

# Kapitel 6

## Magnetostatik

In diesem Kapitel behandeln wir zeitunabhängige Magnetfelder, auch magnetische Gleichfelder genannt. Dabei geht es um ein Verständnis der räumlichen Verteilung von Magnetfeldern in der Umgebung von Dauermagneten und stationären Strömen. Umgekehrt üben magnetische Felder eine Kraftwirkung auf Magnete und Ströme aus und dieser Effekt wird ebenfalls im vorliegenden Kapitel diskutiert. Die Grundbegriffe der Magnetostatik sind denen der Elektrostatik ähnlich. Der positiven und negativen elektrischen Ladung entsprechen Nordpol und Südpol eines Magneten. Im Gegensatz zur Elektrostatik können magnetische Polstärken allerdings nicht isoliert werden, sondern treten in einem Körper immer zusammen auf. Es gibt keine magnetischen Monopole.

### 6.1 Strom und Stromdichte

Legen wir eine Spannung zwischen den Enden eines metallischen Drahtes an, dann bewegen sich die freien Ladungsträger durch den Draht - es fließt ein elektrischer Strom. Die Ladungsmenge, die pro Zeit einen Querschnitt des Drahtes passiert, definiert den Strom

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}. \quad (6.1)$$

Sind  $q$  und  $v$  die Ladung und mittlere Geschwindigkeit der Ladungsträger und  $n$  ihre (homogen angenommene) Dichte, dann ist  $Fvdt nq$  die in der Zeit  $dt$  durch den Leiterquerschnitt  $F$  fließende Ladung. Die Stromstärke ist dann

$$I = nFvq. \quad (6.2)$$

Die *Stromdichte*  $\mathbf{j}$  an einem Ort ist ein Vektor, der in die Bewegungsrichtung der elektrischen Ladungsträger zeigt und dessen Betrag die pro Zeiteinheit durch die Flächeneinheit hindurch tretende Elektrizitätsmenge misst. Bezeichnet  $d\mathbf{f} = \mathbf{n}df$  das gerichtete Oberflächenelement,

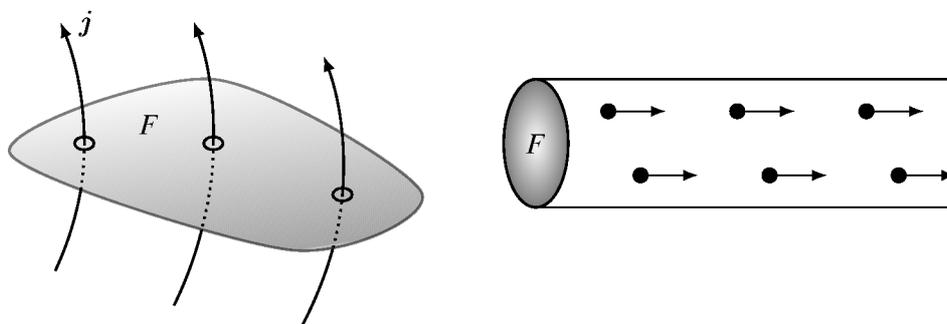


Abbildung 6.1: Der Fluss von  $\mathbf{j}$  durch die Fläche  $F$  ist gleich der Stromstärke.

dann ist der elektrische Strom durch die Fläche  $F$  gleich

$$I = \int_F \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f}. \quad (6.3)$$

Sind die Ladungsträger Punktteilchen an den Orten  $\mathbf{r}_n(t)$  mit den Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}_n(t)$ , dann ist ihre Ladungs- und Stromdichte

$$\rho_m(t, \mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N q_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \quad \text{und} \quad \mathbf{j}_m(t, \mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N q_n \mathbf{v}_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n). \quad (6.4)$$

Mitteln wir über mikroskopisch große und makroskopisch kleine Raumbereiche<sup>1</sup>  $V$ , dann erhalten wir die gemittelte Ladungs- und Stromdichte,

$$\rho(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{r}_n \in V} q_n \quad \text{und} \quad \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{r}_n \in V} q_n \mathbf{v}_n(t). \quad (6.5)$$

Diese Dichten sind für bewegte Ladungsträger zeitabhängig, da sich deren Orte  $\mathbf{r}_n$  und Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}_n$  mit der Zeit ändern. Haben alle Teilchen die gleiche Ladung  $q$ , was bei genügend kleinen Mittelungsvolumen der Fall sein wird, dann gilt

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = \frac{q}{V} \sum \mathbf{v}_n = \frac{Nq}{V} \frac{1}{N} \sum \mathbf{v}_n = \rho(t, \mathbf{r}) \mathbf{v}(t, \mathbf{r}).$$

Hier ist  $N$  die Anzahl Teilchen in  $V$  und  $Nq$  deren Gesamtladung. Die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  ist die *mittlere* Geschwindigkeit der Teilchen im betrachteten Raumgebiet.

### 6.1.1 Stromerhaltung

Die elektrische Ladung ist eine Erhaltungsgröße, d.h. in einem *abgeschlossenen System* ändert sie sich nicht. In *offenen Systemen* ist die zeitliche Änderung der Ladung  $q(V)$  in einem Raumbereich

<sup>1</sup>Wir bezeichnen die Raumbereiche und ihre Volumina beide mit  $V$ .

$V$  gleich dem Strom durch die Oberfläche  $\partial V$  des Bereichs,

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3r \rho(t, \mathbf{r}) + \oint_{\partial V} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = 0. \quad (6.6)$$

Wenn die Stromdichte im Mittel aus dem Gebiet heraus zeigt, dann fließt Strom ab und die Ladung in  $V$  nimmt mit der Zeit ab. Für ein festgehaltenes Raumgebiet können wir die Zeitableitung unter das Integral ziehen und erhalten

$$\int_V d^3r \left( \frac{\partial \rho(t, \mathbf{r})}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) \right) = 0.$$

Da diese Gleichung für beliebige  $V$  gilt, muss der Integrand verschwinden,

$$\frac{\partial \rho(t, \mathbf{r})}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = 0. \quad (6.7)$$

Diese Gleichung ist die wichtige *Kontinuitätsgleichung* der Elektrodynamik.

In der Magnetostatik interessiert nur der stationäre Fall von zeitunabhängigen Ladungs- und Stromdichten, der wegen (6.7)

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (6.8)$$

nach sich zieht. In der Magnetostatik ist die Stromdichte quellenfrei. Daraus folgt unmittelbar die *Kirchhoffsche Knotenregel*: An jedem Verzweigungspunkt (Knoten) in einem elektrischen Schaltkreis muss ebenso viel Ladung zu- wie abfließen.

## 6.2 Das magnetische Feld und das Biot-Savart-Gesetz

Ähnlich wie das  $\mathbf{E}$ -Feld definieren wir das magnetische Feld  $\mathbf{B}$  über seine messbare Kraftwirkung auf Ströme. Zu deren Bestimmung betrachten wir einen stromdurchflossenen, ruhenden dünnen Draht, durch den ein Strom  $I$  fließt. Auf ein kleines Wegelement  $d\mathbf{r}$  des Drahts wirkt eine Kraft  $d\mathbf{F}$ , für die gilt

$$d|\mathbf{F}| \propto I, \quad d|\mathbf{F}| \propto d|\mathbf{r}| \quad \text{und} \quad d\mathbf{F} \perp d\mathbf{r}. \quad (6.9)$$

Die Kraft kann daher in der Form

$$d\mathbf{F}(\mathbf{r}) = I d\mathbf{r} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (6.10)$$

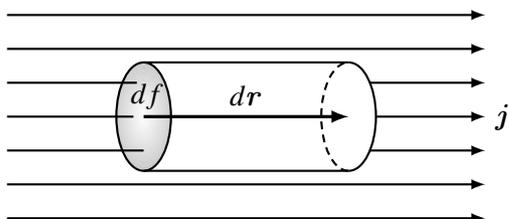
geschrieben werden. Durch diese Relation wird das Vektorfeld  $\mathbf{B}$  als Messgröße definiert. Das so definierte Feld wird *magnetische Induktion* oder auch *magnetische Flussdichte* genannt. In Analogie zu  $\mathbf{E}$ , das ja auch über seine Kraftwirkung auf geladene Probekörper eingeführt wurde, wäre die Bezeichnung magnetische Feldstärke angebrachter. Aber dieser Name ist schon für das weiter unten eingeführte Feld  $\mathbf{H}$  belegt. Oft werden wir  $\mathbf{B}$  einfach magnetisches Feld nennen.

Damit ist die von der magnetischen Induktion auf eine *linienförmige* Stromverteilung ausgeübte

Kraft gleich

$$\mathbf{F} = I \int_{\mathcal{F}} d\mathbf{r} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}). \quad (6.11)$$

Um die *Kraftdichte* zu berechnen, betrachten wir einen kleinen Zylinder mit Volumen  $dV$  im



stromdurchflossenen Gebiet. Die Zylinderachse zeige in Richtung der Stromdichte. Dann zeigt  $d\mathbf{r} = \mathbf{n}|dr|$  in Richtung von  $\mathbf{j}$  und für die Kraft auf den Strom in  $dV$  ergibt sich der einfache Ausdruck

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{r} \times \mathbf{B} = \mathbf{j} df |d\mathbf{r}| \times \mathbf{B} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} dV.$$

Definieren wir die Kraftdichte  $\mathbf{f}$  gemäß  $d\mathbf{F} = \mathbf{f} dV$  und setzen ein, dann hebt sich das Volumenelement weg und wir verbleiben mit

$$\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (6.12)$$

Ein Punktteilchen mit Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  am Ort  $\mathbf{r}$  erfährt im Magnetfeld die *Lorentz-Kraft*

$$\mathbf{F} = \int d^3r' \mathbf{f}(\mathbf{r}') = q \int d^3r' \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}). \quad (6.13)$$

Dies vergleiche man mit der Kraft  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ , die ein elektrisches Feld auf eine Probeladung ausübt. Im Magnetfeld erfährt ein geladenes Teilchen eine Kraft proportional zu seiner Ladung  $q$  und dem Betrag seiner Geschwindigkeit. Die Kraft wirkt senkrecht zur Feldrichtung und Geschwindigkeit. Im SI-System haben  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  gleiche Einheiten. Damit hat das Magnetfeld die Einheit Vs/m<sup>2</sup>. Man definiert

$$1 \text{ Tesla} = 10^4 \text{ Gau\ss} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{N}}{\text{A m}} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{A s}^2}. \quad (6.14)$$

Die Bewegung eines geladenen Teilchens im elektrischen und magnetischen Feld ist also bestimmt durch die Anfangsbedingungen und die Lorentz'sche Bewegungsgleichung<sup>2</sup>

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (6.15)$$

Das Gesetz (6.15) lässt sich durch Ablenkungsversuche an Elektronen- und Ionenstrahlen überprüfen. Ein Magnetfeld hat keinen Einfluss auf den Betrag der Geschwindigkeit,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\mathbf{v}^2}{2} \right) = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}.$$

Wir betrachten nun die Bewegung eines geladenen Teilchens im konstanten und in die  $z$ -Richtung

<sup>2</sup>Wir setzen hier  $v \ll c$  voraus.

zeigenden Magnetfelds. Die Komponenten der Bewegungsgleichung (6.15) lauten

$$\frac{dv_1}{dt} = \omega v_2, \quad \frac{dv_2}{dt} = -\omega v_1, \quad \frac{dv_3}{dt} = 0 \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{qB}{m}. \quad (6.16)$$

Die Bewegung in Richtung des Feldes wird durch das magnetische Feld nicht beeinflusst und wir brauchen uns nur um die Bewegung in der Ebene senkrecht zum Magnetfeld zu kümmern. Die Lösung der beiden ersten Gleichungen in (6.16) ist

$$v_1 = v_0 \cos \omega(t - t_0), \quad v_2 = -v_0 \sin \omega(t - t_0).$$

Nochmalige Integration nach der Zeit ergibt

$$x - x_0 = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega(t - t_0), \quad y - y_0 = \frac{v_0}{\omega} \cos \omega(t - t_0). \quad (6.17)$$

Die Projektion der Bahnkurve auf die Ebene senkrecht zu  $\mathbf{B}$  ist also ein Kreis mit Mittelpunkt  $(x_0, y_0)$  (dies ist nicht der Anfangspunkt der Bahn). Der Kreisradius ist

$$R = \frac{v_0}{\omega}. \quad (6.18)$$

Berücksichtigen wir noch die Bewegung in Feldrichtung, so finden wir als allgemeine Bewegung im homogenen Magnetfeld eine *Schraubenlinie* mit Ganghöhe

$$h = 2\pi \frac{v_3}{\omega}. \quad (6.19)$$

Bei fester Anfangsgeschwindigkeit in Richtung des Magnetfeldes ist die Ganghöhe inverse proportional zur Kreisfrequenz. Diese charakteristische Bewegung ist in Abbildung 6.2 gezeigt.

Nachdem die magnetische Induktion  $\mathbf{B}$  messbar ist, kann experimentell bestimmt werden, welches Magnetfeld ein stromdurchflossener Leiter erzeugt. Am Ort  $\mathbf{r}'$  sei ein stromleitendes Drahtstück  $d\mathbf{r}'$ . Dieses ruft am Aufpunkt  $\mathbf{r}$  einen Beitrag  $d\mathbf{B}(\mathbf{r})$  zum magnetischen Feld mit den Eigenschaften

$$d|\mathbf{B}| \propto I|d\mathbf{r}'|, \quad |d\mathbf{B}| \propto \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}, \quad d\mathbf{B} \perp d\mathbf{r}' \quad \text{und} \quad d\mathbf{B} \perp (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (6.20)$$

hervor. Demnach gibt jedes einzelne Stromelement  $I d\mathbf{r}' = \mathbf{j}(\mathbf{r}')dV$  am Orte  $\mathbf{r}'$  im Aufpunkt  $\mathbf{r}$  einen Feldbeitrag, der jeweils senkrecht zur Stromdichte  $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$  und dem Verbindungsvektor  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  vom Quellpunkt zum Aufpunkt steht und mit dem inversen Quadrat des Abstandes abnimmt. Diese Eigenschaften können in

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\mathbf{r}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (6.21)$$

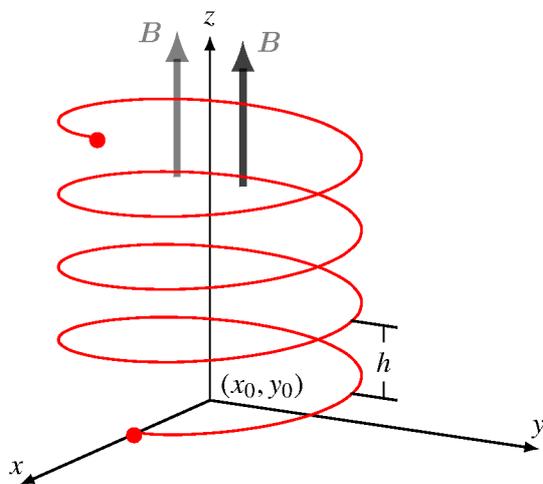


Abbildung 6.2: In einem homogenen Magnetfeld bewegt sich ein geladenes Teilchen auf einer Schraubenlinie mit Symmetrieachse parallel zum Feld.

zusammengefasst werden. Die hier auftretenden Konstante  $\mu_0$  hat die Einheit

$$[\mu_0] = \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} = \frac{\text{N}}{\text{A}^2}. \quad (6.22)$$

und sie heisst *magnetische Feldkonstante* oder Permeabilität des Vakuums. Hin und wieder findet man auch die Benennung *magnetische Konstante* oder *Induktionskonstante*. Sie kann gemessen werden und man findet den Wert

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \quad (6.23)$$

Später werden wir sehen, dass  $\varepsilon_0$  und  $\mu_0$  nicht unabhängig sind. Ihr Produkt ist festgelegt durch die Beziehung  $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ .

Wie oben summieren wir nun über die Beiträge aller Drahtstücke und finden

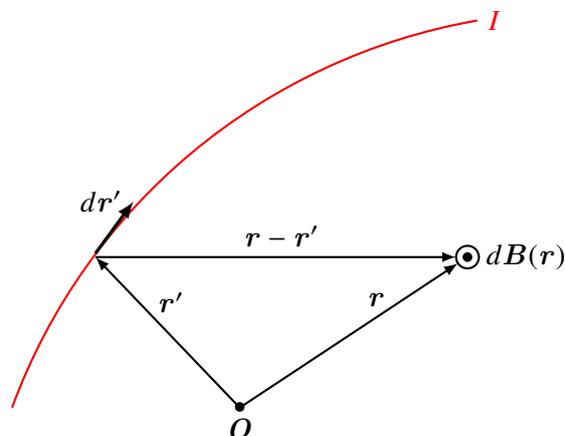
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \left( \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right). \quad (6.24)$$

Diese Integraldarstellung für das Magnetfeld legt dieses bei bekannter Stromverteilung und bekannten Randbedingungen eindeutig fest. Sie ist das Gegenstück zur Integraldarstellung des elektrischen Feldes

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3},$$

und spielt eine zentrale Rolle in der Magnetostatik. Die weiter unten diskutierten Grundgleichungen der Magnetostatik folgen aus (6.24).

Speziell für eine *linienförmige Stromverteilung* müssen wir  $\mathbf{j}(\mathbf{r})dV$  in (6.24) durch  $I d\mathbf{r}$  ersetzen und das Volumenintegral wird zu einem Linienintegral entlang des Drahts,

Abbildung 6.3: Ein Drahtstück  $d\mathbf{r}'$  am Ort  $\mathbf{r}'$  induziert ein Magnetfeld  $d\mathbf{B}$  bei  $\mathbf{r}$ .

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_C \frac{d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (6.25)$$

**Geradliniiger Draht:** Für einen *unendlich langen Draht* entlang der  $z$ -Achse<sup>3</sup> ist  $d\mathbf{r}' = \mathbf{e}_z dz'$  und  $\mathbf{r}' = z' \mathbf{e}_z$ . Entsprechend ist das vom Draht erzeugte Magnetfeld

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{\infty} dz' \mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{r} - z' \mathbf{e}_z}{|\mathbf{r} - z' \mathbf{e}_z|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \mathbf{e}_\varphi \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{\rho}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{3/2}}$$

oder nach Auswertung des Integrals ergibt sich das *Biot-Savart-Gesetz*

$$\mathbf{B}(\rho) = \frac{\mu_0}{2\pi} I \frac{\mathbf{e}_\varphi}{\rho}. \quad (6.26)$$

In der Literatur wird auch die allgemeinere Formel (6.24) für die magnetische Induktion einer beliebigen Stromverteilung als Biot-Savart-Gesetz bezeichnet.

Ähnlich wie in der Elektrostatik führen wir die Feldlinien des magnetischen Feldes ein. Das  $\mathbf{B}$ -Feld ist tangential zu diesen Feldlinien und die Dichte der Linien ist proportional zur Stärke des Feldes. Gemäß dem Biot-Savart-Gesetz sind die Feldlinien des durchströmten geraden Drahtes die Kreise um den Draht, siehe Abb. 6.4.

**Stromführender Kreisring:** Als zweites Beispiel betrachten wir das Feld eines von einem Strom  $I$  durchflossenen *Kreisrings* mit Radius  $R$  auf der durch den Kreismittelpunkt gehenden Symmetrieachse. Wir wählen die  $z$ -Achse als Symmetrieachse, so dass der Ring in der  $x$ - $y$ -Ebene

<sup>3</sup>Zeige: Die Stromdichte ist  $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{e}_z \delta(\rho)$ .

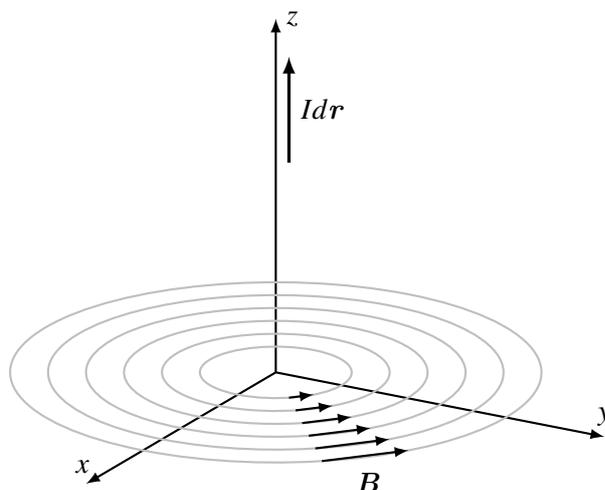


Abbildung 6.4: Die magnetischen Feldlinien sind Kreise um den stromführenden Draht.

liegt. Wegen  $\mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_\rho = -\mathbf{e}_z$  ist das Magnetfeld *auf der Achse* gegeben durch

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int R d\varphi' \mathbf{e}_{\varphi'} \times \frac{z\mathbf{e}_z - R\mathbf{e}_{\rho'}}{(z^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2} IR^2 \frac{1}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z.$$

Wie erwartet, hat das Feld auf der Symmetrieachse nur eine  $z$ -Komponente. Im Zentrum des Rings ist das Magnetfeld maximal,

$$B_z(z=0) = \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{R}. \quad (6.27)$$

Die Berechnung des Magnetfeldes weg von der Symmetrieachse ist aufwendiger und geschieht am einfachsten mit dem weiter unten eingeführten magnetischen Potential.

**Kräfte zwischen zwei Strömen:** Mit Hilfe von (6.11) und (6.25) findet man für die Kraft zwischen zwei von den Strömen  $I_1$  und  $I_2$  durchflossenen Leitern  $C$  und  $C'$  die explizite Formel,

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \int_C \int_{C'} d\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (6.28)$$

wobei über die beiden Leiterkurven zu integrieren ist. Als Anwendungsbeispiel berechnen wir die Kräfte zwischen zwei geraden und parallelen Strömen der Länge  $\ell$  im Abstand  $r$ . Das Resultat wird benötigt, um die Ladungseinheit Coulomb=As über eine Kraftmessung zu bestimmen. Der Leiter  $C$  liege in der  $z$ -Achse und der Leiter  $C'$  parallel dazu,

$$\mathbf{r} = z\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{r}' = z'\mathbf{e}_z + r\mathbf{e}_x.$$

Es ergibt sich das Integral

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \int dz dz' \frac{r}{(r^2 + (z - z')^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2\pi} I_1 I_2 \frac{\ell}{r}, \quad (6.29)$$

wobei wir  $\ell \gg r$  bei den Integrationen annehmen. Es ergibt sich eine Anziehung bei gleicher Stromrichtung und eine Abstoßung bei einander entgegengesetzter Stromrichtung.

### 6.3 Die Grundgleichungen der Magnetostatik

Wir wollen hier die differentielle Form der wichtigen Gleichung (6.24) ableiten. Wie in der Elektrostatik müssen wir dazu die Quellen und Wirbel des magnetischen Feldes berechnen. Zuerst werden wir sehen, dass das Feld

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \left( \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \quad (6.30)$$

keine Quellen hat. Wegen

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

ist nämlich

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \nabla \lambda(\mathbf{r}). \quad (6.31)$$

Berücksichtigen wir die Identität  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ , so folgt sofort, dass das magnetische Feld in der Tat quellenfrei ist,

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0. \quad (6.32)$$

Da die Rotation eines Gradientenfeldes verschwindet, ist das *Vektorpotential*  $\mathbf{A}$  nur bis auf die Addition eines Gradientenfeldes bestimmt. Das Gradientenfeld  $\nabla \lambda$  in (6.31) tritt als „Integrationskonstante“ auf. Wählen wir  $\lambda = 0$ , dann ist das Vektorpotential

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (6.33)$$

selbst quellenfrei,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' (\nabla \cdot \mathbf{j})(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 0, \end{aligned}$$

da die Stromdichte in der Magnetostatik quellenfrei ist. Das magnetische Feld ist von der *Eichfunktion*  $\lambda$  unabhängig. Die Wahl für  $\lambda$ , für die das Vektorpotential quellenfrei ist, heißt die *Coulomb-Eichung*. Wir werden weiter unten auf die möglichen Eichungen für das elektromagnetische Potential zurückkommen.

Nun müssen wir noch die Wirbel des magnetischen Feldes bestimmen. Wir wählen die Darstellung (6.31) mit dem quellenfreien Vektorpotential (6.33):

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} = -\Delta \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}.$$

Der Wirbel des Magnetfeldes ist also proportional zur elektrischen Stromdichte  $\mathbf{j}$ . Mit (6.32) finden wir die folgenden differentiellen *Grundgleichungen der Magnetostatik*

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{und} \quad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}). \quad (6.34)$$

Die erste Gleichung ist eine homogene, die zweite eine inhomogene Feldgleichung. Die erste Gleichung besagt, dass es in der Natur keine magnetischen Monopolladungen gibt.<sup>4</sup> Für eine lokalisierte Stromverteilung ist die Lösung dieser beiden Grundgleichungen durch (6.24) gegeben. Wir diskutieren nun einige einfache Konsequenzen dieser Gleichungen.

### 6.3.1 Integrale Form der Grundgleichungen

Wir definieren den *magnetischen Fluss* durch eine Fläche  $F$ ,

$$\Phi(F) = \int_F d\mathbf{f} \cdot \mathbf{B}. \quad (6.35)$$

Für das quellenfreie  $\mathbf{B}$  verschwindet der Fluss durch jede geschlossene Fläche,

$$\Phi(\partial V) = 0. \quad (6.36)$$

Dieses Gesetz ist die integrale Form der homogenen Grundgleichung der Magnetostatik. In einem beliebig herausgegriffenen Volumen  $V$  verschwinden oder entstehen keine magnetischen Feldlinien – sie sind immer geschlossen.

Da das magnetische Feld Wirbel hat, verschwindet das Linienintegral von  $\mathbf{B}$  längs Schleifen im Allgemeinen nicht. Sei  $F$  eine beliebige Fläche mit Randkurve  $\partial F$ . Wegen

$$\oint_{\partial F} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = \int_F d\mathbf{f} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 \int_F d\mathbf{f} \cdot \mathbf{j} = \mu_0 I(F) \quad (6.37)$$

ist das Linienintegral von  $\mathbf{B}$  längs  $\partial F$  proportional zu dem durch die Fläche  $F$  fließenden Strom. Dieses *Ampere-Gesetz* ist die integrale Form der inhomogenen Grundgleichung der Magnetostatik.

<sup>4</sup>Uns Theoretikern wären magnetische Monopole aus mehreren Gründen sehr willkommen. Gäbe es z.B. im ganzen Universum nur einen einzigen magnetischen Monopol, so wäre die elektrische Ladung automatisch quantisiert.

### 6.3.2 Das Magnetostatische Potential

Es sei  $V$  ein stromfreies Raumgebiet. Dann ist in  $V$  die magnetische Induktion wirbelfrei,  $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ , und damit ein Gradientenfeld

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\nabla\Psi(\mathbf{r}). \quad (6.38)$$

Da  $\mathbf{B}$  immer quellenfrei ist, ist das magnetostatische Potential  $\Psi$  harmonisch,

$$\Delta\Psi(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{in } V. \quad (6.39)$$

Die Funktion  $\Psi$  besitzt gegenüber dem elektrostatischen Potential  $\Phi$  eine Besonderheit. Für das Magnetfeld (6.26) eines stromführenden Drahtes ist wegen  $\nabla = \mathbf{e}_\rho\partial_\rho + \frac{1}{\rho}\mathbf{e}_\varphi\partial_\varphi + \mathbf{e}_z\partial_z$  das Potential

$$\Psi = -\frac{\mu_0}{2\pi} I\varphi, \quad \rho > 0, \quad (6.40)$$

und damit nicht eindeutig. Bei jedem vollen Umlauf um den Draht ändert es sich um  $\mu_0 I$ . Allgemeiner ist diese *Zirkulation* beim Umlaufen einer Schleife  $C$  proportional zum elektrischen Strom durch  $F$ , wobei  $F$  irgendeine Fläche mit Rand  $\partial F = C$  ist. Gemäß (6.37) ist der Strom für alle Flächen mit derselben Randkurve gleich. Die Zirkulation verschwindet nur, wenn man die Schleife in einem stromfreien Gebiet auf einen Punkt zusammenziehen kann.

Um das Potential im stromfreien Raum zu bestimmen, braucht man die Anschlussbedingungen an Gebiete, wo Strom fließt, typisch sind dies Leiter oder magnetische Materialien. Weiter unten werden wir die makroskopische Magnetostatik diskutieren und physikalische Randbedingungen aufstellen.

### 6.3.3 Das magnetische Feld einer langen Spule

Wir betrachten eine lange Spule mit  $n$  Windungen pro Längeneinheit. Ihre Achse zeige in die  $z$ -Richtung. In guter Näherung sind die einzelnen Drahtwindungen Kreise mit konstantem Radius  $R$  und  $z = \text{const}$ . Der Strom durch das in Abb. 6.5 gezeigte Rechteck ist

$$I(F) = \int_F \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{f} = nI \cdot \Delta z.$$

Bei einer sehr langen und geraden Spule weiß man, dass das Magnetfeld im Wesentlichen nur im Inneren vorhanden ist und dass es dort parallel zur Spulenachse orientiert ist. Wir wählen die integrale Form der inhomogenen Grundgleichung, um das Feld in der Spule zu berechnen. Als Integrationsweg wählen wir den Rand des Rechtecks in Abb. 6.5. Speziell sollen von den zur Spulenachse parallelen Seiten des Rechtecks der Länge  $\Delta z$  eine innerhalb, die andere außerhalb der Spule liegen. Für das Rechteck gilt

$$\oint_{\partial F} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = B_z \Delta z = \mu_0(F) = \mu_0 nI \Delta z, \quad \text{so dass } B_z = \mu_0 nI. \quad (6.41)$$

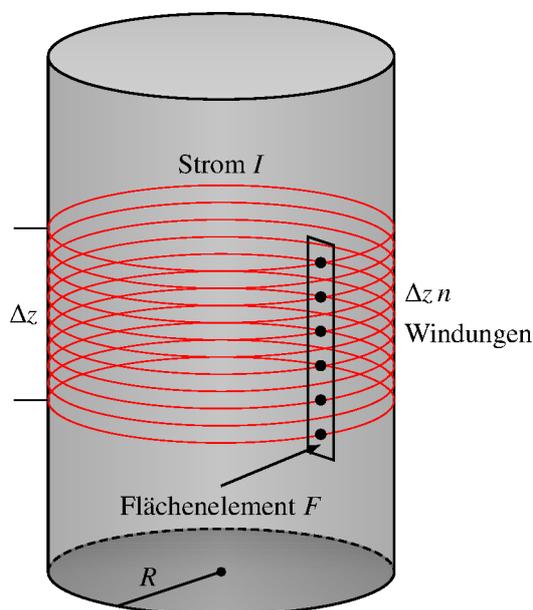


Abbildung 6.5: Zur Berechnung des Magnetfeldes einer Spule.

In den Übungen werden Sie das gleiche Resultat aus Symmetrieüberlegungen und den Grundgleichungen der Magnetostatik ableiten.

## 6.4 Induktionskoeffizienten

Wir betrachten ein System von  $N$  Stromschleifen, in denen die Ströme  $I_1, \dots, I_N$  fließen. Wir beschränken uns auf quasistationäre Ströme, so dass wir die bisher gewonnenen Gesetze anwenden dürfen. Das Magnetfeld ist eindeutig durch die Ströme in den Schleifen bestimmt. Die Beiträge der einzelnen Ströme zum resultierenden Magnetfeld sind den betreffenden Stromstärken direkt proportional und überlagern sich linear. Daher wird auch der Induktionsfluss

$$\Phi(F_i) = \int_{F_i} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{B}, \quad \partial F_i = C_i, \quad (6.42)$$

durch den  $i$ 'ten Stromkreis<sup>5</sup> eine lineare Funktion der individuellen Stromstärken sein,

$$\Phi(F_i) = \sum_{j=1}^N L_{ij} I_j. \quad (6.43)$$

Die Faktoren  $L_{ij}$  sind die *Induktivitätskoeffizienten*: Bei  $L_{ii}$  spricht man von *Selbstinduktivität* des  $i$ 'ten Stromkreises und bei  $L_{i \neq j}$  von *wechselseitiger Induktivität*. Bei einem einzelnen Stromkreis

<sup>5</sup>Man erinnere sich daran, dass der Fluss für alle Flächen mit demselben Rand  $\partial F_i$  gleich ist.

vereinfacht sich die Beziehung zu

$$\Phi = LI \quad (6.44)$$

mit Selbstinduktivität  $L$ . Relativ einfach ist die Berechnung der Selbstinduktivität für eine lange, gerade Spule vom Querschnitt  $F$  und der Länge  $l$ . Im Innern der Spule besteht das Feld  $B_z = \mu_0 n I = \mu_0 N I / l$  und daher ist der Induktionsfluss durch  $N$  Spulenschleifen

$$\Phi = \mu_0 N^2 \frac{F}{l} I.$$

Damit wird die Selbstinduktivität der Spule

$$L = \mu_0 N^2 \frac{F}{l}. \quad (6.45)$$

In SI-Einheitensystem wird sie in Vs/A=Henry gemessen.

Auch die Koeffizienten der Wechselinduktion können leicht bestimmt werden.  $L_{ij} I_j$  ist der Anteil des Induktionsflusses, der von dem im Leiter  $j$  fließenden Strom induzierten Magnetfeld  $B_j$  herrührt,

$$L_{ij} I_j = \int_{F_i} d\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{B}_j(\mathbf{r}_i) = \oint_{C_i} \mathbf{A}_j(\mathbf{r}_i) d\mathbf{r}_i.$$

Das vom Leiter  $C_j$  am Orte  $\mathbf{r}$  erzeugte Vektorpotential  $\mathbf{A}_j$  hat nach (6.33) die Darstellung

$$\mathbf{A}_j(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_j \oint_{C_j} \frac{d\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|},$$

und deshalb sind die Koeffizienten der wechselseitigen Induktivität

$$L_{ij} = L_{ji} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_i} \oint_{C_j} \frac{d\mathbf{r}_i \cdot d\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}, \quad i \neq j. \quad (6.46)$$

Als Anwendung betrachten wir zwei parallele Kreisströme mit Radien  $R_1$  und  $R_2$  im senkrechten Abstand  $h$ , siehe Abb. 6.6. In Zylinderkoordinaten sind

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} R_1 \cos \varphi_1 \\ R_1 \sin \varphi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} R_2 \cos \varphi_2 \\ R_2 \sin \varphi_2 \\ h \end{pmatrix},$$

so dass die im Integral (6.46) auftretenden Größen folgende Form haben,

$$d\mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{r}_2 = R_1 R_2 \cos(\Delta\varphi) d\varphi_1 d\varphi_2, \quad (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2 = R_1^2 + R_2^2 + h^2 - 2R_1 R_2 \cos \Delta\varphi,$$

wobei wir den Differenzwinkel  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  einführt. Nach (6.46) ist die gegenseitige Induk-

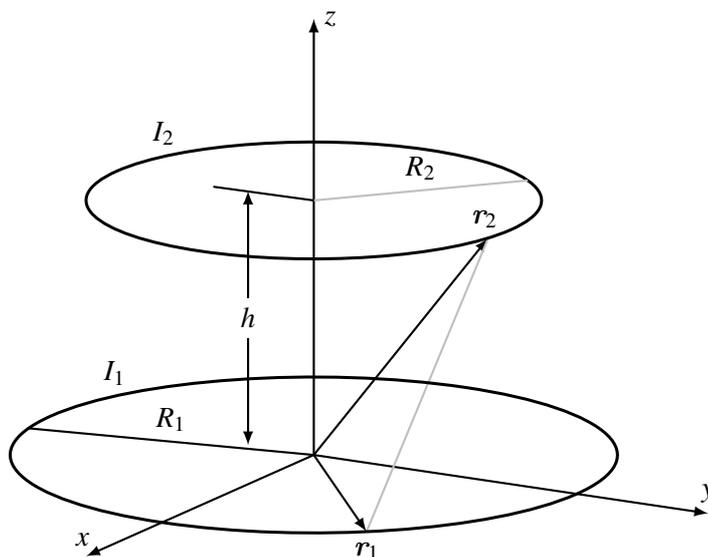


Abbildung 6.6: Zur Berechnung der wechselseitigen Induktion zweier Kreisströme.

tion

$$\begin{aligned}
 L_{12} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\varphi_1 d\varphi_2 \frac{R_1 R_2 \cos \Delta\varphi}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2 + h^2 - 2R_1 R_2 \cos \Delta\varphi}} \\
 &= \frac{\mu_0}{2} \int d\varphi \frac{R_1 R_2 \cos \varphi}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2 + h^2 - 2R_1 R_2 \cos \varphi}}. \quad (6.47)
 \end{aligned}$$

Wir verbleiben mit einem elliptischen Integral. Statt die Tabellen (oder ein algebraisches Computerprogramm) zu bemühen, untersuchen wir die extremen Situationen zweier weit voneinander getrennten oder nahe beieinander liegenden Ringe. Im ersten Fall ist  $h \gg R_1, R_2$  und wir können den Nenner in (6.47) nach fallenden Potenzen von  $h$  entwickeln. Der führende Term ist

$$L_{12} \approx \frac{\pi\mu_0}{2} \frac{R_1^2 R_2^2}{h^3}, \quad h \gg R_1, R_2. \quad (6.48)$$

Im zweiten Fall ist  $h \ll R_1, R_2$  und der Nenner kann nach wachsenden Potenzen von  $h$  entwickelt werden. Eine nicht ganz so einfache Rechnung<sup>6</sup> liefert,

$$L_{12} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \sqrt{R_1 R_2} \left( \log \frac{8\sqrt{R_1 R_2}}{b} - 2 \right), \quad b^2 = h^2 + (R_2 - R_1)^2, \quad h \ll R_1, R_2. \quad (6.49)$$

<sup>6</sup>Siehe z.B. Becker und Sauter, Seite 128.

## 6.5 Multipolentwicklung

Wir betrachten eine innerhalb einer Kugel vom Radius  $R$  lokalisierten Stromdichte. Ausserhalb der Kugel können wir das Vektorpotential  $\mathbf{A}$  in (6.33), ähnlich wie das elektrische Potential, in inversen Potenzen von  $r/R < 1$  entwickeln,

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int d^3r' \mathbf{j}(\mathbf{r}') + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{x_i}{r^3} \int d^3r' x'_i \mathbf{j}(\mathbf{r}') + \dots\end{aligned}\quad (6.50)$$

Wir erwarten, dass der Monopolbeitrag, d.h. der erste Term auf der rechten Seite, verschwindet, da es in der Elektrodynamik keine magnetischen Monopole gibt. Da durch die Kugeloberfläche kein Strom fließt, folgt für jede Funktion  $g$

$$\begin{aligned}0 &= \oint d\mathbf{f} \cdot g(\mathbf{r}) \mathbf{j}(\mathbf{r}) = \int d^3r \nabla \cdot [g(\mathbf{r}) \mathbf{j}(\mathbf{r})] \\ &= \int d^3r \nabla g(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) + \int d^3r g(\mathbf{r}) \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}).\end{aligned}\quad (6.51)$$

In der Magnetostatik ist  $\mathbf{j}$  quellenfrei und es gilt

$$\int d^3r \nabla g(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0.\quad (6.52)$$

Dieses Resultat verwenden wir, um die Integrale in der Entwicklung (6.50) zu vereinfachen. Mit  $g(\mathbf{r}) = x_i$  folgt

$$\int d^3r \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0\quad (6.53)$$

und der erste Term in der Entwicklung ist wie erwartet Null. Mit  $g(\mathbf{r}) = x_i x_j$  folgt

$$\int d^3r (x_i j_j(\mathbf{r}) + x_j j_i(\mathbf{r})) = 0.$$

Damit ist

$$\int d^3r x_i j_j(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int d^3r (x_i j_j(\mathbf{r}) - x_j j_i(\mathbf{r}))$$

antisymmetrisch in  $i, j$  und hat die Form

$$\int d^3r x_i j_j(\mathbf{r}) = \varepsilon_{ijk} m_k.\quad (6.54)$$

Wir lösen nach  $m_k$  auf und finden das *magnetische Dipolmoment*

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int d^3r \mathbf{r} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}).\quad (6.55)$$

Ein magnetisches Dipolmoment hat die Einheit Strom  $\times$  Fläche, also  $A m^2$ . Eingesetzt in obige Reihenentwicklung für das Potential ergibt sich

$$A_j(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{x_i}{r^3} \varepsilon_{ijk} m_k + \dots \quad \text{oder} \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} + \dots \quad (6.56)$$

Mit  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  hat die magnetische Induktion die Entwicklung

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) - r^2 \mathbf{m}}{r^5} + \dots \quad (6.57)$$

Dies ist das magnetische Feld eines *magnetischen Dipols*. Es hat die gleiche Form wie das elektrische Feld des elektrischen Dipols,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) - r^2 \mathbf{p}}{r^5}.$$

Das magnetische Dipolmoment einer Stromschleife ist

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2} \oint \mathbf{r} \times d\mathbf{r}. \quad (6.58)$$

Zum Beispiel ist die dritte Komponente

$$m_3 = \frac{I}{2} \oint (x dy - y dx) = I \int_0^{2\pi} \rho^2 d\varphi = I f_3,$$

wobei  $f_3$  die Projektion der vom Leiter eingeschlossenen Fläche auf die  $(x, y)$ -Ebene ist. Entsprechendes gilt für die restlichen Komponenten von  $\mathbf{m}$  und damit ist

$$\mathbf{m} = I \mathbf{f}. \quad (6.59)$$

Zur Berechnung des *Dipolmoments von Punktteilchen* setzen wir  $\mathbf{j} = \sum q_i \mathbf{v}_i \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$  in (6.55) ein mit dem Resultat

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_i \frac{q_i}{2m_i} \mathbf{L}_i, \quad (6.60)$$

wobei  $m_i$  für die Masse und  $\mathbf{L}_i$  für den Drehimpuls des  $i$ 'ten Teilchens steht. Haben die Teilchen gleiche Masse und Ladung, dann gilt

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2m} \mathbf{L}, \quad (6.61)$$

wobei  $\mathbf{L}$  der Gesamtdrehimpuls der Teilchen ist. Dieses Resultat gilt für Orbitalströme. Für einen Spin  $\mathbf{s}$  hat man dagegen

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2m} g \mathbf{s}. \quad (6.62)$$

Für Elektronen ist der gyromagnetische Faktor  $g \sim 2$  und die Komponenten des Spins nehmen nur die Werte  $\pm \hbar/2$  an.

### 6.5.1 Kraft und Drehmoment auf einen Dipol im Magnetfeld

Ein äußeres Magnetfeld übt auf eine in der Umgebung des Koordinatenursprungs lokalisierte Stromverteilung folgende Lorentz-Kraft aus:

$$\mathbf{F} = \int d^3r \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}_{\text{ext}}(\mathbf{r}). \quad (6.63)$$

Wir entwickeln das äußere Feld um den Ursprung und finden mit Hilfe von (6.53,6.54) die Entwicklung

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial \mathbf{B}_{\text{ext}}}{\partial x_i} \times \int d^3r x_i \mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial \mathbf{B}_{\text{ext}}}{\partial x_i} \times \varepsilon_{ijk} m_k \mathbf{e}_j + \dots,$$

wobei die ersten Ableitungen des Magnetfelds am Ursprung auftreten. Benutzen wir noch  $\varepsilon_{ijk} m_k \mathbf{e}_j = m_k \mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_i = \mathbf{m} \times \mathbf{e}_i$ , dann erhalten wir folgenden Ausdruck für die Kraft

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial \mathbf{B}_{\text{ext}}}{\partial x_i} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{e}_i) = \left( \mathbf{m} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_{\text{ext}}}{\partial x_i} \right) \mathbf{e}_i - \left( \mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_{\text{ext}}}{\partial x_i} \right) \mathbf{m}.$$

Der letzte Term verschwindet wegen  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ . Für den ersten Term der rechten Seite erhalten wir

$$\nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_{\text{ext}}) = \left( \mathbf{m} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_{\text{ext}}}{\partial x_i} \right) \mathbf{e}_i = m_j \frac{\partial B_{\text{ext},j}}{\partial x_i} \mathbf{e}_i = m_j \frac{\partial B_{\text{ext},i}}{\partial x_j} \mathbf{e}_i = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}_{\text{ext}},$$

wobei wir  $\nabla \times \mathbf{B}_{\text{ext}} = 0$  verwendet haben. Damit ergibt sich für die Kraft auf den magnetischen Dipol die einfache Formel

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}_{\text{ext}}, \quad (6.64)$$

ähnlich zur Kraft  $(\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}_{\text{ext}}$  auf einen elektrischen Dipol im elektrischen Feld. Diese von einem inhomogenen Magnetfeld auf magnetische Dipole ausgeübte Kraft wird für die Bestimmung der Permeabilität von magnetischen Stoffen ausgenutzt.

Für das *mechanische Drehmoment* auf den magnetischen Dipol findet man

$$\mathbf{M}_{\text{mech}} = \frac{1}{c} \int d^3r \mathbf{r} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B}_{\text{ext}}) = -\frac{1}{c} \mathbf{B}_{\text{ext}} \int d^3r \mathbf{r} \cdot \mathbf{j} + \frac{1}{c} \int d^3r (\mathbf{B}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{j}.$$

Das erste Integral verschwindet<sup>7</sup> und das zweite Integral ergibt

$$\mathbf{M}_{\text{mech}} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}_{\text{ext}}, \quad (6.65)$$

analog zum Drehmoment  $\mathbf{p} \times \mathbf{E}_{\text{ext}}$  auf einen elektrischen Dipol. Im mechanischen Gleichgewicht stellt sich ein magnetisches Moment  $\mathbf{m}$  parallel zu  $\mathbf{B}_{\text{ext}}$ . Das von einem Magnetfeld auf eine kleine Kompassnadel ausgeübte Drehmoment kann man mit einer Schneckenfederwaage messen und auf diese Weise das Magnetfeld am Ort der Magnetnadel bestimmen (siehe z.B. Pohls „Einführung in die Physik“, Band 2).

<sup>7</sup>Man wähle  $g = r^2/2$  in (6.52).

## 6.6 Magnetismus in Materie

Wir berechnen das makroskopische Feld eines magnetisierbaren Körpers durch Mittelbildung. Die Mittelung soll, wie im letzten Kapitel ausführlich dargelegt wurde, mit den Ableitungen vertauschen.

### 6.6.1 Makroskopische Grundgleichungen

Das mikroskopische Feld  $\mathbf{B}_m$  ist quellenfrei und sein Wirbelfeld ist proportional zur mikroskopischen Stromdichte  $\mathbf{j}_m$ . Durch Mittelung gewinnen wir die Feldgleichungen für das *gemittelte Feld*  $\mathbf{B} = \langle \mathbf{B}_m \rangle$ :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{und} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (6.66)$$

Wie sieht die gemittelte Stromdichte  $\mathbf{j} = \langle \mathbf{j}_m \rangle$  aus? Sie enthält drei Bestandteile: Die Stromdichte  $\mathbf{j}_f$  der frei beweglichen Ladungsträger, die Stromdichte  $\mathbf{j}_P$  der sich zeitlich ändernden Polarisationsladungen und die Magnetisierungsstromdichte  $\mathbf{j}_{\text{mag}}$ , die aus der Bewegung der Atomelektronen um ihre Kerne resultiert:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_f + \mathbf{j}_P + \mathbf{j}_{\text{mag}}. \quad (6.67)$$

Die Stromdichte  $\mathbf{j}_P$  und Ladungsdichte  $\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P}$  der Polarisationsladungen genügen der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_P + \nabla \cdot \mathbf{j}_P = \nabla \cdot \left( -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P} + \mathbf{j}_P \right) = 0. \quad (6.68)$$

Die *Polarisationsstromdichte*

$$\mathbf{j}_P = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}$$

spielt in der Magnetostatik keine Rolle. Bei zeitabhängigen Phänomenen in der Elektrodynamik werden wir aber auf diese Relation zurückkommen müssen.

Wir veranschaulichen nun die Magnetisierungsstromdichte anhand eines vereinfachten Materiemodells: Die magnetischen Dipolmomente der Atome seien ebene Ringströme mit Flächenvektor  $\mathbf{f}$  und Stromstärke  $i$ , vgl. (6.59). Die Atomdichte sei  $n$ . Wir wollen nun die Stromdichte  $I$  berechnen, die durch ein Rechteck  $F$  der Seitenlängen  $L_y$  und  $L_z$  hindurch tritt, siehe Abb. 6.7. Natürlich gibt der Strom der freien Ladungsträger einen Beitrag  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_f$ . Aber auch die atomaren Kreisströme  $i$  können einen Beitrag liefern, allerdings nur von denjenigen Atomen, deren Fläche  $f$  von einer der vier Rechteckseiten von  $F$  durchbohrt wird; denn nur bei diesen Atomen tritt der atomare Ringstrom  $i$  gerade einmal durch die Fläche  $F$  hindurch. Es sei nun  $V$  ein mikroskopisch großes und makroskopisch kleines Mittelungsvolumen und  $N$  die Anzahl der darin enthaltenen atomaren Kreisströme. Dann sind

$$\bar{\mathbf{m}} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{r}_n \in V} \mathbf{m}_n \quad \text{und} \quad \mathbf{M} = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{r}_n \in V} \mathbf{m}_n = n \bar{\mathbf{m}} \quad (6.69)$$

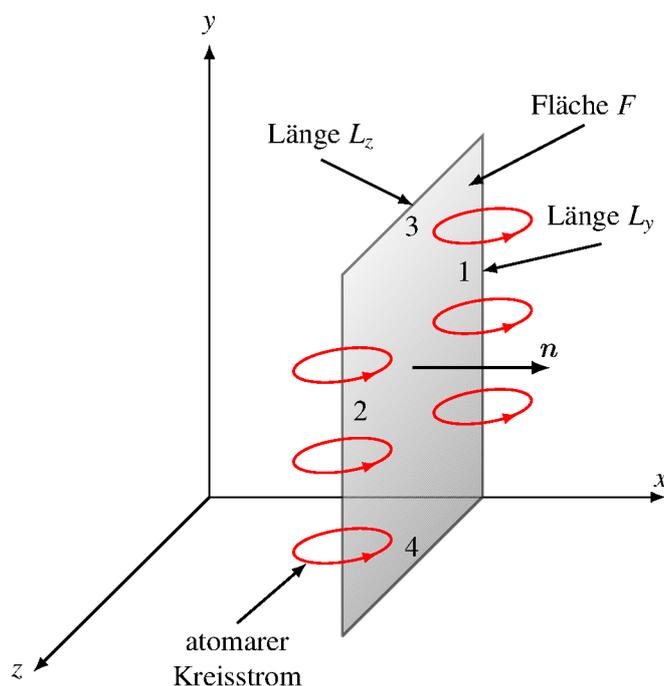


Abbildung 6.7: Amperesche Molekularströme.

das mittlere Dipolmoment und die *Magnetisierung*. Die Magnetisierung ist das mittlere magnetische Moment pro Volumen.

Der Beitrag zur  $x$ -Komponente des Stromes von allen Atomen, deren Fläche von der Rechteckseite 1 in Abb. 6.7 durchbohrt wird, ist

$$I_{\text{mag},x} = \bar{i} n \bar{f}_y L_y = \bar{m}_y n L_y = M_y L_y ,$$

wobei wir (6.59) benutzten. In gleicher Weise finden wir als Beitrag der gegenüberliegenden Rechteckseite 2 in Abb. 6.7 den Wert  $-M_y L_y$ , wobei aber der Wert von  $M_y$  an der Stelle  $z = L_z$  einzusetzen ist. Damit liefern die beiden parallel zur  $y$ -Achse laufenden Rechteckseiten den Beitrag

$$L_y M_y(z=0) - L_y M_y(z=L_z) \sim -L_y L_z \frac{\partial M_y}{\partial z} .$$

Ganz analog erhalten wir von den beiden anderen Rechteckseiten den Beitrag

$$-L_z M_z(y=0) + L_z M_z(y=L_y) \sim L_y L_z \frac{\partial M_z}{\partial y} .$$

Somit ergibt sich für den von atomaren Kreisströmen herrührenden Magnetisierungsstrom in die

$x$ -Richtung

$$I_{\text{mag},x} = L_y L_z (\mathbf{j}_{\text{mag}})_x = L_y L_z \left( \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \right) = L_y L_z (\nabla \times \mathbf{M})_x.$$

Mit den entsprechenden Ausdrücken für die  $y$  und  $z$ -Richtung findet man schlussendlich die von den Magnetisierungsströmen herrührende Stromdichte

$$\mathbf{j}_{\text{mag}}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r}). \quad (6.70)$$

Dieses Resultat für  $\mathbf{j}_{\text{mag}}$  kann auch aus der Mittelung der Grundgleichungen in der Dipolnäherung abgeleitet werden. Die entsprechende Vorgehensweise ist ähnlich wie in der Elektrostatik in polarisierbaren Medien. Wir können uns also etwas kürzer fassen: Das mikroskopische magnetische Potential eines Mediums erhalten wir in der Dipolnäherung durch Aufsummieren der Ausdrücke (6.56) über alle Elementarmagnete des Mediums,

$$\mathbf{A}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum \mathbf{m}_n \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_n}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \mathbf{M}_m(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3},$$

wobei wir die mikroskopische Magnetisierung

$$\mathbf{M}_m(\mathbf{r}) = \sum \mathbf{m}_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n)$$

eingeführt. Wir mitteln wieder mit einer Glättungsfunktion  $f$  über mikroskopisch große, aber makroskopisch kleine Gebiete, um ein mittleres, geglättetes Potential zu gewinnen,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 u \int d^3 r' f(\mathbf{u}) \mathbf{M}_m(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{u} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{u} - \mathbf{r}'|^3}.$$

Hier setzen wir  $\mathbf{r}' + \mathbf{u} = \mathbf{r}''$  mit dem Resultat

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r'' \int d^3 u f(\mathbf{u}) \mathbf{M}_m(\mathbf{r}'' - \mathbf{u}) \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}''}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \end{aligned} \quad (6.71)$$

Bei der letzten Umformung haben wir  $\mathbf{r}''$  in  $\mathbf{r}'$  umbenannt und die *Magnetisierung*

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \int d^3 u f(\mathbf{u}) \mathbf{M}_m(\mathbf{r} - \mathbf{u}) \quad (6.72)$$

eingeführt. Für die erste Glättungsfunktion in (5.2) ist die Magnetisierung in (6.69) gegeben. Mit den magnetischen Momenten  $\mathbf{m}_n$  wird auch  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  durch innere und äußere Felder beeinflusst. Ähnlich der Polarisation muss  $\mathbf{M}$  mit Hilfe von Materiemodellen berechnet werden.

Schreiben wir den letzten Faktor unter dem Integral in (6.71) als Gradient des Coulombpoten-

tials (bezüglich der gestrichenen Koordinaten) und integrieren partiell, dann erhalten wir

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \nabla' \times \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (6.73)$$

Mithilfe der Identität

$$\int_V \nabla \times \mathbf{M} d^3r = - \oint_{\partial V} \mathbf{M} \times d\mathbf{f} \quad (6.74)$$

wird der Term nach dem Gleichheitszeichen in (6.73) zu einem Oberflächenintegral und

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times d\mathbf{f}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (6.75)$$

mit dem nach außen gerichteten Oberflächenelement  $d\mathbf{f} = \mathbf{n}df$ . Wie ein Vergleich mit (6.33) zeigt, liefert das letzte Integral genau den Feldbeitrag der Stromdichte  $\mathbf{j}_{\text{mag}}$  in (6.70). Das erste Glied liefert einen Beitrag der Dichte des Oberflächenstromes, nämlich

$$\mathbf{j}_{\text{magO}}(\mathbf{r}) = \mathbf{M} \times \mathbf{n}. \quad (6.76)$$

Vernachlässigen wir diesen Oberflächenbetrag, so gelangen wir zu folgender gemittelten Gleichung in magnetisierbaren Medien,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_f + \mu_0 \mathbf{j}_{\text{mag}} = \mu_0 \mathbf{j}_f + \mu_0 \nabla \times \mathbf{M}. \quad (6.77)$$

Das Auftreten der Rotation von  $\mathbf{M}$  auf der rechten Seite legt nahe, diesen Term auf die linke Seite zu bringen und

$$\mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r}) - \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}) \quad (6.78)$$

einzuführen. Das somit definierte Feld  $\mathbf{H}$  heißt *magnetische Feldstärke* und hat die Einheit A/m.

Die *gemittelten Grundgleichungen* der Magnetostatik enthalten dann die Stromdichte der freien Ladungsträger sowie das  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{H}$  Feld:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{und} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_f. \quad (6.79)$$

Das magnetische Feldstärke  $\mathbf{H}$  wird nur durch Ströme der freien Ladungsträger erzeugt, bei der magnetischen Induktion  $\mathbf{B}$  tragen auch die Felder von magnetisierbaren Substanzen bei.

Für paramagnetische und diamagnetische Substanzen besteht für nicht zu große Feldstärken ein linearer Zusammenhang zwischen Magnetisierung und magnetischer Feldstärke:

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \implies \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mu = \mu_0 \mu_r, \quad \mu_r = 1 + \chi_m, \quad (6.80)$$

wobei  $\chi_m$  als *magnetische Suszeptibilität* und  $\mu_r$  als *relative Permeabilität* bezeichnet werden.

**Diamagnetische Stoffe:** Bei ihnen ist  $\mu_r$  kleiner als 1 und im Allgemeinen unabhängig von der Temperatur. Wasser hat zum Beispiel  $\chi_m \approx -9.04 \cdot 10^{-6}$ . Die Magnetisierung als auch das magnetische Moment der einzelnen Atome und Moleküle ist also dem magnetischen Feld entgegen

gerichtet. Beim Einschalten des äußeren Feldes werden in den Teilchen Ringströme induziert, deren magnetische Momente der Richtung von  $\mathbf{B}$  entgegengesetzt sind.<sup>8</sup> Wegen (6.64) werden diamagnetische Stoffe stets aus dem Gebiet hoher Feldstärke heraus gedrängt. Ein vollständiger Diamagnetismus liegt beim *Supraleiter erster Art* vor. Dort wird durch Oberflächenströme die magnetische Induktion vollständig aus dem Material verdrängt, d.h.  $\mathbf{B} = 0$  im Supraleiter.

**Paramagnetische Stoffe:** Bei ihnen ist  $\mu$  größer als 1 und in der Regel umgekehrt proportional der absoluten Temperatur  $T$ . Zum Beispiel ist  $\chi_m$  für Aluminium bei 20°C etwa  $\chi_m \approx 2.1 \cdot 10^{-5}$ . In paramagnetischen Stoffen besitzen die Teilchen schon unabhängig vom angelegten Feld ein permanentes magnetisches Moment. Die zugehörigen Elementarmagnete werden durch das äußere Feld teilweise ausgerichtet. Je tiefer die Temperatur, desto leichter ist es, die Magnete gegen die thermische Unordnung auszurichten. Wegen (6.64) werden paramagnetische Stoffe im Gegensatz zu den diamagnetischen in das Gebiet hoher Feldstärke hineingezogen.

**Ferromagnetische Stoffe:** Bei ihnen wird unterhalb einer kritischen Temperatur, der so genannten Curie-Temperatur,  $\mu_r$  wesentlich größer als 1 und vor allem sehr stark feld- und temperaturabhängig. Die Magnetisierung ändert sich nicht mehr linear mit  $\mathbf{B}$  bzw. mit  $\mathbf{H}$ , sondern erreicht bei relativ niedrigen Feldstärken eine *Sättigung*. Für weiches Eisen ist der Sättigungswert für  $\mathbf{B}$  bei etwa 2,1 Tesla. Im Gegensatz zur Sättigungsmagnetisierung ist die Magnetisierungskurve von der Vorgeschichte der Materialprobe abhängig (Hysteresis).

### 6.6.2 Grenzflächen

Aus der Quellenfreiheit der magnetischen Induktion folgt die Stetigkeit der Normalkomponente von  $\mathbf{B}$  an der Grenzfläche zwischen zwei Materialien,

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0. \quad (6.81)$$

Bei unterschiedlichen Permeabilitäten gilt das aber nicht mehr für die magnetische Feldstärke,

$$\mathbf{n} \cdot (\mu_2 \mathbf{H}_2 - \mu_1 \mathbf{H}_1) = 0. \quad (6.82)$$

Fließen an der Grenzfläche keine Oberflächenströme, so ist die Tangentialkomponente der Feldstärke stetig,

$$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0. \quad (6.83)$$

An der Grenzfläche zwischen zwei verschiedenen magnetischen Substanzen ist daher die Tangentialkomponente der magnetischen Induktion unstetig,

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1} \mathbf{t} \cdot \mathbf{B}_1. \quad (6.84)$$

<sup>8</sup>Die Induktion eines elektrischen Feldes durch ein zeitabhängiges magnetisches Feld wird allerdings erst im nächsten Kapitel besprochen und wir können vorerst nur qualitative Aussagen machen.

Das Brechungsgesetz (5.10) der elektrischen Kraftlinien überträgt sich auf die magnetischen Erregungslinien; es lautet bei gleicher Bedeutung der Winkel  $\alpha_1, \alpha_2$  wie dort

$$\frac{\tan \alpha_1}{\mu_1} = \frac{\tan \alpha_2}{\mu_2}. \quad (6.85)$$

Jede  $\mathbf{B}$ -Linie wird beim Eintritt in das permeablere Medium<sup>9</sup> vom Einfallslot fortgebrochen.

### 6.6.3 Kugel im homogenen Magnetfeld

Die in der Elektrostatik entwickelten Lösungsmethoden können unmittelbar in die Magneto- statik übertragen werden. Als Beispiel betrachten wir eine magnetische Kugel im homogenen Magnetfeld  $\mathbf{B}_\infty$ . Außerhalb der Kugel sei  $\mu_r = 1$ . Im Inneren derselben entsteht ein homogenes Feld und das äußere Feld wird inhomogen, weil zum ursprünglichen Feld das Feld eines im Kugelmittelpunkt zu denkenden virtuellen magnetischen Moments  $\mathbf{m}$  hinzukommt, dessen Achse in der Feldrichtung liegt. Für die explizite Rechnung benutzen wir, dass wir in der Abwesenheit von freien Ladungsträgern

$$\mathbf{H} = -\nabla\Psi \quad (6.86)$$

setzen dürfen. Für lineare isotrope Medien ist dann  $\mathbf{B} = -\mu\nabla\Psi$  und für homogene Materialien mit ortsunabhängigem  $\mu$  gilt

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = -\mu\Delta\Psi = 0, \quad \text{d.h.} \quad \Delta\Psi = 0. \quad (6.87)$$

Wir machen den Ansatz

$$\Psi(r > R) = \left( \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{m}}{r^3} - \mathbf{H}_\infty \right) \cdot \mathbf{r}, \quad \Psi(r < R) = -\tilde{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{r}.$$

Die Stetigkeit des magnetostatischen Potentials verlangt

$$\lim_{r \rightarrow R} \Psi(r > R) = \lim_{r \rightarrow R} \Psi(r < R) \implies \frac{\mathbf{m}}{4\pi R^3} - \mathbf{H}_\infty = -\tilde{\mathbf{H}}. \quad (6.88)$$

Sie impliziert gleichzeitig die Stetigkeit der Tangentialkomponente der Feldstärke  $\mathbf{H}$ . Die Stetigkeit von  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}$  an der Kugeloberfläche bedeutet

$$\frac{\partial}{\partial r} \psi|_{\text{außen}} = \mu_r \frac{\partial}{\partial r} \psi|_{\text{innen}} \implies \frac{\mathbf{m}}{2\pi R^3} + \mathbf{H}_\infty = \mu_r \tilde{\mathbf{H}}. \quad (6.89)$$

Diese beiden Anschlussbedingungen am Kugelrand bestimmen das virtuelle magnetische Moment  $\mathbf{m}$  am Ursprung. Für die Polarisierung, d.h. die mittlere Dipoldichte in der Kugel, erhalten wir dann

$$\mathbf{M} = \frac{3}{4\pi R^3} \mathbf{m} = 3 \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} \mathbf{H}_\infty.$$

<sup>9</sup>Je größer  $\mu_r$  in einem Material, desto permeabler ist es.

Damit finden wir die magnetische Induktion außerhalb und innerhalb der Kugel

$$\mathbf{H}(r > R) = \mathbf{H}_\infty + \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} \frac{R^3}{r^3} (3(\mathbf{H}_\infty \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{H}_\infty) \quad (6.90)$$

$$\mathbf{H}(r < R) = \frac{3}{2 + \mu_r} \mathbf{H}_\infty, \quad (6.91)$$

wobei  $\hat{\mathbf{r}}$  das nach außen gerichtete Normalenvektorfeld an der Kugeloberfläche ist. Ausserhalb der Kugel ist der Ausdruck für die magnetische Induktion identisch zu demjenigen für  $\mathbf{H}$  in (6.90), wenn wir rechts  $\mathbf{H}_\infty$  durch  $\mathbf{B}_\infty$  ersetzen. Innerhalb der Kugel ist die magnetische Induktion

$$\mathbf{B}(r < R) = \frac{3\mu_r}{2 + \mu_r} \mathbf{B}_\infty, \quad (6.92)$$

für diamagnetische Medien mit  $\mu_r < 1$  schwächer als außerhalb. Für paramagnetische Medien wird sie in der Kugel verstärkt.

Nun werde ein magnetisierbares Rotationsellipsoid ( $\mu_r > 1$ ) so in ein homogenes Feld  $\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}_0$  gebracht, dass seine Achse mit der Richtung von  $\mathbf{H}_0$  zusammenfällt. Dann ist die Magnetisierung im Innern ebenfalls homogen und es gilt analog zur Gleichung (5.48)

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_\infty - N \mathbf{M}. \quad (6.93)$$

Der *Entmagnetisierungsfaktor* der Kugel ist  $1/3$ . Bis auf den Fall  $N = 0$  ist das Magnetfeld im Inneren von magnetisierbaren Stoffen gegenüber dem von außen angelegten Feld abgeschwächt. Mit  $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}_i$  findet man für die Magnetisierung des Stoffes die Formel

$$\mathbf{M} = \frac{\chi_m}{1 + N\chi_m} \mathbf{H}_\infty. \quad (6.94)$$

Der Faktor  $N$  hängt von der Form des Rotationsellipsoiden ab und diese Abhängigkeit ist in (5.49) gegeben. Für die magnetische Feldstärke und Induktion im Innern des Ellipsoiden findet man

$$\mathbf{H}_i = \frac{1}{1 + N\chi_m} \mathbf{H}_\infty \quad \text{und} \quad \mathbf{B}_i = \frac{\mu_r}{1 + N\chi_m} \mathbf{B}_\infty. \quad (6.95)$$

Für einen langen, dünnen Stab ist  $N = 0$  und daher  $\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_\infty$ . Wie bei einer mit Material voll ausgefüllten Spule tritt keine Entmagnetisierung auf und  $\mathbf{B}_i = \mu_r \mathbf{B}_0$ . Für eine Kugel ist  $N = 1/3$  und man findet die magnetische Induktion (6.92) im Innern der Kugel. Für eine flache Scheibe ist  $N = 1$  und entsprechend  $\mathbf{B}_i = \mathbf{B}_\infty$ .