

Kapitel 9

Wellen in Medien

In diesem Kapitel untersuchen wir die Fortpflanzung und Dämpfung von elektromagnetischen Wellen in Leitern und Isolatoren. Insbesondere interessiert uns die Frequenzabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante und der Leitfähigkeit. Als Anwendung wird die frequenzabhängige Eindringtiefe von Wellen in Metalle berechnet. Aus wenigen allgemeinen Prinzipien wie Lokalität und Linearität wird ein Zusammenhang zwischen dem absorptiven Imaginärteil von ε und dem dispersiven Realteil hergeleitet.

9.1 Wellen in homogenen Leitern

Ein elektromagnetisches Wechselfeld beschleunigt die freien Ladungsträger in einem Leiter und verliert dabei Feldenergie. Es wird gedämpft und seine Energie in *Joulesche Wärme* umgewandelt. Dies ist der Grund dafür dass Metalle undurchsichtig sind. Wir wollen annehmen, das Material habe lineare Verknüpfungsgleichungen und sei ein *homogener Ohmscher Leiter*,

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \text{und} \quad \mathbf{j}_f = \sigma \mathbf{E}, \quad (9.1)$$

mit räumlich konstanter Dielektrizitätskonstante ε , magnetischer Permeabilität μ und *elektrischer Leitfähigkeit* σ . Im SI-System hat σ die Dimension A/Vm. Die frequenzabhängigen Materialgrößen ε , μ und σ seien als gegeben vorausgesetzt.

9.1.1 Transversal-Schwingungen und Skin-Effekt

Die einfachen Verknüpfungsgleichungen (9.1) gelten nur für feste Frequenzen. Deshalb betrachten wir zeitperiodische Felder mit Kreisfrequenz ω , zum Beispiel $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(\omega, \mathbf{r})e^{i\omega t}$, und entsprechend auch für die Dichten ρ_f und \mathbf{j}_f . Nach Elimination von \mathbf{D} , \mathbf{H} und \mathbf{j}_f vereinfachen sich für feste

Frequenzen die Maxwell-Gleichungen zu

$$\varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E}_0 = \rho_{f,0} \quad , \quad \nabla \times \mathbf{B}_0 - i\varepsilon\mu\omega \mathbf{E}_0 = \mu\sigma \mathbf{E}_0 \quad (9.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_0 = 0 \quad , \quad \nabla \times \mathbf{E}_0 + i\omega \mathbf{B}_0 = 0. \quad (9.3)$$

Aus der Kontinuitätsgleichung $\dot{\rho}_f + \nabla \cdot \mathbf{j}_f = 0$ folgt

$$i\omega\rho_{f,0} + \nabla \cdot \mathbf{j}_{f,0} = 0, \quad (9.4)$$

und damit können wir die erste Gleichung in (9.2) wie folgt schreiben

$$0 = \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E}_0 - \rho_{f,0} = \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E}_0 - \frac{i}{\omega} \nabla \cdot \mathbf{j}_{f,0} = \left(\varepsilon + \frac{\sigma}{i\omega} \right) \nabla \cdot \mathbf{E}_0, \quad (9.5)$$

wobei die räumliche Konstanz der Materialkonstanten ε und σ vorausgesetzt wurde.

Im Gegensatz zu den Verhältnissen im Vakuum gibt es jetzt *zwei Lösungstypen*, entsprechend den Lösungen

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_0 = 0 \quad \text{oder} \quad \varepsilon\omega = i\sigma. \quad (9.6)$$

Lösungen mit $\nabla \cdot \mathbf{E}_0 = 0$: Bei diesem Lösungstyp ist neben dem magnetischen auch das elektrische Feld quellenfrei. Nehmen wir die Rotation der Gleichungen mit einer Rotation in (9.2,9.3), wobei wir die Quellenfreiheit der Felder benutzen, dann ergeben sich die *Helmholtz-Gleichungen* für das elektromagnetische Feld

$$\Delta \mathbf{E}_0 + k^2 \mathbf{E}_0 = 0 \quad , \quad \Delta \mathbf{B}_0 + k^2 \mathbf{B}_0 = 0 \quad \text{mit} \quad k^2 = \varepsilon\mu\omega^2 \left(1 + \frac{\sigma}{i\varepsilon\omega} \right). \quad (9.7)$$

Für *Isolatoren* mit verschwindender Leitfähigkeit ist $k = \sqrt{\varepsilon\mu}\omega$ reell¹, und die transversale Welle propagiert mit der Phasengeschwindigkeit

$$\frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}, \quad \text{wobei} \quad n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$$

der Brechungsindex ist, durch den Isolator. Dies sind die früher diskutierten monochromatischen transversalen Wellen in Isolatoren. Wir werden später sehen, dass außerhalb von Resonanzstellen $dn/d\omega$ positiv ist und *normale Dispersion* vorliegt.

Für *Metalle* ist $\sigma > 0$ und der Ausbreitungsvektor wird komplex. Es ist angebracht, mit einem komplexen Brechungsindex \tilde{n} zu rechnen, indem wir

$$\tilde{n} = \frac{c}{\omega} k = n - i\kappa = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r \left(1 + \frac{\sigma}{i\varepsilon\omega} \right)} = c \sqrt{\varepsilon\mu \left(1 + \frac{\sigma}{i\varepsilon\omega} \right)}. \quad (9.8)$$

einführen. Wir benutzen wieder den Zusammenhang zwischen dem Produkt $\varepsilon_0\mu_0$ und der Lichtgeschwindigkeit. κ heißt *Absorptionsindex*. Für eine in z -Richtung fortschreitende transversale

¹Wir sehen von Resonanzstellen, wo $\varepsilon(\omega) = 0$ ist, ab.

ebene Welle finden wir

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \Re \left(\mathbf{E}_0 e^{i\omega(t-nz/c)} \right) e^{-\omega\kappa z/c}, \quad \mathbf{E}_0 = \text{konstant}, \\ c\mathbf{B} &= \Re \left((n - i\kappa) \mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_0 e^{i\omega(t-nz/c)} \right) e^{-\omega\kappa z/c}. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Die Amplitude der exponentiell gedämpften Welle fällt auf der Strecke $d = c/\kappa\omega$ auf ein $1/e$ -tel ab. Wellen können nur bis zu dieser *Eindringtiefe* in den Leiter eindringen.

Für kleine Frequenzen $\varepsilon\omega \ll \sigma$ dürfen wir folgendermaßen nähern:

$$\tilde{n} \approx c \sqrt{\frac{\mu\sigma}{i\omega}} = (1 - i)c \sqrt{\frac{\mu\sigma}{2\omega}} \quad \text{d.h.} \quad \kappa \approx c \sqrt{\frac{\mu\sigma}{2\omega}}$$

Die entsprechende Eindringtiefe ist dann

$$d = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad (\sigma/\omega \gg \varepsilon). \quad (9.10)$$

Unsere Resultate gelten dann für gute Leiter im Gebiet der Wechselströme und technischen Hochfrequenzen. Für Kupfer ist

$$\mu \approx \mu_0 \quad \text{und} \quad \sigma \sim 58 \cdot 10^6 \frac{\text{A}}{\text{Vm}}$$

und eine Welle mit 50 Hertz hat die Eindringtiefe $d = 9 \text{ mm}$. Ist d viel kleiner als die repräsentativen Längen, dann findet die Stromleitung in einer Haut (skin) statt. Man spricht vom *Skin-Effekt*. Der Wechselstrom fällt im Leiter nach innen exponentiell ab, wobei der Abfall für höhere Frequenzen schneller ist. Man findet zum Beispiel die folgenden Eindringtiefen,

Material	50 Hz	1 MHz	3 GHz
Aluminium	$d = 1.1 \text{ cm}$	$d = 0.085 \text{ mm}$	$d = 1.6 \mu\text{m}$
Kupfer	$d = 0.9 \text{ cm}$	$d = 0.066 \text{ mm}$	$d = 1.2 \mu\text{m}$
Meereswasser	$d = 30 \text{ m}$	$d = 20 \text{ cm}$	schlechter Leiter

Diese d -Werte geben die zur Abschirmung der betreffenden Wellenlänge etwa erforderliche Blechstärke an.

Lösungen mit $\varepsilon\omega = i\sigma$: Für diesen Lösungstyp braucht das elektrische Feld nicht quellenfrei zu sein. Wegen der zweiten Gleichung in (9.2) ist die magnetische Induktion \mathbf{B} nicht nur quellen- sondern auch wirbelfrei und verschwindet damit. Wir haben es mit *rein elektrischen Schwingungen* zu tun. Wegen der letzten Gleichung in (9.3) sind die Schwingungen des elektrischen Feldes *longitudinal*, $\nabla \times \mathbf{E}_0 = 0$, und führen daher wegen $\mathbf{j}_{t,0} = \sigma \mathbf{E}_0$ und wegen der Kontinuitätsgleichung zu Schwingungen der Ladungsdichte. Die Frequenz der Schwingungen ist

durch $\varepsilon \cdot \omega = i\sigma$ gegeben. Später werden wir sehen, dass diese Wellen schwach gedämpft sind und mit der Plasmafrequenz schwingen.

9.1.2 Anwendung: Der Skin-Effekt im zylindrischen Leiter

Der Leiter sei ein Zylinder mit der z -Achse als Symmetrieachse. Entsprechend zeigt der Stromdichtevektor in die z -Richtung. Wegen $\mathbf{j} \propto \mathbf{E}$ erfüllt die Stromdichte die gleiche Differentialgleichung wie das elektrische Feld, (9.7). Im Niederfrequenzbereich ist $\sigma/\omega \gg \varepsilon$ und wir dürfen für κ die Näherung (9.10) machen. Für die Komponente j in $\mathbf{j}_{f,0} = j\mathbf{e}_z$ finden wir dann die Helmholtz-Gleichung

$$\Delta j + k^2 j = 0, \quad \text{mit} \quad k = \frac{\omega}{c} \tilde{n}, \quad \tilde{n} \approx (1 - i)c \sqrt{\frac{\mu\sigma}{2\omega}}. \quad (9.11)$$

Wir verwenden Zylinderkoordinaten (ρ, ϕ, z) und nehmen an, dass j weder von ϕ noch von z abhängt. Dann wird aus (9.11) die Besselsche Differentialgleichung,

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \frac{d}{d\rho} j + k^2 j = 0, \quad (9.12)$$

die von der *Bessel-Funktion* nullter Ordnung gelöst wird,

$$j(\rho) = A J_0(k\rho), \quad A = \text{konst.} \quad (9.13)$$

Man kann diese Resultate anwenden und den Widerstand eines zylindrischen Leiters mit Radius a berechnen. Für den Strom findet man

$$I = 2\pi A \int_0^a \rho J_0(k\rho) d\rho = \frac{2\pi a A}{k} J_1(ka) \implies j(\rho) = \frac{kI}{2\pi a} \frac{J_0(k\rho)}{J_1(ka)}, \quad (9.14)$$

wobei wir folgende Integrationsformel benutzten,

$$\int_0^y x J_0(x) dx = y J_1(y).$$

Die Spannung pro Längeneinheit ist gerade die z -Komponente des elektrischen Feldes an der Leiteroberfläche $\rho = a$, also

$$\Delta U / \Delta L = E_z(a) = \frac{j(a)}{\sigma}. \quad (9.15)$$

Damit ist der Widerstand (pro Längeneinheit)

$$R = \frac{E_z(a)}{I} = \frac{k}{2\pi\sigma a} \frac{J_0(ka)}{J_1(ka)}. \quad (9.16)$$

Allgemein ist

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_0^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{2k}}{k!(k+n)!} \implies \frac{J_0(x)}{J_1(x)} \sim \frac{2}{x} \left(1 - \frac{x^2}{8} + O(x^4)\right), \quad (9.17)$$

woraus sich folgende Entwicklung des Widerstandes nach Potenzen von ka ergibt:

$$R(\omega) = \frac{1}{\pi\sigma a^2} \left(1 + i \frac{\pi\omega\mu\sigma}{2c^2} a^2 + \dots\right). \quad (9.18)$$

Für $\omega \rightarrow 0$ liefert dies den richtigen *Gleichstromwiderstand* $R(0) = 1/\pi a^2 \sigma_0$.

9.1.3 Transversal-Schwingungen bei hohen Frequenzen

Die Maxwellsche Beziehung

$$n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \quad (9.19)$$

kann mit den statischen Werten für ε_r und μ_r wegen der bekannten Dispersion für Licht nicht gelten. Wir wollen das Frequenz-Verhalten der Leitfähigkeit und des Brechungsindex modellmäßig betrachten und gehen von der Bewegungsgleichung eines Ladungsträgers aus,

$$m_0 \ddot{\mathbf{r}} = e_0 \mathbf{E} - \frac{m_0}{\tau} \dot{\mathbf{r}}. \quad (9.20)$$

Hier sind m_0 und e_0 die Masse und Ladung des Teilchens. Der letzte Term ist ein phänomenologischer Reibungsterm, der die Stöße mit den umgebenden Teilchen beschreibt. Dabei ist τ die *Relaxationszeit*, die angibt, wie rasch die Bewegung ohne elektrisches Feld abklingt. Mit

$$\mathbf{j}_f = \rho_f \dot{\mathbf{r}} = n_f e_0 \dot{\mathbf{r}}, \quad (9.21)$$

wobei n_f die Dichte der freibeweglichen Ladungsträger ist, folgt dann

$$\frac{m_0}{n_f e_0} \frac{\partial \mathbf{j}_f}{\partial t} = e_0 \mathbf{E} - \frac{m_0}{n_f e_0 \tau} \mathbf{j}_f. \quad (9.22)$$

Im stationären Fall ist \mathbf{j}_f zeitunabhängig und wir finden das Ohmsche Gesetz $\mathbf{j}_f = \sigma_0 \mathbf{E}$ mit der *statischen* Leitfähigkeit

$$\sigma_0 = \frac{n_f e_0^2 \tau}{m_0} \quad (\text{Drude-Formel, statischer Fall}). \quad (9.23)$$

Mit der harmonischen Zeitabhängigkeit $\mathbf{j}_f = e^{i\omega t} \mathbf{j}_{f,0}$, $\mathbf{E} = e^{i\omega t} \mathbf{E}_0$ wird (9.22) zu

$$\mathbf{j}_{f,0} = \sigma(\omega) \mathbf{E}_0, \quad \text{mit} \quad \sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 + i\omega\tau} \quad (\text{Drude}). \quad (9.24)$$

Wegen (9.8) ist das Quadrat des frequenzabhängigen komplexen Brechungsindex gegeben durch

$$\tilde{n}^2(\omega) = \varepsilon_r \mu_r \left(1 + \frac{\sigma_0}{i\omega\varepsilon(1+i\omega\tau)} \right). \quad (9.25)$$

Für hohe Frequenzen, $\omega\tau \gg 1$, folgt daraus

$$\tilde{n}^2(\omega) = \varepsilon_r \mu_r \left(1 - \frac{\sigma_0}{\varepsilon\tau\omega^2} \right) = \varepsilon_r \mu_r \left(1 - \frac{n_f e_0^2}{\varepsilon m_0 \omega^2} \right) = \varepsilon_r \mu_r \left(1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2} \right),$$

wobei wir die *Plasmafrequenz* einführen,

$$\omega_P = \sqrt{\frac{n_f e_0^2}{\varepsilon m_0}}. \quad (9.26)$$

Sie beträgt beispielsweise für Kupfer $1.65 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$, wenn mit $\varepsilon_r = 1$ gerechnet wird. Man beachte, dass die Relaxationszeit in diesem Resultat nicht mehr auftaucht. Für hohe Frequenzen ist der im Allgemeinen komplexe Brechungsindex

$$\tilde{n} = n - i\kappa = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r \left(1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2} \right)} \quad (\omega\tau \gg 1). \quad (9.27)$$

Unterhalb der Plasmafrequenz verschwindet n und der Index ist imaginär mit

$$\kappa = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r \left(\frac{\omega_P^2}{\omega^2} - 1 \right)} \approx \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \frac{\omega_P}{\omega}. \quad (9.28)$$

Die Wellen sind exponentiell gedämpft und die *Eindringtiefe*

$$d = \frac{c}{\kappa\omega} \approx \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} \frac{c}{\omega_P}, \quad \omega \ll \omega_P \quad (9.29)$$

ist frequenzunabhängig, bei Kupfer etwa $0.02 \mu\text{m}$. Übersteigt die Frequenz aber die Plasmafrequenz, so wird \tilde{n} reell und

$$n(\omega) = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r \left(1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2} \right)}, \quad \kappa = 0, \quad \omega \gg \omega_P. \quad (9.30)$$

Für derart hohe Frequenzen ist der Verschiebungsstrom erheblich stärker als der Leitungsstrom und Leiter verhalten sich optisch ähnlich wie Isolatoren. Für Kupfer ist

$$\frac{1}{\tau} \sim 3.7 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}, \quad \sigma_0 \sim 5.8 \cdot 10^{17} \text{ s}^{-1} \quad \text{und} \quad \omega_P \sim 1.6 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}.$$

Licht hat Frequenzen unterhalb der Plasmafrequenz von Kupfer, $\omega = (2.4 - 5.2) \cdot 10^{15} \text{s}^{-1} < \omega_P$, somit ist Kupfer für Licht undurchlässig. Die Plasmafrequenz nimmt aber mit der Ladungsträgerdichte ab oder der Masse der Teilchen zu. Daher sind Elektrolyte in der Regel durchsichtig.

Ohmsches Gesetz in der Zeitvariablen

Was folgt aus der Frequenzabhängigkeit (9.24) der Leitfähigkeit für den Zusammenhang zwischen $\mathbf{j}_f(t)$ und $\mathbf{E}(t)$? Wir wollen von der \mathbf{k} -Abhängigkeit der Leitfähigkeit absehen. Für eine feste Frequenz ist

$$\mathbf{j}_{f,0}(\omega)e^{i\omega t} = \sigma(\omega)\mathbf{E}_0(\omega)e^{i\omega t}. \quad (9.31)$$

Um zum entsprechenden Zusammenhang in der Zeitvariablen zu gelangen, müssen wir eine Fourier-Transformation vornehmen. Mit (9.24) finden wir

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega e^{i\omega t} \sigma(\omega) \mathbf{E}_0(\omega) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \frac{e^{i\omega t}}{1 + i\omega\tau} \mathbf{E}_0(\omega) \\ &= \frac{\sigma_0}{2\pi i\tau} \int dt' \mathbf{E}(t') \int d\omega \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega - i/\tau}. \end{aligned} \quad (9.32)$$

Alle auftretenden Integrale sind von $-\infty$ bis ∞ zu berechnen. Das Integral über ω kann mit den Methoden der komplexen Analysis leicht berechnet werden:

Für $t < t'$ ist die Exponentialfunktion in der Halbebene $\Im(\omega) < 0$ exponentiell unterdrückt. Der Nenner hat keine Nullstelle in dieser Halbebene. Damit verschwindet das Schleifenintegral längs

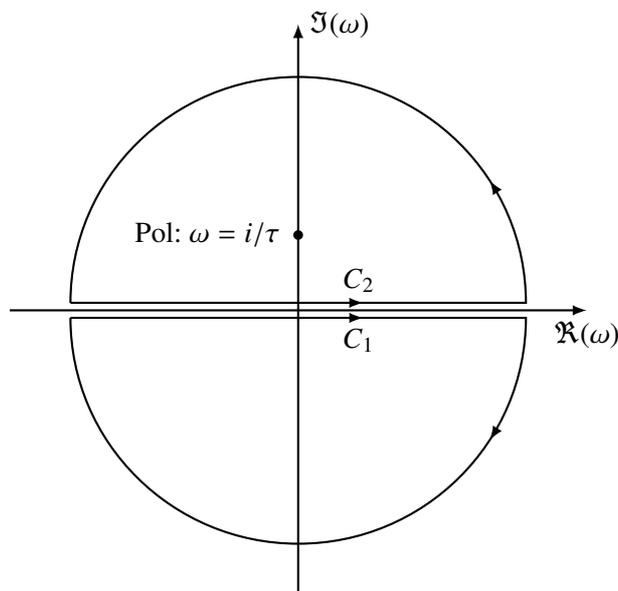


Abbildung 9.1: Zur Berechnung der Leitfähigkeit als Funktion der Zeit.

C_1 in der Abb. 9.1. Da der Halbkreis in der unteren Halbebene nicht beiträgt, verschwindet das ω -Integral in (9.32) für $t < t'$. Wir brauchen damit das t' -Integral nur von $-\infty$ nach t zu erstrecken. Für $t > t'$ ist die Exponentialfunktion für $\Im(\omega) > 0$ unterdrückt und der Halbkreis in der oberen Halbebene trägt nicht bei. Nach dem Residuensatz ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega - i/\tau} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} d\omega \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega - i/\tau} = e^{-(t-t')/\tau}. \quad (9.33)$$

Damit kommen wir zu der Lösung

$$\mathbf{j}_f(t, \mathbf{r}) = \frac{\sigma_0}{\tau} \int_{-\infty}^t e^{-(t-t')/\tau} \mathbf{E}(t', \mathbf{r}) dt' = \frac{n_f e_0^2}{m_0} \int_{-\infty}^t e^{-(t-t')/\tau} \mathbf{E}(t', \mathbf{r}) dt'. \quad (9.34)$$

Anstelle des einfachen Ohmschen Gesetzes $\mathbf{j} = \sigma_0 \mathbf{E}$ tritt also bei einer frequenzabhängigen Leitfähigkeit ein Integralzusammenhang, bei dem die Stromdichte zur Zeit t durch die Werte der Feldstärke zu allen früheren Zeiten bedingt ist. Dies ist in Einklang mit der Kausalität: Die Ursache geht der Wirkung zeitlich voraus. Praktisch hängt die Stromdichte zur Zeit t aber nur vom elektrischen Feld zu früheren Zeiten t' mit $t - t' < \tau$ ab.

9.2 Dispersion in Isolatoren

Jedes Atom besteht aus einem positiven Kern und einer Hülle von mehr oder wenig leicht beweglichen Elektronen. Die Trägheit der Elektronen wirkt sich im elektrischen Verhalten der Atome aus und führt zu einer Frequenzabhängigkeit der relativen Dielektrizitätskonstante. Auch wenn Atome erst mit der Quantenmechanik korrekt behandelt werden können, so lässt sich ihr optisches Verhalten doch schon in der klassischen Physik einigermaßen beschreiben. Nach J.J. THOMSON gehen wir von der Vorstellung aus, dass die Atomelektronen elastisch an den Kern gebunden sind. Wir nehmen also an, dass jedes Atomelektron der Bewegungsgleichung

$$m \left(\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \gamma \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \omega_0^2 \mathbf{r} \right) = e \mathbf{E} \quad (9.35)$$

genügt. Im Modell (9.20) für Leiter mit ungebundenen Leitungselektronen fehlte die rücktreibende Kraft proportional zu ω_0^2 . In Isolatoren dürfen wir die Bindung an die Atome aber nicht mehr vernachlässigen. Wie für die Leitungselektronen haben wir eine der Geschwindigkeit proportionale und ihr entgegen gerichtete Dämpfungskraft eingeführt. Sie tritt notwendig auf, da beschleunigte Ladungen strahlen, also Energie abgeben. Man kann streng beweisen, dass eine Dispersion ohne Absorption mit dem Kausalitätsprinzip - nachdem eine Wirkung in die Vergangenheit unmöglich ist - im Widerspruch steht.

Auf der rechten Seite in (9.35) steht die vom elektrischen Feld am Ort des Elektrons auf das geladenen Teilchen ausgeübte Kraft. Nun besitzt der atomare Dipol das Moment $\mathbf{p} = e\mathbf{r}$ und

wir erhalten die folgende Bewegungsgleichung für den atomaren Dipol,

$$\frac{d^2 \mathbf{p}}{dt^2} + \gamma \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \omega_0^2 \mathbf{p} = \frac{e^2}{m} \mathbf{E}. \quad (9.36)$$

Im *statischen Grenzfall* ergibt sich daraus die *Polarisierbarkeit* α , definiert durch $\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}$,

$$\alpha_0 = \frac{e^2}{m\omega_0^2}. \quad (9.37)$$

Im Wechselfeld mit der Zeitabhängigkeit $\sim e^{i\omega t}$ erhalten wir aber

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma) \mathbf{p}_0 = \frac{e^2}{m} \mathbf{E}_0 \quad \text{bzw.} \quad \alpha(\omega) = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}. \quad (9.38)$$

Aufgeteilt in Real- und Imaginärteil heißt das

$$\Re(\alpha) = \frac{e^2}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}, \quad \Im(\alpha) = -\frac{e^2}{m} \frac{\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}. \quad (9.39)$$

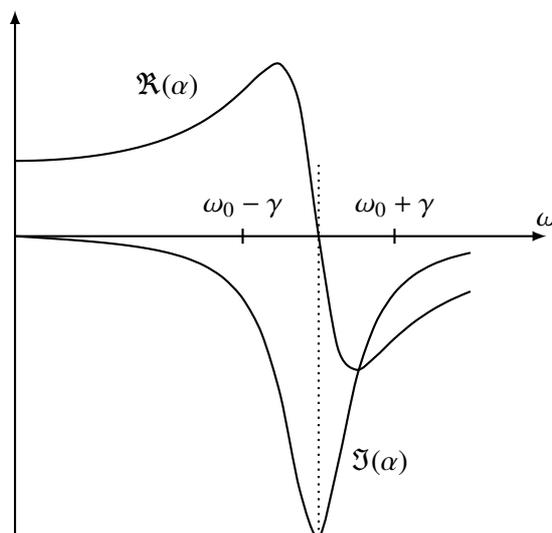


Abbildung 9.2: Qualitativer Verlauf der komplexen Polarisierbarkeit α über ω im Oszillatormodell.

Den Verlauf von Real- und Imaginärteil in Abhängigkeit von ω zeigt Abb. 9.2. α ändert sich innerhalb des schmalen Frequenzbandes $\omega_0 - \gamma < \omega < \omega_0 + \gamma$ sehr schnell, wobei der Imaginärteil ein ausgeprägtes Extremum durchläuft. Außerhalb dieser *Resonanzstelle* ist α beinahe reell. Links der Resonanz ist $\Re(\alpha)$ positiv, rechts davon negativ. Wir erinnern uns an die *Clausius-*

Mosotti-Formel (5.57), welche die Dielektrizitätskonstante mit der Polarisierbarkeit α verbindet,

$$\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{n\alpha}{3\varepsilon_0} \quad \text{oder} \quad \varepsilon_r = 1 + \frac{n\alpha}{\varepsilon_0} + O\left(\left(\frac{n\alpha}{\varepsilon_0}\right)^2\right), \quad (9.40)$$

wobei n die Teilchenzahldichte ist. Für nicht zu dichte Gase ist $n\alpha/\varepsilon_0 \ll 1$ und wir dürfen die Terme höherer Ordnung vernachlässigen. Setzen wir hier unser obiges Resultat für α ein, so finden wir

$$\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{1}{3\varepsilon_0} \frac{ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma},$$

oder aufgelöst nach ε_r

$$\varepsilon_r = 1 + \frac{ne^2}{m\varepsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} + O\left(\left(\frac{n\alpha}{\varepsilon_0}\right)^2\right). \quad (9.41)$$

Wobei wieder die letzte Näherung für verdünnte Gase gültig ist.

Nun verallgemeinern wir gleich auf Materialien, deren Moleküle bzw. Atome jeweils Z schwingungsfähige Systeme (Elektronen) mit verschiedenen Eigenfrequenzen ω_j und Dämpfungskonstante γ_j tragen. Dann sind

$$\begin{aligned} \alpha(\omega) &= \frac{e^2}{m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 + i\omega\gamma_j} \\ \varepsilon_r(\omega) &\sim 1 + \frac{ne^2}{m\varepsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 + i\omega\gamma_j}. \end{aligned} \quad (9.42)$$

f_j ist die „Zahl der Elektronen“ mit der Frequenz ω_j und heißt *Oszillatorstärke*, $\sum f_j = Z$. Diese Gleichung (mit einer anderen Bedeutung von f_j) kann aus der Quantenmechanik hergeleitet werden. Die Dielektrizitätskonstante

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{e^2 n}{2m\varepsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{a_j} \left(\frac{1}{\omega - i\gamma_j/2 + a_j} - \frac{1}{\omega - i\gamma_j/2 - a_j} \right) \quad (9.43)$$

mit $2a_j = \sqrt{4\omega_j^2 - \gamma_j^2}$ hat Pole an den Stellen

$$\omega_j^\pm = \frac{i\gamma_j}{2} \pm a_j.$$

Die $2j$ Pole liegen alle in der oberen Halbebene $\Im(\omega) > 0$. Dies ist eine Konsequenz der *Kramers-Kronig-Relation*, wie wir bald zeigen werden. Es lohnt sich, diese Formel in den verschiedenen Frequenzbereichen genauer zu untersuchen.

Niederfrequenzverhalten:

Für *Isolatoren* gibt es keine freien Ladungsträger und die kleinste Eigenfrequenz ω_j ist verschie-

den von Null. Das hat zur Folge, dass $\lim_{\omega \rightarrow 0} \varepsilon(\omega)$ existiert:

$$\varepsilon_r(0) = 1 + \frac{e^2 n}{m \varepsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2}. \quad (9.44)$$

In *elektrischen Leitern* gibt es dagegen quasi-freie Leitungselektronen, die nicht an Atome gebunden sind. Diese Elektronen haben eine verschwindende Eigenfrequenz und deshalb ist für Leiter die niedrigste Eigenfrequenz gleich Null. Für $\omega \rightarrow 0$ sind also einige Glieder der Summe (9.42) divergent. Man zerlegt dann $\varepsilon(\omega)$ in einen konvergenten Anteil ε_0 und einen divergenten Rest,

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{ne^2}{im\omega} \frac{f_0}{(\gamma_0 + i\omega)}. \quad (9.45)$$

Der Beitrag der gebundenen Ladungsträger wird durch die Polarisation beschrieben und derjenige der Leitungselektronen durch die Leitfähigkeit. In der Tat, setzen wir in die Maxwell-Gleichung im Frequenzraum

$$\nabla \times \mathbf{H}_0 = \mathbf{j}_0 + i\omega \mathbf{D}_0$$

die Beziehungen $\mathbf{j}_0 = \sigma \mathbf{E}_0$ und $\mathbf{D}_0 = \varepsilon_0 \mathbf{E}_0$ ein, dann ergibt sich

$$\nabla \times \mathbf{H}_0 = (\sigma + i\omega\varepsilon_0) \mathbf{E}_0 = i\omega \left(\frac{\sigma}{i\omega} + \varepsilon_0 \right) \mathbf{E}_0.$$

Statt der elektrischen Stromdichte tritt im letzten Klammerausdruck eine komplexe, verallgemeinerte Dielektrizitätskonstante auf. Identifiziert man diese mit (9.45), dann findet man für die Leitfähigkeit

$$\sigma(\omega) = \frac{ne^2}{m} \frac{f_0}{\gamma_0 + i\omega} \quad (\text{Drude-Modell}) \quad (9.46)$$

Wir finden also wieder die früher in (9.24) abgeleitete Formel, wenn wir γ_0 mit $1/\tau$ und n_f mit $f_0 n$ identifizieren. Für tiefe Frequenzen $\omega \ll \gamma_0$ ist dieser Ausdruck annähernd reell. Damit sind Strom und elektrisches Feld nahezu in Phase und die Leitfähigkeit hängt kaum von ω ab.

Hochfrequenzlimes:

Bei sehr hohen Frequenzen $\omega \gg \omega_j$ dominiert in jedem Nenner in (9.42) der ω^2 -Term und

$$\varepsilon_r(\omega) \sim 1 - \frac{1}{\omega^2} \frac{e^2 n}{m \varepsilon_0} \sum f_j \equiv 1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}, \quad \omega_P = \sqrt{\frac{Ze^2 n}{m \varepsilon_0}}. \quad (9.47)$$

Bei diesen Frequenzen kann man die Elektronen als quasi-frei behandeln und deshalb finden wir wieder unser früheres Resultat für die Plasmafrequenz.

9.3 Kausalität und Kramers-Kronig-Relationen

Allgemeine Kausalitätsbetrachtungen liefern schon interessante Beziehungen zwischen dem Real- und Imaginärteil der Dielektrizitätskonstante. Wir gehen von einer frequenzabhängigen, linearen

und isotropen Relation zwischen der elektrischen Polarisation und der Feldstärke aus,

$$\tilde{\mathbf{P}}(\omega) = \varepsilon_0 \tilde{\chi}(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\omega). \quad (9.48)$$

Diese Gleichung gilt für alle drei Feldkomponenten. Nach Fourier-Transformation geht diese Beziehung in eine Faltung für die entsprechenden zeitabhängigen Größen über

$$\mathbf{P}(t) = \mathcal{F}(\tilde{\mathbf{P}}(\omega)) = \varepsilon_0 \mathcal{F}(\tilde{\chi}(\omega) \mathbf{E}(\omega)) = \varepsilon_0 \int dt' \chi(t-t') \mathbf{E}(t'), \quad (9.49)$$

wobei wir den *Suszeptibilitätskern*

$$\chi(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{i\omega t} \tilde{\chi}(\omega) \quad (9.50)$$

eingeführt. Die Beziehung (9.49) beschreibt eine Nichtlokalität in der Zeit: Die Polarisation kann nicht augenblicklich der gerade herrschenden Feldstärke folgen. Sie hängt vom \mathbf{E} -Feld zu anderen Zeiten ab. Nach dem *Kausalitätsprinzip* kann sie aber nur von den Werten des \mathbf{E} -Feldes zu früheren Zeiten abhängen. Für χ bedeutet dies die Einschränkung

$$\chi(t) = 0 \quad \text{für} \quad t < 0. \quad (9.51)$$

Linearität und Kausalität implizieren also

$$\mathbf{P}(t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t dt' \chi(t-t') \mathbf{E}(t') = \varepsilon_0 \int_0^{\infty} d\tau \chi(\tau) \mathbf{E}(t-\tau) \quad (9.52)$$

mit einem im Allgemeinen komplexen

$$\tilde{\chi}(\omega) = \int_0^{\infty} d\tau \chi(\tau) e^{-i\omega\tau}. \quad (9.53)$$

Drei Tatsachen sind jetzt hier von Bedeutung:

- \mathbf{P} und \mathbf{E} und damit auch der Suszeptibilitätskern $\chi(t)$ sind reell. Aus (9.53) folgt daraus die *Realitätsbedingung*

$$\tilde{\chi}(\omega) = \tilde{\chi}^*(-\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad (9.54)$$

an die Fourier-Transformierte der Suszeptibilität.

- Die Funktion $\chi(t)$ ist für alle Zeiten endlich. Aus (9.53) folgt dann, dass $\tilde{\chi}(\omega)$ in der unteren komplexen ω -Halbebene analytisch ist. Insbesondere fällt $\tilde{\chi}$ für $\Im(\omega) \rightarrow -\infty$ exponentiell schnell ab.
- Wir nehmen an, der Betrag von $\chi(t)$ sei integrierbar, $\chi \in L_1(\mathbb{R})$. Dann folgt, dass $\tilde{\chi}(\omega)$ auf der abgeschlossenen unteren Halbebene $\Im(\omega) \leq 0$ stetig und beschränkt ist, und dass sein Betrag für $|\omega| \rightarrow \infty$ gegen Null strebt, gleichmäßig in alle Richtungen mit $\Im(\omega) \leq 0^2$.

²Dies schließt man aus dem Riemann-Lebesgue-Lemma.

Nun dürfen wir den Satz aus der Theorie der analytischen Funktion bemühen, nach dem das Schleifenintegral einer holomorphen Funktion verschwindet, falls die Funktion im umschlossenen Gebiet keine Pole aufweist. Also ist

$$\oint_C \frac{\tilde{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = 0, \quad (9.55)$$

falls die Schleife C den Punkt ω nicht umschließt und im umschlossenen Gebiet holomorph ist. Nun wählen wir folgende Schleife, die im Uhrzeigersinn durchlaufen wird: Zunächst von $-L$

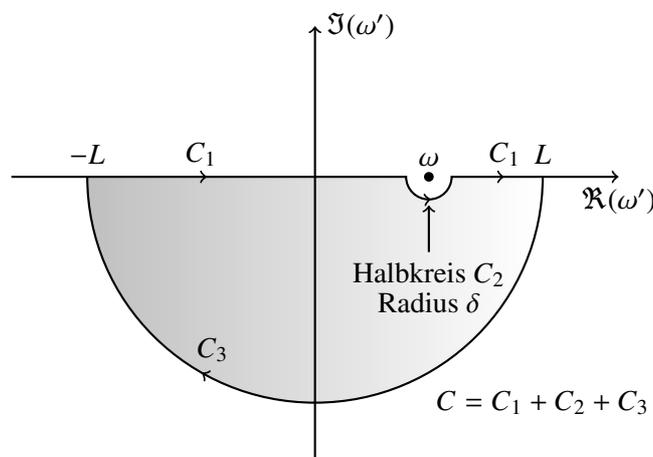


Abbildung 9.3: Zur Ableitung der Relation von Kramers und Kronig.

nach L entlang der reellen Achse und dann auf dem Halbkreis mit Radius L in der unteren Halbebene zurück nach $-L$. Für große L trägt das Integral längs des Halbkreises C_3 nicht bei. Wir möchten gerne $\tilde{\chi}$ für reelle ω wissen. Dann ist der Integrationsweg durch einen kleinen Halbkreis mit infinitesimalen Radius δ unterhalb der reellen Achse zu verbiegen, siehe Abb. 9.3. Unter Anwendung des Satzes gewinnt man die Gleichung

$$0 = \oint_C \frac{\tilde{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega} + i\pi\tilde{\chi}(\omega) \quad \text{für } \delta \rightarrow 0, L \rightarrow \infty,$$

wobei \mathcal{P} das Hauptwert-Integral bezeichnet. Die Auflösung nach $\tilde{\chi}$ führt auf die Relation

$$\tilde{\chi}(\omega) = \frac{i}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega}. \quad (9.56)$$

Nehmen wir davon Real- und Imaginärteile, so erhalten wir

$$\Re\tilde{\chi}(\omega) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im\tilde{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega}, \quad \Im\tilde{\chi}(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Re\tilde{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega}. \quad (9.57)$$

Wegen $\tilde{\varepsilon}_r(\omega) = 1 + \tilde{\chi}(\omega)$ folgen die analogen Relationen zwischen Real- und Imaginärteil der Dielektrizitätskonstante,

$$\Re \tilde{\varepsilon}_r(\omega) = 1 - \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im \tilde{\varepsilon}_r(\omega')}{\omega' - \omega} \, d\omega' \quad , \quad \Im \tilde{\varepsilon}_r(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Re \tilde{\varepsilon}_r(\omega') - 1}{\omega' - \omega} \, d\omega' . \quad (9.58)$$

Die große Bedeutung dieser *Kramers-Kronig Relationen* liegt in der Tatsache, dass sie $\Re(\tilde{\varepsilon}_r)$ und $\Im(\tilde{\varepsilon}_r)$ eindeutig miteinander verknüpfen. Kennt man den dispersiven Realteil, dann kann man den absorptiven Imaginärteil berechnen und umgekehrt. Vorausgesetzt wurden dabei nur die lineare Beziehung zwischen \mathbf{E} und \mathbf{P} und das Kausalitätsprinzip. Die Gleichungen können leicht auf inhomogene und anisotrope lineare Medien verallgemeinert werden. Dann ist $\tilde{\chi}$ eine Matrix und hängt neben der Frequenz noch von \mathbf{r} ab.

Kramers-Kronig-artige Relationen gelten nicht nur für den speziellen Fall der elektrischen Polarisation, sondern für alle physikalische Systeme mit linearer Antwort auf die Erregung (linear response).