $E = \gamma m$  kann der Klammerausdruck vereinfacht werden,

$$m^2 + \mathbf{p}^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} = E^2 \left( 1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right).$$

Beachten wir noch, dass

$$(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 = 2\mathbf{p}^2 - 2\mathbf{p}' \cdot \mathbf{p} = 2\mathbf{p}^2 (1 - \cos \vartheta) = 4\mathbf{p}^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}, \quad (11.45)$$

dann vereinfacht sich die Formel für den Wirkungsquerschnitt für unpolarisierte Streuung,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{\text{unpol}} = \frac{(Z\alpha)^2 E^2}{|\mathbf{p}|^4 \sin^4 \vartheta/2} \left( 1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right) \quad \left( \frac{1}{4} \text{ missing} \right) \quad (11.46)$$

Die ist die *Mottsche Streuformel*. Im nichtrelativistischen Grenzfall sind die Impulse klein gegenüber der Ruhemasse des Elektrons und die Mottsche Streuformel geht in die Rutherford'sche Formel über.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{\text{unpol}} = \left( \frac{Ze^2}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{E_{\text{kin}}^2} \frac{1}{16 \sin^4 \vartheta/2}, \quad E_{\text{kin}} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \quad (|\mathbf{p}| \ll m). \quad (11.47)$$

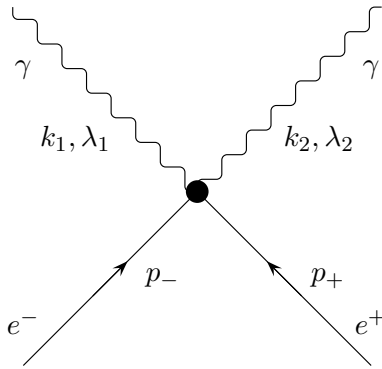
Im extrem relativistischen Grenzfall ergibt sich dagegen

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{\text{unpol}} = \left( \frac{Ze^2}{4\pi} \right)^2 \frac{\cos^2 \vartheta/2}{4\mathbf{p}^2 \sin^4 \vartheta/2}, \quad (|\mathbf{p}| \gg m). \quad (11.48)$$

## 11.3 Paarvernichtung

Die Paarvernichtung (Annihilation) von Materie mit Antimaterie führt auf eindruckliche Weise die Äquivalenz von Masse und Energie vor. Die Elektron-Positron Paarvernichtung wurde bereits 1928 von P. Dirac im Rahmen seiner Löchertheorie berechnet. Hier geben wir eine systematische feldtheoretische Ableitung des zugehörigen Wirkungsquerschnitts<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Wir folgen N. Straumann [14].



Die Impulse und Polarisationen der am Prozess beteiligten Teilchen sind in der nebenstehenden Abbildung angedeutet. Die Anfangs- und Endzustände sind

$$\begin{aligned} |e^- e^+\rangle &= a_{\sigma_1}^\dagger(p_1) b_{\sigma_2}^\dagger(p_2) |0\rangle \\ |\gamma\gamma\rangle &= a_{\lambda_1}^\dagger(k_1) a_{\lambda_2}^\dagger(k_2) |0\rangle \end{aligned} \quad (11.49)$$

In führende Ordnung der Störungstheorie trägt nur der zweite Term in der Wechsel-

wirkung  $H_{\text{int}}$  in (8.41) bei und wir erhalten

$$S_{fi}^{(2)} = (-ie)^2 \int_{x_1^0 > x_2^0} d^4x_1 d^4x_2 \langle 0 | j^i(x_1) j^j(x_2) | e^- e^+ \rangle \langle \gamma\gamma | A^i(x_1) A^j(x_2) | 0 \rangle. \quad (11.50)$$

mit  $j^i = :\bar{\psi}\gamma^i\psi:$ . Das Photonenmatrixelement ist nach Einsetzen von

$$\mathbf{A}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mu(\mathbf{k}) \left( a_\lambda(k) \boldsymbol{\varepsilon}(\lambda, k) e^{-ikx} + a_\lambda^\dagger(k) \boldsymbol{\varepsilon}(\lambda, k) e^{ikx} \right) \quad (11.51)$$

schnell berechnet. Dazu bestimmen wir in

$$\begin{aligned} \langle \gamma\gamma | A^i(x_1) A^j(x_2) | 0 \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mu(\mathbf{q}) d\mu(\mathbf{q}') \langle 0 | \dots | 0 \rangle \epsilon^i(\lambda, q) \epsilon^j(\lambda', q') e^{iqx_1 + iq'x_2} \\ \langle 0 | \dots | 0 \rangle &= \langle 0 | a_{\lambda_2}(k_2) a_{\lambda_1}(k_1) a_\lambda^\dagger(q) a_{\lambda'}^\dagger(q') | 0 \rangle \end{aligned} \quad (11.52)$$

das Matrixelement des Produkts der  $a$  und  $a^\dagger$ ,

$$\begin{aligned} \langle 0 | \dots | 0 \rangle &= 2\omega_{k_1} \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}) \langle 0 | a_{\lambda_2}(k_2) a_{\lambda'}^\dagger(q') | 0 \rangle \delta_{\lambda_1, \lambda} \\ &+ \langle 0 | a_{\lambda_2}(k_2) a_{\lambda'}^\dagger(q) a_{\lambda_1}(k_1) a_{\lambda'}^\dagger(q') | 0 \rangle \\ &= 2\omega_{k_1} 2\omega_{k_2} \left\{ \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}) \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{q}') \lambda_{\lambda_1, \lambda} \delta_{\lambda_2, \lambda'} + (1 \leftrightarrow 2) \right\} \end{aligned}$$

Die Integration über die Impulse ergibt für den photonischen Faktor

$$\langle \gamma\gamma | A^i(x_1) A^j(x_2) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \left\{ \epsilon^i(\lambda_1, k_1) e^{ik_1 x_1} \epsilon^j(\lambda_2, k_2) e^{ik_2 x_2} + (1 \leftrightarrow 2) \right\}. \quad (11.53)$$

Setzt man  $e^\mu := (0, \boldsymbol{\varepsilon})$  für beide Photonen, dann findet man

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(2)} &= \frac{(-ie)^2}{(2\pi)^3} \int_{x_1^0 > x_2^0} d^4x_1 d^4x_2 \langle 0 | :\bar{\psi}(x_1) \gamma^\mu \psi(x_1): :\bar{\psi}(x_2) \gamma^\nu \psi(x_2): | e^- e^+ \rangle \\ &\quad \times \left\{ \epsilon_\mu(\lambda_1, k_1) e^{ik_1 x_1} \epsilon_\nu(\lambda_2, k_2) e^{ik_2 x_2} + (1 \leftrightarrow 2) \right\}. \end{aligned} \quad (11.54)$$

Nun bestimmen wir das verbleibende Matrixelement des Produkts von fermionischen Operatoren. Wie bei der Streuung im äußeren Potential zerlegen wir das Elektron-Positron Feld

in seine positiven und negativen Frequenzanteile,

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mu \sum_{\sigma} \left( u(\sigma, p) a_{\sigma}(p) e^{-ipx} + v(\sigma, p) b_{\sigma}^{\dagger}(p) e^{ipx} \right) \\ &= \psi^{+}(x) + \psi^{-}(x)\end{aligned}\quad (11.55)$$

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mu \sum_{\sigma} \left( \bar{v}(\sigma, p) b_{\sigma}(p) e^{-ipx} + \bar{u}(\sigma, p) a_{\sigma}^{\dagger}(p) e^{ipx} \right) \\ &= \bar{\psi}^{+}(x) + \bar{\psi}^{-}(x)\end{aligned}\quad (11.56)$$

Wir erinnern daran wie sie Teilchenbild wirken:

$$\begin{array}{ll}\psi^{+} \text{ vernichtet Elektronen} & \psi^{-} \text{ erzeugt Positronen,} \\ \bar{\psi}^{+} \text{ vernichtet Positronen} & \bar{\psi}^{-} \text{ erzeugt Elektronen.}\end{array}$$

Nach der Normalordnung stehen die positiven Frequenzanteile mit den Vernichtungsoperatoren rechts,

$$\begin{aligned}\text{:}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\text{:} &= (\gamma^{\mu})_{\alpha\beta} \text{:}(\bar{\psi}_{\alpha}^{+}\psi_{\beta}^{+} + \bar{\psi}_{\alpha}^{-}\psi_{\beta}^{+} + \bar{\psi}_{\alpha}^{+}\psi_{\beta}^{-} + \bar{\psi}_{\alpha}^{-}\psi_{\beta}^{-})\text{:} \\ &= (\gamma^{\mu})_{\alpha\beta} \left( \bar{\psi}_{\alpha}^{+}\psi_{\beta}^{+} + \bar{\psi}_{\alpha}^{-}\psi_{\beta}^{+} - \psi_{\beta}^{-}\bar{\psi}_{\alpha}^{+} + \bar{\psi}_{\alpha}^{-}\psi_{\beta}^{-} \right).\end{aligned}$$

Für einen beliebigen Zustand  $|\Phi\rangle$  gilt

$$\langle 0 | \text{:}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\text{:} | \Phi \rangle = \langle 0 | \bar{\psi}^{+}\gamma^{\mu}\psi^{+} | \Phi \rangle, \quad (11.57)$$

und damit die rechte Seite nicht verschwindet, muss  $\Phi$  ein Zustand mit einem Elektron und einem Positron sein. Deshalb tragen im Matrixelement in (11.54) nur zwei Terme bei,

$$\begin{aligned}\langle 0 | \text{:}\bar{\psi}(x_1)\gamma^{\mu}\psi(x_1)\text{:} \text{:}\bar{\psi}(x_2)\gamma^{\nu}\psi(x_2)\text{:} | e^{-} e^{+} \rangle \\ = (\gamma^{\mu})_{\alpha\beta} (\gamma^{\nu})_{\gamma\delta} \langle 0 | \bar{\psi}_{\alpha}^{+}(x_1) \psi_{\beta}^{+}(x_1) \bar{\psi}_{\gamma}^{-}(x_2) \psi_{\delta}^{+}(x_2) | e^{-} e^{+} \rangle \\ - (\gamma^{\mu})_{\alpha\beta} (\gamma^{\nu})_{\gamma\delta} \langle 0 | \bar{\psi}_{\alpha}^{+}(x_1) \psi_{\beta}^{+}(x_1) \psi_{\delta}^{-}(x_2) \bar{\psi}_{\gamma}^{+}(x_2) | e^{-} e^{+} \rangle\end{aligned}\quad (11.58)$$

Wir betrachten zuerst das erste Matrixelement auf der rechten Seite. Wir bringen  $\bar{\psi}_{\alpha}^{+}(x_1)$  rechts von  $\bar{\psi}_{\gamma}^{-}(x_2)$ . Dabei treten weder Vorzeichenwechsel noch zusätzliche Terme auf, da die Komponenten von  $\bar{\psi}^{+}$  nur mit denjenigen von  $\psi^{-}$  nicht antikommutieren. Der erste Term in (11.58) wird somit

$$\begin{aligned}(\gamma^{\mu})_{\alpha\beta} (\gamma^{\nu})_{\gamma\delta} \langle 0 | \psi_{\beta}^{+}(x_1) \bar{\psi}_{\gamma}^{-}(x_2) \bar{\psi}_{\alpha}^{+}(x_1) \psi_{\delta}^{+}(x_2) | e^{-} e^{+} \rangle \\ = (\gamma^{\mu})_{\alpha\beta} (\gamma^{\nu})_{\gamma\delta} \langle 0 | \psi_{\beta}^{+}(x_1) \bar{\psi}_{\gamma}^{-}(x_2) | 0 \rangle \langle 0 | \bar{\psi}_{\alpha}^{+}(x_1) \psi_{\delta}^{+}(x_2) | e^{-} e^{+} \rangle.\end{aligned}\quad (11.59)$$

Im zweiten Term in (11.58) vertauschen wir

$$\mu \leftrightarrow \nu, \quad (\alpha, \beta) \leftrightarrow (\gamma, \delta), \quad x_1 \leftrightarrow x_2.$$

Der Photonenfaktor in (11.54) bleibt dabei invariant aber in (11.54) müssen wir nun über das Gebiet  $x_2^0 > x_1^0$  integrieren. Nach den Vertauschungen bringen wir den zweiten Operator an die letzte Stelle. Dabei ändert das Vorzeichen nicht, und der zweite Term in (11.58) lautet

$$\begin{aligned} & (\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(\gamma^\nu)_{\gamma\delta}\langle 0|\bar{\psi}_\gamma^+(x_2)\psi_\beta^-(x_1)\bar{\psi}_\alpha^+(x_1)\psi_\delta^+(x_2)|e^-e^+\rangle \\ &= (\gamma^\mu)_{\alpha\beta}(\gamma^\nu)_{\gamma\delta}\langle 0|\bar{\psi}_\gamma^+(x_2)\psi_\beta^-(x_1)|0\rangle\langle 0|\bar{\psi}_\alpha^+(x_1)\psi_\delta^+(x_2)|e^-e^+\rangle. \end{aligned} \quad (11.60)$$

Das letzten Matrixelemente in (11.59) und (11.60) sind gleich und mit Hilfe von (11.55) und (11.56) problemlos zu berechnen. Das Elektron habe Quantenzahlen  $(\sigma_1, p_1)$  und das Positron die Quantenzahlen  $(\sigma_2, p_2)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} & \langle 0|\bar{\psi}_\alpha^+(x_1)\psi_\delta^+(x_2)|e^-e^+\rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mu(\mathbf{p})d\mu(\mathbf{p}')\bar{v}_\alpha(\sigma, p)u_\delta(\sigma', p')e^{-ipx_1-ip'x_2}\langle 0|\dots|0\rangle \end{aligned}$$

mit fermionischen Matrixelement

$$\begin{aligned} \langle 0|\dots|0\rangle &= \langle 0|b_\sigma(p)a_{\sigma'}(p')a_{\sigma_1}^\dagger(p_1)b_{\sigma_2}^\dagger(p_2)|0\rangle \\ &= 2\omega_{p_1}2\omega_{p_2}\delta^3(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}')\delta^3(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p})\delta_{\sigma',\sigma_1}\delta_{\sigma,\sigma_2}. \end{aligned}$$

Einsetzen und über die Impulse integrieren führt dann auf

$$\langle 0|\bar{\psi}_\alpha^+(x_1)\psi_\delta^+(x_2)|e^-e^+\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3}\bar{v}_\alpha(\sigma_2, p_2)u_\delta(\sigma_1, p_1)e^{-ip_2x_1-ip_1x_2}. \quad (11.61)$$

In den Vakuumerwartungswerten in den rechten Seiten von (11.59) und (11.60) können wir die Indizes  $(\pm)$  wieder weglassen,

$$\begin{aligned} \langle 0|\psi_\beta^+(x_1)\bar{\psi}_\gamma^-(x_2)|0\rangle &= \langle 0|\psi_\beta(x_1)\bar{\psi}_\gamma(x_2)|0\rangle \\ \langle 0|\bar{\psi}_\gamma^+(x_1)\psi_\beta^-(x_1)|0\rangle &= \langle 0|\bar{\psi}_\gamma(x_2)\psi_\beta(x_1)|0\rangle. \end{aligned} \quad (11.62)$$

Nun können wir (11.62,11.61) in (11.59,11.60) einsetzen. Dies führt zu folgender Darstellung des  $S$ -Matrixelements,

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(2)} &= \frac{(-ie)^2}{(2\pi)^6} \int d^4x_1d^4x_2 \{ \epsilon_\mu(\lambda_1, k_1)e^{ik_1x_1}\epsilon_\nu(\lambda_2, k_2)e^{ik_2x_2} + (1 \leftrightarrow 2) \} \\ &\quad \times \bar{v}_\alpha(\sigma_2, p_2)e^{-ip_2x_1}\gamma_{\alpha\beta}^\mu \left[ \langle 0|\psi_\beta(x_1)\bar{\psi}_\gamma(x_2)|0\rangle\theta(x_1^0 - x_2^0) \right. \\ &\quad \left. - \langle 0|\bar{\psi}_\gamma(x_2)\psi_\beta(x_1)|0\rangle\theta(x_2^0 - x_1^0) \right] e^{-ip_1x_2}\gamma_{\gamma\delta}^\nu u_\delta(\sigma_1, p_1). \end{aligned} \quad (11.63)$$

Zwischen den eckigen Klammern steht der Feynman-Propagator  $iS_F(x_1 - x_2)_{\beta\gamma}$ , so dass

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(2)} &= \frac{(-ie)^2}{(2\pi)^6} \int d^4x_1d^4x_2 \{ \epsilon_\mu(\lambda_1, k_1)e^{ik_1x_1}\epsilon_\nu(\lambda_2, k_2)e^{ik_2x_2} + (1 \leftrightarrow 2) \} \\ &\quad \times \bar{v}_\alpha(\sigma_2, p_2)\gamma^\mu iS_F(x_1 - x_2)\gamma^\nu u_\delta(\sigma_1, p_1) e^{-ip_2x_1-ip_1x_2}. \end{aligned} \quad (11.64)$$

Setzen wir die Fourierdarstellung des Feynman-Propagators ein, dann können die Integrationen über  $x_1$  und  $x_2$  ausgeführt werden,

$$\begin{aligned} & \int d^4x_1 d^4x_2 e^{ix_1(k_1-p_2)+ix_2(k_2-p_1)} S_F(x_1-x_2) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4p e^{ix_1(k_1-p_2-p)+ix_2(k_2-p_1+p)} \frac{\not{p}+m}{p^2-m^2+i\epsilon} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p (2\pi)^8 \delta^4(k_1-p_2-p) \delta^4(k_2-p_1+p) \frac{\not{p}+m}{p^2-m^2+i\epsilon} \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(k_1+k_2-p_1-p_2) \frac{\not{p}_1-\not{k}_2+m}{(p_1-k_2)^2-m^2+i\epsilon} \end{aligned}$$

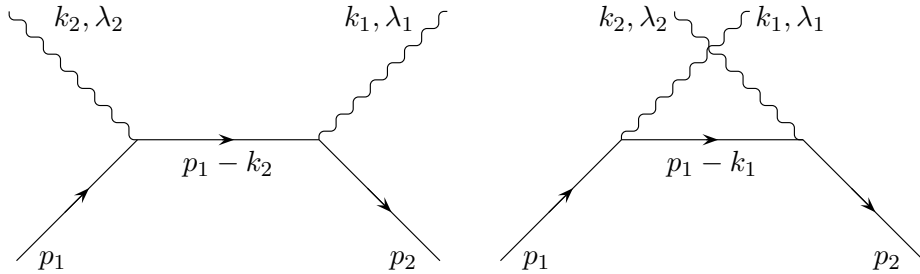
Wie erwartet erhalten wir eine Delta-Distribution, welche die Erhaltung von Energie und Impuls bei der elastischen Streuung ausdrückt. Eingesetzt in (11.64) ergibt sich

$$S_{fi} = -i(2\pi)^4 \delta^4(k_1+k_2-p_1-p_2) T_{fi} \quad (11.65)$$

mit dem  $T$ -Matrixelement

$$\begin{aligned} T_{fi} = \frac{e^2}{(2\pi)^6} \bar{v}(\sigma_2, p_2) & \left\{ \not{\epsilon}(k_1, \lambda_1) \frac{\not{p}_1-\not{k}_2+m}{(p_1-k_2)^2-m^2+i\epsilon} \not{\epsilon}(k_2, \lambda_2) \right. \\ & \left. + \not{\epsilon}(k_2, \lambda_2) \frac{\not{p}_1-\not{k}_1+m}{(p_1-k_1)^2-m^2+i\epsilon} \not{\epsilon}(k_1, \lambda_1) \right\} u(\sigma_1, p_1) \quad (11.66) \end{aligned}$$

Dieses Resultat stellen wir graphisch dar. Der erste Term in (11.66) entspricht dem linken Diagramm und der zweite Term dem rechten Diagramm.



Aus diesem  $S$ -Matrixelement berechnet man nun mithilfe der Spurformeln den Wirkungsquerschnitt für die Vernichtung eines unpolarisierten einfallenden Positrons mit Energie  $E_+$  und Impuls  $\mathbf{p}_+$  an einem unpolarisierten Elektron [14],

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Lab.}} = \frac{\alpha^2}{8m^2} \frac{\omega^2}{|\mathbf{p}_+|(m+E_+)} \left( \frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} - 4(\boldsymbol{\epsilon}' \cdot \boldsymbol{\epsilon})^2 - 2 \right). \quad (11.67)$$

Ausgehend von den bei der Berechnung des  $T$ -Matrixelementes für die Paarvernichtung gemachten Manipulationen kann man nun die nach Richard Feynman benannten Regeln für die Berechnung von  $T$ -Matrixelementen aufstellen. Diese werden wir im folgenden Abschnitt diskutieren.



## 11.4 Feynman-Regeln der QED

Die störungstheoretische Behandlung der Wechselwirkung geschieht in drei Schritten.

1. Eine Entwicklung nach Potenzen der Wechselwirkung

$$S_n = \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots \int d^4x_n T(\mathcal{L}_I(x_1) \cdots \mathcal{L}_I(x_n)). \quad (11.68)$$

2. Eine Entwicklung des Integranden nach Normalprodukten der Felder, wobei jedem auftretenden Normalprodukt ein *Graph* zugeordnet wird, so dass die Summe über die auftretenden Graphen  $G$  geführt wird,

$$T(\mathcal{L}_I(x_1) \cdots \mathcal{L}_I(x_n)) = \sum_G N_G(x_1, \dots, x_n). \quad (11.69)$$

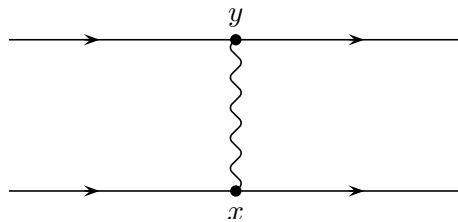
Die Raumpunkte  $x_i$  sind die Vertices von  $G$ .

3. Eine Zerlegung des Graphen  $G$  in zusammenhängende Teilgraphen. Einer solchen Zerlegung entspricht immer einer Zerlegung der Vertices  $x_1, \dots, x_n$  in nicht-leere Teilmengen. Ist  $G = G_1 \cup G_2$  und enthält  $G_1$  die Vertices  $x_1, \dots, x_s$  und  $G_2$  die Vertices  $x_{s+1}, \dots, x_n$ , so gilt

$$N_G(x_1, \dots, x_n) = N_{G_1}(x_1, \dots, x_s) N_{G_2}(x_{s+1}, \dots, x_n). \quad (11.70)$$

Den Beitrag eines zusammenhängenden Graphen berechnet man nach den für die betrachtete Feldtheorie spezifischen *Feynman-Regeln*.

Für die QED enthält  $\mathcal{L}_I$  das freie Photonfeld – in der kovarianten Formulierung das Feld in der *Gupta-Bleuler-Darstellung* – und das freie Dirac Feld mit Masse  $m$ . Wir wählen als Beispiel den folgenden Graphen mit zwei Elektronen im Anfangs- und zwei Elektronen im Endzustand:



Diesem zusammenhängenden Graphen entspricht in zweiter Ordnung das Normalprodukt

$$T(\mathcal{L}_I(x)\mathcal{L}_I(y)) = T(j^\mu(x)j^\nu(y))T(A_\mu(x)A_\nu(y)) \quad (11.71)$$

Hier wendet man die *Wick-Regel* an und schreibt

$$T(A_\mu(x)A_\nu(y)) = :A_\mu(x)A_\nu(y): - i\eta_{\mu\nu}\Delta_F(x-y). \quad (11.72)$$

Weiterhin folgt

$$\begin{aligned}
 T(j^\mu(x)j^\nu(y)) &= :\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\bar{\psi}(y)\gamma^\nu\psi(y): \\
 &+ :\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\overbrace{\psi(x)\bar{\psi}(y)}\gamma^\nu\psi(y): \\
 &+ :\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\overbrace{\psi(x)\bar{\psi}(y)}\gamma^\nu\psi(y): \\
 &+ :\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\overbrace{\psi(x)\bar{\psi}(y)}\gamma^\nu\psi(y):
 \end{aligned}
 \tag{11.73}$$

wobei bei den Kontraktionen die Resultate (9.46) und (9.47) gebraucht werden. Es gibt keine Kontraktionen von Feldern am selben Raumzeitpunkt, da diese in  $\mathcal{L}_I(x)$  schon normalgeordnet sind. Beachtet man noch die diversen Vorzeichenwechsel beim 'vertauschen' zweier fermionischen Felder, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
 T(j^\mu(x)j^\nu(y)) &= :\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\bar{\psi}(y)\gamma^\nu\psi(y): \\
 &+ :\bar{\psi}(x)\gamma^\mu iS_F(x-y, m)\gamma^\nu\psi(y): \\
 &+ :\bar{\psi}(y)\gamma^\nu iS_F(y-x, m)\gamma^\mu\psi(x): \\
 &- \text{tr} \{ \gamma^\mu iS_F(x-y, m)\gamma^\nu iS_F(y-x, m) \},
 \end{aligned}
 \tag{11.74}$$

Das Feld  $\psi(x)$  vernichtet ein  $e^-$  bei  $x$  und  $\bar{\psi}(x)$  erzeugt ein  $e^-$  am selben Ort.

Weder der Anfangs- noch der Endzustand enthält ein Photon und der erste Term auf der rechten Seite in (11.72) trägt nicht bei. Entsprechend lautet das Normalprodukt in zweiter Ordnung

$$N_G(x, y) = -ie^2 \Delta_F(x-y) :\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\bar{\psi}(y)\gamma_\mu\psi(y): .
 \tag{11.75}$$

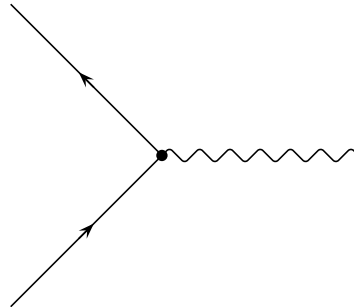
Der Graph enthält eine innere Photonlinie und nur äußere Elektronlinien.

Allgemeiner benutzt man bei der graphischen Beschreibung die folgenden Regeln für die Übersetzung in konkrete mathematische Ausdrücke:

innere Fermionlinie:	$iS_F(y-x)$	$x \bullet \longrightarrow \bullet y$
innere Photonlinie:	$-i\eta_{\mu\nu}\Delta_F(y-x)$	$x \bullet \text{~~~~~} \bullet y$
äußere Fermionlinie:	$\psi(y)$	$\longrightarrow \bullet y$
äußere Fermionlinie:	$\bar{\psi}(x)$	$x \bullet \longrightarrow$
äußere Photonlinie:	$A_\mu(x)$	$x \bullet \text{~~~~~}$

Fermionlinien sind gerichtet und der Pfeil gibt den Fluss der elektrischen Ladung durch das Diagramm an. Photonen sind ihre eigenen Antiteilchen und besitzen keine Ladung. Deshalb sind Photonlinien ungerichtet. Am jedem *Vertex* ist zusätzlich ein Faktor  $-e\gamma^\mu$  und für jede geschlossene Fermionschleife ein weiterer Faktor  $-1$  anzubringen. Ein Graph heißt erlaubt, wenn er nach den Regeln, die für eine Theorie spezifisch sind, konstruiert wurde. In der QED gibt es nur einen Vertex an dem drei Linien angreifen, eine Photonlinie

und zwei Fermionlinien, wobei die Richtung der Fermionlinien für die Ladungserhaltung am Vertex sorgt.



### 11.4.1 Feynmangraphen im Impulsraum

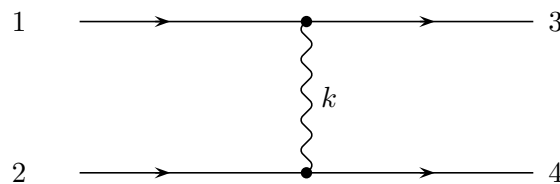
Der Feynmangraph zweiter Ordnung, den wir oben diskutiert haben, beschreibt drei physikalisch verschiedene Prozesse:

$$\begin{aligned} e^- + e^- &\longrightarrow e^- + e^- && \text{Møllerstreuung} \\ e^- + e^+ &\longrightarrow e^- + e^+ && \text{Bhabhastreuung} \\ e^+ + e^+ &\longrightarrow e^+ + e^+ && \text{Positron-Positron-Streuung} \end{aligned}$$

Die beteiligten Teilchen haben Impulse  $p_1$  bis  $p_4$  und zweiwertige Spinquantenzahlen  $\sigma_1$  bis  $\sigma_4$ . Für den Anfangszustand schreiben wir kurz  $|12\rangle$  und für den Endzustand  $S|12\rangle$ . Die Auswertung des Endzustandes nach Zuständen  $|34\rangle$  führt auf die früher eingeführte Übergangsamplitude  $\langle 34|S|12\rangle$ , die eine Entwicklung in Graphen gestattet,

$$\langle 34|S|12\rangle = \sum_G S_G(12, 34). \quad (11.76)$$

**Møllerstreuung:** Wir betrachten die Møllerstreuung mit zugehörigen Feynmangraphen



und bestimmen die Wahrscheinlichkeitsamplitude für den Übergang vom Anfangszustand

$$|12\rangle = a_{\sigma_1}^\dagger(p_1)a_{\sigma_2}^\dagger(p_2)|0\rangle \quad (11.77)$$

in den Endzustand

$$|34\rangle = a_{\sigma_3}^\dagger(p_3)a_{\sigma_4}^\dagger(p_4)|0\rangle. \quad (11.78)$$

Wir lesen den Graphen von links nach rechts, wobei *rechtsgerichtete* Fermionlinien Elektronen und *linksgerichtete* Linien Positronen beschreiben. Dem Graph entspricht der Beitrag

$$S_G(12, 34) = \frac{e^2}{8i\pi^2} \frac{R}{k^2} \delta^{(4)}(P_f - P_i). \quad (11.79)$$

mit Amplitude

$$\begin{aligned} R &= \bar{u}(3)\gamma^\mu u(2) \bar{u}(4)\gamma_\mu u(1) - \bar{u}(3)\gamma^\mu u(1) \bar{u}(4)\gamma_\mu u(2) \\ &+ \bar{u}(4)\gamma^\mu u(1) \bar{u}(3)\gamma_\mu u(2) - \bar{u}(4)\gamma^\mu u(2) \bar{u}(3)\gamma_\mu u(1) \end{aligned} \quad (11.80)$$

und den Bezeichnungen

$$k = p_1 - p_4 = p_3 - p_2 \quad \text{und} \quad u(r) = u(p_r, \sigma_r). \quad (11.81)$$

Wir leiten nun dieses Resultat ab. Zuerst erhält man

$$\begin{aligned} &\langle 34 | : \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \bar{\psi}(y)\gamma_\mu\psi(y) : | 12 \rangle \\ &= \langle 3 | \bar{\psi}(x) | 0 \rangle \gamma^\mu \langle 0 | \psi(x) | 2 \rangle \langle 4 | \bar{\psi}(y) | 0 \rangle \gamma_\mu \langle 0 | \psi(y) | 1 \rangle \\ &- \langle 3 | \bar{\psi}(x) | 0 \rangle \gamma^\mu \langle 0 | \psi(x) | 1 \rangle \langle 4 | \bar{\psi}(y) | 0 \rangle \gamma_\mu \langle 0 | \psi(y) | 2 \rangle \\ &+ \langle 4 | \bar{\psi}(x) | 0 \rangle \gamma^\mu \langle 0 | \psi(x) | 2 \rangle \langle 3 | \bar{\psi}(y) | 0 \rangle \gamma_\mu \langle 0 | \psi(y) | 1 \rangle \\ &- \langle 4 | \bar{\psi}(x) | 0 \rangle \gamma^\mu \langle 0 | \psi(x) | 1 \rangle \langle 3 | \bar{\psi}(y) | 0 \rangle \gamma_\mu \langle 0 | \psi(y) | 2 \rangle. \end{aligned} \quad (11.82)$$

Offensichtlich ist

$$\langle 0 | \psi(x) | r \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mu(\mathbf{p}) \sum_\sigma u(\sigma, p) \langle 0 | a_\sigma(p) a_{\sigma_r}^\dagger(p_r) | 0 \rangle e^{-ipx}$$

und im letzten Erwartungswerte dürfen wir das Produkt von Vernichtungs- und Erzeugungsoperator durch ihren Antikommutator ersetzen. Man erhält

$$\langle 0 | \psi(x) | r \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-ip_r x} u(r), \quad \langle r | \bar{\psi}(x) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{ip_r x} \bar{u}(r) \quad (11.83)$$

Wir setzen gemäß (11.75) die *Fourier-Darstellung* des Propagators,

$$\Delta_F(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 + i0} \quad (11.84)$$

in den zu berechnenden Ausdruck ein,

$$-\frac{ie^2}{2} \int d^4 x d^4 y \Delta_F(x - y) \langle 34 | : \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \bar{\psi}(y)\gamma_\mu\psi(y) : | 12 \rangle \quad (11.85)$$

und integrieren über  $x$  und  $y$ , wobei wir diese Integrationen mit der  $k$ -Integration vertauschen. Wir betrachten den Beitrag des ersten Terms in (11.82),

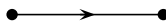







$$-\frac{ie^2}{2(2\pi)^{10}} \int d^4 x d^4 y d^4 k \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 + i0} e^{i(p_3-p_2)x+i(p_4-p_1)y} \bar{u}(3)\gamma^\mu u(2) \bar{u}(4)\gamma_\mu u(1). \quad (11.86)$$

Die Integration über  $x$  und  $y$  liefert einen Faktor

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k - p_3 + p_2) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k + p_4 - p_1),$$

was die Impulserhaltung an den Vertices ausdrückt und den Wert von  $k$  festlegt. Die Integration über  $k$  kann damit ausgeführt werden und führt auf den Faktor  $\delta^{(4)}(P_f - P_i)$ , der die Energie-Impuls-Erhaltung im elastischen Streuprozess ausdrückt. Dies führt dann auf den ersten Term in der Amplitude  $R$  in (11.80). Analog behandelt man die anderen drei Termen und findet das Resultat (11.79).

Die allgemeinen Regeln für die Graphen in der Impulsdarstellung lauten:

innere Fermionlinie:	$i(\not{p} + m)(p^2 - m^2 + i0)^{-1}$	
innere Photonlinie:	$-i\eta_{\mu\nu}(k^2 + i0)^{-1}$	
äußere Elektronlinie (einlaufend):	$u(\sigma, p)$	
äußere Elektronlinie (auslaufend):	$\bar{u}(p, \sigma)$	
äußere Positronlinie (einlaufend):	$\bar{v}(\sigma, p)$	
äußere Positronlinie (auslaufend):	$v(p, \sigma)$	
äußere Photonlinie (einlaufend):	$e^\mu(k, \lambda)$	
äußere Photonlinie (auslaufend):	$\bar{e}^\mu(k, \lambda)$	

Die Helizität oder Polarisation des Photons kann zwei Werte annehmen, genauso wie die Polarisation  $\sigma$  des Fermions.

Für jeden Vertex des Graphen erhält man

$$-e\gamma^\mu \delta^{(4)}\delta(p_1 \pm p_2 \pm k), \quad (11.87)$$

mit Impulsen  $p_1, p_2$  und  $k$  der angreifenden Linien. An jedem Vertex sind 4-er Impuls und Ladung erhalten. Über den Impulse  $q$  jeder inneren Linien ist zu integrieren, und zwar mit dem Maß  $d^4q$ . Für jede geschlossene Fermionschleife des Graphen bekommt die Amplitude einen Faktor  $-1$ . Bei Mehrphotonenzuständen im Ein- oder Ausgangskanal muss durch Symmetrisierung dafür gesorgt werden, dass die *Bose-Statistik* erfüllt ist. Entsprechend müssen Mehrfermionenzustände der *Fermi-Statistik* genügen.

Schließlich ist die Amplitude mit dem Faktor

$$\frac{i^n}{n!(2\pi)^s}, \quad s = \frac{3a}{2} + 4b - 4n$$

zu multiplizieren, wobei

- a = Zahl der äußeren Linien
- b = Zahl der inneren Linien
- b = Zahl der Vertices (Ordnung des Graphen).

In der QED ist  $3n = a + 2b$  und entsprechend vereinfacht sich der Faktor zu

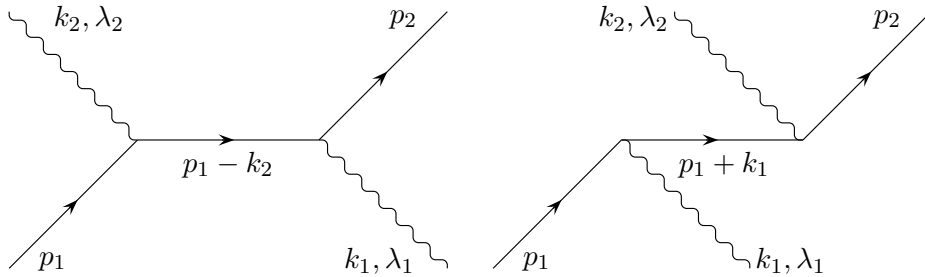
$$\frac{i^n}{n!(2\pi)^{2n-a/2}}. \quad (11.88)$$

## 11.5 Compton-Streuung und Eichinvarianz

Die Compton-Streuung ist die elastische Streuung eines Elektrons mit einem Photon,

$$\gamma + e^- \longrightarrow \gamma + e^-. \quad (11.89)$$

Sie ist eng mit der Paarvernichtung: eine äußere Photonlinie und ein äußeres Elektron vertauschen ihre Rollen. Damit haben die beiden auftretenden Feynman-Diagramme folgende Gestalt:



Das rechte Diagramm unterscheidet sich dabei vom linken lediglich durch die Vertauschung der äußeren Photonlinien. Die Feynman-Regeln führen für diesen Prozess auf das folgende  $T$ -Matrixelement in tiefster nichtverschwindender Ordnung der Störungstheorie

$$T_{fi} = \frac{e^2}{(2\pi)^3} \bar{u}(\sigma_2, p_2) \not{\epsilon}(k_1, \lambda_1) \frac{\not{p}_1 - \not{k}_2 + m}{(p_1 - k_2)^2 - m^2 + i\epsilon} \not{\epsilon}(k_2, \lambda_2) u(\sigma_1, p_1) \\ + \frac{e^2}{(2\pi)^3} \bar{u}(\sigma_2, p_2) \not{\epsilon}(k_2, \lambda_2) \frac{\not{p}_1 + \not{k}_1 + m}{(p_1 + k_1)^2 - m^2 + i\epsilon} \not{\epsilon}(k_1, \lambda_1) u(\sigma_1, p_1) \quad (11.90)$$

Die Herleitung dieser Amplitude ist eine lehrreiche Übungsaufgabe. Wir wollen stattdessen die Eichinvarianz der Compton-Streuamplitude beweisen. Bei einer Umeichung  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda$  des Photonfeldes ändert der Polarisationsvektor  $\varepsilon_\mu(k)$  einer ebenen Welle  $\varepsilon_\mu e^{-ikx}$  gemäß

$$\varepsilon_\mu(k) \rightarrow \varepsilon_\mu(k) + ak_\mu. \quad (11.91)$$

In der Coulomb-Eichung ist  $k^\mu \varepsilon_\mu = -\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = 0$  und diese Eigenschaft bleibt wegen  $k^2 = 0$  bei einer Umeichung erhalten.

Wir werden nun beweisen, dass das  $T$ -Matrixelement (11.90) eichinvariant ist. Wir benutzen in

$$T_{fi} = \frac{e^2}{2(2\pi)^3} \bar{u}(\sigma_2, p_2) \left\{ \not{\epsilon}_2 \frac{\not{p}_1 + \not{k}_1 + m}{p_1 k_1} \not{\epsilon}_1 - \not{\epsilon}_1 \frac{\not{p}_1 - \not{k}_2 + m}{p_1 k_2} \not{\epsilon}_2 \right\} u(\sigma_1, p_1)$$

die Identität  $\not{p}\not{\epsilon} = -\not{\epsilon}\not{p} + 2(p, \epsilon)$  und die Diracgleichung  $\not{p}u = mu$ , um die Zähler umzuformen,

$$T_{fi} = \frac{e^2}{(2\pi)^3} \bar{u}(\sigma_2, p_2) \left\{ \not{\epsilon}_2 \frac{2(p_1, \epsilon_1) + \not{k}_1 \not{\epsilon}_1}{p_1 k_1} - \not{\epsilon}_1 \frac{2(p_1, \epsilon_2) - \not{k}_2 \not{\epsilon}_2}{p_1 k_2} \right\} u(\sigma_1, p_1). \quad (11.92)$$

Bei einer Eichtransformation (11.91) treten folgende Zusatzterme zwischen den geschweiften Klammern auf,

$$a \not{k}_2 \left( \frac{2p_1 \cdot \epsilon_1}{p_1 \cdot k_1} + \frac{\not{k}_1 \not{\epsilon}_1}{p_1 \cdot k_1} \right) + 2a \not{\epsilon}_2 - a \not{k}_1 \left( \frac{2p_1 \cdot \epsilon_2}{p_1 \cdot k_2} - \frac{\not{k}_2 \not{\epsilon}_2}{p_1 \cdot k_2} \right) - 2a \not{\epsilon}_1 + 2a^2 (k_2 - k_1). \quad (11.93)$$

Mit der Energie-Impulserhaltung  $k_2 - k_1 = p_1 - p_2$  ist der letzte Term gleich  $2a^2(\not{p}_1 - \not{p}_2)$ . Zwischen  $\bar{u}(p_2)$  und  $u(p_1)$  gibt er aufgrund der Diracgleichung  $\not{p}u(p) = mu(p)$  und der adjungierten Diracgleichung  $\bar{u}(p)\not{p} = \bar{u}(p)m$  keinen Beitrag. Die Terme kubisch in den  $\gamma$ -Matrizen können mit Energie-Impulserhaltung und Diracgleichung weiter vereinfacht werden,

$$\begin{aligned} \bar{u}(p_2) \not{k}_2 \not{k}_1 \not{\epsilon}_1 u(p_1) &= \bar{u}(p_2) (\not{p}_1 - \not{p}_2 + \not{k}_1) \not{k}_1 \not{\epsilon}_1 u(p_1) = \bar{u}(p_2) (\not{p}_1 - m) \not{k}_1 \not{\epsilon}_1 u(p_1) \\ &= 2\bar{u}(p_2) (p_1 \cdot k_1 \not{\epsilon}_1 - \epsilon_1 \cdot p_1 \not{k}_1) u(p_1). \end{aligned}$$

Analog finden wir

$$\begin{aligned} \bar{u}(p_2) \not{k}_1 \not{k}_2 \not{\epsilon}_2 u(p_1) &= \bar{u}(p_2) (\not{p}_2 - \not{p}_1 + \not{k}_2) \not{k}_2 \not{\epsilon}_2 u(p_1) = \bar{u}(p_2) (\not{p}_1 - m) \not{k}_1 \not{\epsilon}_2 u(p_1) \\ &= 2\bar{u}(p_2) (p_1 \cdot \epsilon_2 \not{k}_2 - p_1 \cdot k_2 \not{\epsilon}_2) u(p_1). \end{aligned}$$

Nun setzen wir die beiden letzten Resultate in den in  $a$  linearen Term in (11.93) ein,

$$2 \left( \frac{p_1 \cdot \epsilon_1}{p_1 \cdot k_1} + \frac{p_1 \cdot \epsilon_2}{p_1 \cdot k_2} \right) (k_2 - k_1).$$

Dieser Ausdruck verschwindet zwischen den Diracspinoren  $\bar{u}(p_2)$  und  $u(p_1)$  und dies beweist die Eichinvarianz der Amplitude  $T_{fi}$ .

Berechnet man nun das  $S$ -Matrixelement für Comptonstreuung und daraus den Wirkungsquerschnitt, dann erhält man die Formel von Klein-Nishina für Compton-Streuung:

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega_{k'}} \right)_{\text{Lab.}} = \frac{\alpha^2}{4m^2} \left( \frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left( \frac{\omega'}{\omega} + \frac{\omega}{\omega'} + 4(\epsilon' \cdot \epsilon)^2 - 2 \right). \quad (11.94)$$

Darin ist  $\omega'$  über den Streuwinkel mit  $\omega$  verknüpft,

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + \frac{\omega}{m}(1 - \cos \vartheta)}. \quad (11.95)$$

Für  $\omega/m \ll 1$  reduziert sich dieser Wirkungsquerschnitt auf denjenigen für klassische Thomson-Streuung,

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega_{k'}} \right)_{\text{Thomson}} = \frac{\alpha^2}{m^2} (\epsilon' \cdot \epsilon)^2. \quad (11.96)$$

## 11.6 Møller-Streuung und Photonpropagator

Wir betrachten hier die elastische Streuung von zwei Elektronen und wir müssen uns nun etwas näher mit dem Photon-Propagator beschäftigen. Der einlaufende und auslaufende Zustand sind

$$\begin{aligned} |\text{ein}\rangle &= |p_1\sigma_1, p_2\sigma_2\rangle = a_{\sigma_1}^\dagger(p_1)a_{\sigma_2}^\dagger(p_2)|0\rangle \\ |\text{aus}\rangle &= |p'_1\sigma'_1, p'_2\sigma'_2\rangle = a_{\sigma'_1}^\dagger(p'_1)a_{\sigma'_2}^\dagger(p'_2)|0\rangle \end{aligned} \quad (11.97)$$

Wir schreiben im Folgenden die Spinquantenzahlen meistens nicht mehr. Zur Ordnung  $e^2$  trägt die Kopplung des Elektron-Positron-Feld an das transversale Photonfeld und die instantane Coulombwechselwirkung in (11.20) bei,

$$\begin{aligned} S_{fi} &= (-i)^2 e^2 \int_{x_1^0 > x_2^0} d^4x_1 d^4x_2 \langle p'_1 p'_2 | (\mathbf{j} \cdot \mathbf{A})(x_1) (\mathbf{j} \cdot \mathbf{A})(x_2) | p_1 p_2 \rangle \\ &\quad + (-i)^2 \frac{e^2}{8\pi} \int d^4x_1 d^4x_2 \delta(x_1^0 - x_2^0) \frac{1}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} \langle p'_1 p'_2 | \rho(x_1) \rho(x_2) | p_1 p_2 \rangle \\ &= S^{\text{trans}} + S^{\text{coul}} \end{aligned} \quad (11.98)$$

Wir betrachten die beiden Anteile nun getrennt.

**Transversaler Anteil:** Die Manipulationen sind ähnlich wie bei der Comptonstreuung, nur dass das Photon nun als innere Linie auftaucht,

$$\begin{aligned} S^{\text{trans}} &= (-i)^2 e^2 \int_{x_1^0 > x_2^0} d^4x_1 d^4x_2 \langle p'_1 p'_2 | : \bar{\psi}(x_1) \gamma^i \psi(x_1) : : \bar{\psi}(x_2) \gamma^j \psi(x_2) : | p_1 p_2 \rangle \\ &\quad \times \langle 0 | A^i(x_1) A^j(x_2) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Das fermionische Matrixelement ist

$$\begin{aligned} \langle p'_1 p'_2 | \dots | p_1 p_2 \rangle &= \gamma_{\alpha\beta}^i \gamma_{\gamma\delta}^j \langle p'_1 p'_2 | \bar{\psi}_\alpha^+(x_1) \psi_\beta^+(x_1) \bar{\psi}_\gamma^-(x_1) \psi_\delta^-(x_2) \\ &\quad + \bar{\psi}_\alpha^-(x_1) \psi_\delta^+(x_1) \bar{\psi}_\gamma^-(x_2) \psi_\delta^+(x_2) | p_1 p_2 \rangle. \end{aligned}$$

Die Rechnung ist ähnlich wie für die Paarvernichtung und führt auf

$$\begin{aligned} S^{\text{trans}} &= -(-i)^2 \frac{e^2}{(2\pi)^6} \int d^4x_1 d^4x_2 \left[ \bar{u}(p'_1) \gamma^i u(p_1) e^{ip'_1 x_1} e^{-ip_1 x_1} \right. \\ &\quad \left. \times \bar{u}(p'_2) \gamma^j u(p_2) e^{ip'_2 x_2} e^{-ip_2 x_2} - (1' \leftrightarrow 2') \right] \quad (11.99) \\ &\quad \times \left[ \langle 0 | A^i(x_1) A^j(x_2) | 0 \rangle \theta(x_1^0 - x_2^0) + \langle 0 | A^j(x_2) A^i(x_1) | 0 \rangle \theta(x_2^0 - x_1^0) \right] \end{aligned}$$



Der Ausdruck in der letzten eckigen Klammer ist gleich dem Feynman-Propagator für das transversale Photonfeld,

$$\begin{aligned} i \left( D_F^\perp(x-y) \right)_{ij} &= \langle 0 | T A_i(x) A_j(y) | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k e^{-ik(x-y)} \frac{\delta_{ij} - k_i k_j / |\mathbf{k}|^2}{k^2 + i\varepsilon}. \end{aligned} \quad (11.100)$$

Setzen wir die Fourierdarstellung von  $D_F^\perp$  in (11.99) ein und integrieren über  $x$ , dann finden wir das  $T$ -Matrixelement

$$T^{\text{trans}} = -\frac{e^2}{(2\pi)^6} \left( \bar{u}(p'_1) \gamma^i u(p_1) \frac{\delta_{ij} - \hat{q}_i \hat{q}_j}{q^2 + i\varepsilon} \bar{u}(p'_2) \gamma^j u(p_2) - (1' \leftrightarrow 2') \right). \quad (11.101)$$

Im diesen nicht kovarianten Resultat ist im ersten Term ist  $q = p_1 - p_2 = p_2 - p'_2$  und im zweiten  $q = p'_2 - p_1 = p_2 - p'_1$ .

**Coulombanteil:** Setzen wir  $\rho(x) = :\bar{\psi}(x) \gamma^0 \psi(x):$  in den Ausdruck für  $S^{\text{coul}}$  in (11.98) ein, dann findet man

$$\begin{aligned} S^{\text{coul}} &= \frac{ie^2}{(2\pi)^6} \int d^4 x_1 d^4 x_2 \frac{\delta(x_1^0 - x_2^0)}{4\pi |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} \left( \bar{u}(p'_1) \gamma^0 u(p_1) \bar{u}(p'_2) \gamma^0 u(p_2) e^{ix_1(p'_1 - p_1) + ix_2(p'_2 - p_2)} \right. \\ &\quad \left. - (1' \leftrightarrow 2') \right) \end{aligned}$$

Die Integration über  $x_1$  und  $x_3 := x_2 - x_1$  von

$$e^{i(p'_1 x_1 - p_1 x_1 + p'_2 x_2 - p_2 x_2)} = e^{i(p'_2 - p_2) x_3} e^{-i(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) x_1}$$

führt einerseits auf die Energie-Impulserhaltung und mit Hilfe von

$$\int d\mathbf{x}_3 e^{-i(\mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_2) \cdot \mathbf{x}_3} \frac{1}{4\pi |\mathbf{x}_3|} = \frac{1}{|\mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_2|} \quad (11.102)$$

auf das folgende  $T$ -Matrixelement

$$T^{\text{coul}} = -\frac{e^2}{(2\pi)^6} \left[ \bar{u}(p'_1) \gamma^0 u(p_1) \frac{1}{|\mathbf{q}|^2} \bar{u}(p'_2) \gamma^0 u(p_2) - \frac{(1' \leftrightarrow 2')}{|\mathbf{q}'|^2} \right]. \quad (11.103)$$

wobei  $\mathbf{q} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_2$  und  $\mathbf{q}' = \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1$  ist. Dieser Coulombterm ist ebenfalls nicht kovariant, die Summe  $T^{\text{trans}} + T^{\text{coul}}$  wird aber explizit kovariant sein.

**Kovarianter Photonpropagator** Hier werden wir zeigen, das die Beträge der transversalen Photonen und des instantanen Coulombterms zu einem lorentzkovarianten Ausdruck

addieren. Dazu formen wir den Coulomb-Term um, so dass der gleiche Nenner auftritt wie in  $T^{\text{trans}}$ . Wir führen dies für den ersten Term in (11.103) explizit durch:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{u}(p'_1)\gamma^0 u(p_1)\bar{u}(p'_2)\gamma^0 u(p_2)}{q^2} &= \frac{\bar{u}(p'_1)\gamma^0 u(p_1)\bar{u}(p'_2)\gamma^0 u(p_2)}{q^2 + i\varepsilon} \frac{q_0^2 - q^2}{q^2} \\ &= -\frac{\bar{u}(p'_1)\gamma^0 u(p_1)\bar{u}(p'_2)\gamma^0 u(p_2)}{q^2 + i\varepsilon} + \frac{q_0^2}{q^2} \frac{\bar{u}(p'_1)\gamma^0 u(p_1)\bar{u}(p'_2)\gamma^0 u(p_2)}{q^2 + i\varepsilon} \end{aligned} \quad (11.104)$$

Wegen  $q = p_2 - p'_2 = p'_1 - p_1$  führt die Diracgleichung auf

$$\bar{u}(p'_1)\not{q}u(p_1) = 0 = \bar{u}(p'_2)\not{q}u(p_2).$$

Die führt auf

$$\begin{aligned} q^0 \bar{u}(p'_1)\gamma^0 u(p_1) &= \bar{u}(p'_1)\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{q} u(p_1) \\ q^0 \bar{u}(p'_2)\gamma^0 u(p_2) &= \bar{u}(p'_2)\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{q} u(p_2) \end{aligned}$$

Damit lautet der letzte Term in (11.104)

$$\frac{q_0^2}{q^2} \frac{\bar{u}(p'_1)\gamma^0 u(p_1)\bar{u}(p'_2)\gamma^0 u(p_2)}{q^2 + i\varepsilon} = \frac{\bar{u}(p'_1)\boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{q}} u(p_1)\bar{u}(p'_2)\boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{q}} u(p_2)}{q^2 + i\varepsilon}$$

und entsprechend schreibt sich der Coulomb-Anteil gemäß

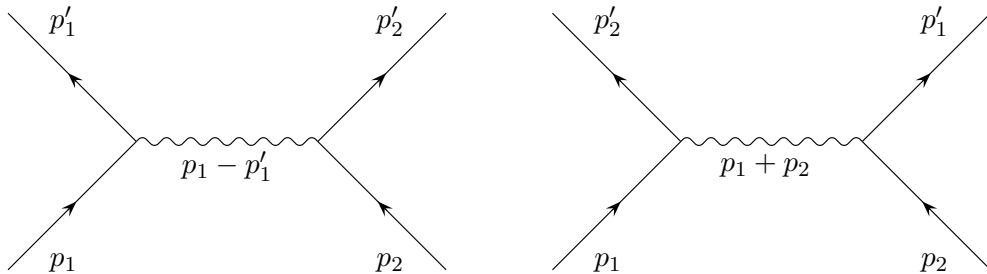
$$\begin{aligned} T^{\text{coul}} &= -\frac{e^2}{(2\pi)^6} \left[ -\frac{\bar{u}(p'_1)\gamma^0 u(p_1)\bar{u}(p'_2)\gamma^0 u(p_2)}{q^2 + i\varepsilon} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\bar{u}(p'_1)\boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{q}} u(p_1)\bar{u}(p'_2)\boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{q}} u(p_2)}{q^2 + i\varepsilon} - (1' \leftrightarrow 2') \right]. \end{aligned} \quad (11.105)$$

Addiert man nun  $T^{\text{coul}}$  zu  $T^{\text{trans}}$ , dann heben sich die Terme mit  $\boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{q}}$  in (11.105) gegen die Terme mit  $\hat{q}_i \hat{q}_j$  in (11.101) weg und wir erhalten

$$\begin{aligned} T &= T^{\text{coul}} + T^{\text{trans}} = \frac{e^2}{(2\pi)^6} \left[ \frac{\bar{u}(p'_1)\gamma^\mu u(p_1)\bar{u}(p'_2)\gamma_\mu u(p_2)}{(p'_1 - p_1)^2 + i\varepsilon} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\bar{u}(p'_2)\gamma^\mu u(p_1)\bar{u}(p'_1)\gamma_\mu u(p_2)}{(p'_2 - p_1)^2 + i\varepsilon} \right]. \end{aligned} \quad (11.106)$$

Dies ist ein manifest kovarianter Ausdruck. Weder der transversale noch der Coulombanteil ins kovariant, nur ihre Summe ist es. Dies ist ein allgemeines Resultat, das nicht nur für die Møllerstreuung gilt.

Das Resultat (11.106) stellen wir durch die folgenden beiden Diagramme dar:



Die Wellenlinie in den Diagrammen bedeutet dabei den sogenannten kovarianten Photonpropagator, der im Impulsraum wie folgt aussieht:

$$\text{~~~~~} \quad \text{Photonpropagator} \quad = -\frac{g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$$

## 11.7 Wirkungsquerschnitte

Leider reicht die Zeit nicht mehr für Details, deshalb werde ich hier nur kurz die Resultate für Comptonstreuung und Paarvernichtung mit Ihnen diskutieren. Der Wirkungsquerschnitt für Comptonstreuung wurde erstmalig von KLEIN und NISHINA abgeleitet. Für Photonenergien klein mit der Ruhenergie des Elektrons geht die Formel von Klein-Nishina in den klassischen Wirkungsquerschnitt für Thomsonstreuung über.

Für mehr Details verweise ich auf die Literatur, zum Beispiel das schöne Buch „Relativistische Quantentheorie“ von Norbert Straumann mit vielen expliziten Rechnungen in der Coulomb-Eichung [14]. In vielen anderen Darstellungen werden kovariante Eichungen gewählt.

## 11.8 Aufgaben

### Aufgabe 1: Skalare Elektrodynamik

Betrachten Sie die folgende Lagrangedichte mit einem komplexen Skalarfeld  $\phi$  und dem Photonfeld  $A_\mu$ :

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi(\partial^\mu - ieA^\mu)\phi^\dagger - m^2\phi^\dagger\phi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},$$

wobei der Feldstärketensor definiert ist als  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ .

1. Überlegen Sie sich, welche Vertizes sich aus diesem Lagrangian ableiten lassen. Welchen Faktoren entspricht jeweils ein interner Vertex im Diagramm?
2. Gibt es in der klassischen Theorie (also ohne Schleifendiagramme) in dieser Theorie Photon-Photon-Streuung? Wie ändert sich das in der Quantentheorie (also mit Einbezug der Schleifendiagramme)?



# 12 Abkürzungen

## 12.1 Spezielle Funktionen und Distributionen

Name	Definition	Seite
normierte ebene Welle	$u_p(\mathbf{x})$	33
freie Wightman-Funktion	$\mathcal{W}(x, y) = W(x - y) = \langle 0   \phi(x) \phi(y)   0 \rangle$	46,59
frei Pauli-Jordan Funktion	$i\Delta_m(x - y) = \langle 0   [\phi(x), \phi(y)]   0 \rangle$	35,36,48
freier Feynman-Propagator	$i\Delta_F(x - y, m^2) = \langle 0   T \phi(x) \phi(y)   0 \rangle$	51
voller Feynman-Propagator	$i\Delta_F(x - y) = \langle \Omega   T \phi(x) \phi(y)   \Omega \rangle$	94

## 12.2 Entwicklung von Feldoperatoren

Name	Symbol	Seite
Erzeugungs/Vernichtungsoperator Photon, endliches $V$	$a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}), a_\lambda(\mathbf{k})$	71
Erzeugungs/Vernichtungsoperator Photon	$a_\lambda^\dagger(k), a_\lambda(k)$	156
Polarizationsvektor	$\varepsilon_\mu(\lambda, k)$	155
Erzeugungs/Vernichtungsoperator Skalarteilchen	$a_p^\dagger, a_p$	40
normierte Lösung der KK-Gleichung	$u_p(x)$	45
Erzeugungs/Vernichtungsoperator Elektron	$a_\sigma^\dagger(p), a_\sigma(p)$	146
konstante Spinoren für Elektron	$u(\sigma, p), \bar{u}(\sigma, p)$	144
Erzeugungs/Vernichtungsoperator Positron	$b_\sigma^\dagger(p), b_\sigma(p)$	146
konstante Spinoren für Positron	$v(\sigma, p), \bar{v}(\sigma, p)$	144



# Literaturverzeichnis

## [•] Lehrbücher

- [1] M. Böhm, A. Denner und H. Joos, *Gauge Theory of the Strong and Electroweak Interaction*, Teubner Stuttgart, 2001.
- [2] L. Brown, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, 1992.
- [3] A. Das, *Lectures on Quantum Field Theory*, World Scientific, (2008)
- [4] J. Glimm und A. Jaffe, *Quantum Physics - A Functional Integral Point of View*, Springer Verlag, New York, 1981.
- [5] R. Haag, *Local Quantum Physics: Fields, Particles and Algebras*, Springer, 1996.
- [6] L.D. Landau und E.M. Lifschitz, *Quantenelektrodynamik*, Verlag Harri Deutsch, 7. Auflage, 1991.
- [7] G. Källen, *Quantenelektrodynamik*, Handbuch der Physik, Band V, Teil 1, herausgegeben von S. Flügge, Springer-Verlag 1958.
- [8] C. Itzykson und J.B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, New York, 1980.
- [9] M. Maggiore, *A Modern Introduction to Quantum Field Theory*, Oxford university press, Oxford, 2005.
- [10] I. Montvay und G. Münster, *Quantum Fields on a Lattice*, Cambridge university press, Cambridge, 1994.
- [11] M.E. Peskin und D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley Publishing Company, 1995
- [12] F. Scheck, *Theoretische Physik 4, Quantisierte Felder*, Springer 2001.
- [13] P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer*, Benjamin-Cummings, Reading, 1982
- [14] N. Straumann, *Relativistische Quantentheorie*, Springer, 2005
- [15] L.H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Second Ed., Cambridge University Press, 1996
- [16] S. Weinberg, *The Quantum Field Theory*, Vols. I, II, Cambridge University Press,

1996.

[•] **Klassiker der QFT**

- [17] M. Born und P. Jordan, *Zur Quantenmechanik*, Z. Phys. **34** (1925) 858.
- [18] M. Born, W. Heisenberg und P. Jordan, *Zur Quantenmechanik II*, Z. Phys. **35** 557.
- [19] P.A.M. Dirac, *The quantum theory of emission and absorption of radiation*, Roc. Roy. Soc. London **A 114** (1927) 243.
- [20] P. Jordan und W. Pauli, *Zur Quantenelektrodynamik*, Z. Phys. **47** (1928) 151; W. Heisenberg und W. Pauli, *Zur Quantendynamik der Wellenfelder I*, Z. Phys. **56** (1929) 1; *Zur Quantendynamik der Wellenfelder II*, Z. Phys. **59** (1930) 168.
- [21] W. Pauli und V. Weisskopf, *Zur Quantisierung der skalaren relativistischen Wellengleichung*, *Helv. Phys. Acta* **7** (1934) 709.
- [22] S.L. Glashow, Nucl. Phys. **22** (1961) 579; S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19** (1964) 1264; A. Salam, in *Elementary Particle Theory*, ed. N. Svarthholm, Almquist and Wiksell, Stockholm, 1968.
- [23] R. Feynman, *Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics*, Rev. Mod. Phys. **20** (1948) 267; R. Feynman und A. Hibbs, *Quantum mechanics and path integrals*, McGraw-Hill, New York, 1965.
- [24] F.J. Dyson, *The S-Matrix in quantum electrodynamics*, Phys. Rev. **75** (1949) 1736; G.C. Wick, *Properties of the Bethe-Salpeter wave function*, Phys. Rev. **96** (1954) 1124; J. Schwinger, *On the Euclidean structure of relativistic field theory*, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **44** (1958) 956; K. Symanzik, *Euclidean quantum field theory, I. Equations for a scalar model*, J. Math. Phys. **7** (1966) 510.
- [25] F.J. Wegner, *Duality in generalized Ising models and phase transitions without local order parameters*, J. Math. Phys. **10** (1971) 2259.
- [26] K.G. Wilson, *Confinement of quarks*, Phys. Rev. **D10** (1974) 2445.
- [27] M. Creutz, L. Jacobs und C. Rebbi, *Experiments with gauge-invariant Ising system*, Phys. Rev. Lett. **42** (1979) 1390; M. Creutz, *Confinement and the critical dimensionality of space-time*, Phys. Rev. Lett. **43** (1979) 553.
- [28] M. Creutz, L. Jacobs und C. Rebbi, *Monte Carlo Simulations in Lattice Gauge Theories*, Phys. Rep. **95** (1983) 201.
- [29] M.J. Sparnaay, Physica **24** (1958) 751; *The Historical Background of the Casimir Effect*, from 'Physics in the Making', ed. A. Sarlemijn und M. Sparnaay, Elsevier Science Publishers, 1989.



- [30] E.M. Lifschitz, *The Theory of Molecular Attractive Forces between Solids*, **2** (1956) 73
- [31] S.K. Lamoreaux, *Demonstration of the Casimir Force in the 0.6 to 6  $\mu\text{m}$  Range*, Phys. Rev. Lett. **78** (1997) 5.
- [32] U. Mohideen and A. Roy, *A Precision Measurement of the Casimir Force from 0.1 to 0.9  $\mu\text{m}$* , Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 4549; A. Roy, C.Y. Lin and U Mohideen, *Improved Precision Measurements of the Casimir Force*, Phys. Rev. **D 60** (1999) 111101(R)
- [33] P. Plunien, B. Muller und W. Greiner, *The Casimir Effect*, Phys. Rep. **34** (1986) 87; M. Bordag, U. Mohideen und V.M. Mostepanenko, *New Developments in the Casimir Effekt*, Phys. Rep. **353** (2001) 1.
- [34] N. Bohr und L. Rosenfeld, *Field and Charge Measurements in Quantum Electrodynamics*, Phys. Rev. **78** (1950) 794.
- [35] R.F. Streater and A.S. Wightman, *PCT, Spin and Statistics*, Benjamin (1964); R. Jost, *The general Theory of Quantized Fields*, AMS Publ. (1965); N.N. Bogolubov, A.A. Logunov and I.T. Todorov, *Axiomatic Quantum Field Theory*, Benjamin (1975).
- [36] M. Levy and P. Mitter (editors), *New Developments in Quantum Field Theory and Statistical Mechanics*, Plenum Press (1977); L. Streit (editor), *Quantum Dynamics: Models and Mathematics*, Springer, Wien-New York (1976); K. Osterwalder and R. Schrader, *Axioms for Euclidean Green's functions* Commun. Math. Phys. **31** (1973) 83 and *Axioms for Euclidean Green's functions II*, Commun. Math. Phys. **42** (1975) 281.
- [37] K. Osterwalder, *Auf dem Weg zu einer Relativistischen Quantenfeldtheorie*, Springer Lecture Notes in Physics **100** (1979) 220.
- [38] C.D. Palmer und M.E. Carrington, *A General Expression for Symmetry Factors of Feynman Diagrams*, hep-th/0108088