

Kapitel 3

Randwertprobleme der Elektrostatik

Ein elektrisches Feld verändert sich beim Einbringen von Körpern, weil sich durch Einwirkung des Feldes in bzw. auf den Körpern Ladungsverteilungen bilden (Influenz), die ihrerseits ein Feld erzeugen, welches sich dem vorher schon vorhandenen \mathbf{E} -Feld überlagert.

3.1 Ideale Leiter im elektrischen Feld

Metalle sind dadurch ausgezeichnet, dass in ihnen stets eine sehr große Anzahl von Elektronen nahezu ungehindert durch das gesamte Metall wandern können. Diese so genannten *Leitungselektronen* verursachen die elektrische Leitfähigkeit. Wenn im Metall anfangs ein elektrisches Feld vorhanden ist, dann werden die Leitungselektronen von diesem beschleunigt. Ihre Verteilung wird sich unter dem Einfluss von \mathbf{E} so lange ändern, bis \mathbf{E} selbst Null geworden ist. Die beweglichen Ladungen ordnen sich nach kurzer Zeit so an, dass das von ihnen erzeugte Feld das von außen ins Metall eindringende Feld kompensiert. Deshalb ist im statischen Fall das elektrische Feld in einem *idealen Leiter* stets Null und wegen $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ das Potential konstant.

Wir denken an die einfachsten elektrostatischen Versuche: Ein metallischer Leiter beliebiger Gestalt, ursprünglich isoliert aufgestellt, werde

1. an eine bekannte Spannung V (gegen Erde) gelegt oder
2. mit einer bekannten Ladung q geladen.

Gesucht wird das Feld außerhalb des idealen Leiters. Wir beschreiben es durch das zur Feldstärke gehörende Potential Φ , das im Unendlichen auf Null normiert sei. Ausserhalb des Leiters gilt $\Delta\Phi = 0$. Auf der Oberfläche und im Innern ist $\mathbf{E} = 0$ oder $\Phi = V = \text{const.}$ Für den Sonderfall einer Kugel vom Radius R hat die hier in Betracht kommende Lösung der Differentialgleichung $\Delta\Phi = 0$ die Form

$$\Phi = \frac{RV}{r} \quad \text{und} \quad \mathbf{E} = \frac{RV}{r^2} \mathbf{e}_r \quad \text{für} \quad r > R. \quad (3.1)$$

Sei S eine die geladene Kugel umschließende Sphäre, dann ist

$$q = \varepsilon_0 \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = 4\pi\varepsilon_0 R V,$$

welches

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R} \quad \text{und} \quad E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}, \quad r > R \quad (3.2)$$

für eine ideal leitende Kugel der Ladung q liefert (siehe auch (2.43)). Das äußere Feld ist identisch zum Feld einer Punktladung im Zentrum der Kugel mit derselben Ladung. Wegen

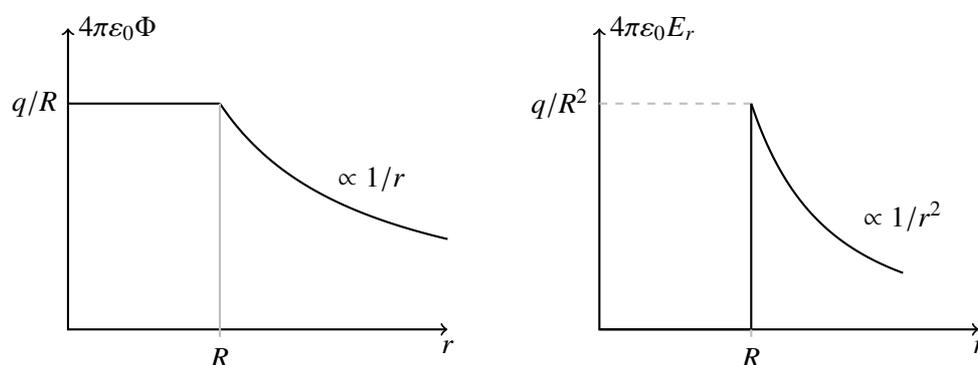


Abbildung 3.1: Das Potential und Radialkomponente des elektrischen Feldes einer ideal leitenden geladenen Kugel.

$$\rho(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\varepsilon_0}{r^2} \partial_r (r^2 E_r) = \frac{1}{4\pi r^2} \partial_r (q\theta(r - R)) = \frac{q}{4\pi R^2} \delta(r - R) \quad (3.3)$$

sitzt die gesamte Ladung eines idealen Leiters auf der Leiteroberfläche. Deshalb führt man die *Flächenladungsdichte* ein: $\sigma \Delta f$ ist die im Oberflächenelement Δf enthaltene Ladung. Die Kugeloberfläche hat den Flächeninhalt $4\pi R^2$ und entsprechend ist $\sigma = q/4\pi R^2$. Die Normalenkomponente des elektrischen Feldes E_r an der Oberfläche ist proportional zur Flächenladungsdichte, $E_r = \sigma/\varepsilon_0$. Dies ist auch für beliebige Leiteroberflächen der Fall, wie wir gleich sehen werden.

3.1.1 Randbedingungen für Metalle

In einem Metall verschwindet das elektrische Feld und Φ ist konstant. Deshalb ist die Leiteroberfläche eine Äquipotentialfläche, die von den elektrischen Feldlinien senkrecht geschnitten wird. Dies kann man auch mit Hilfe der homogenen Gleichung (2.34) direkt beweisen: Dazu bewege man eine Einheitsladung entlang eines Weges wie in Abb. 3.2. Da die Ringspannung verschwindet und im Leiter $\mathbf{E} = 0$ ist, ergibt sich

$$0 = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \sim l t \cdot \mathbf{E}_{\text{außen}},$$

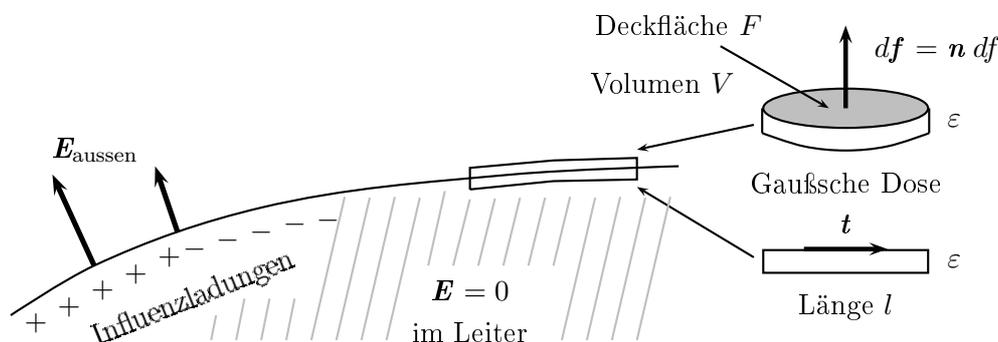


Abbildung 3.2: Ein Vakuumbereich durch Metall begrenzt.

wobei wir die Wegstücke senkrecht zur Oberfläche beliebig kurz wählten, damit sie keinen Beitrag zur Ringspannung geben. Da dies für beliebige Wege gilt, verschwindet die tangentielle Komponente des Außenfeldes,

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{E}_{\text{außen}} = 0 \quad \text{auf der Leiteroberfläche,} \quad (3.4)$$

d.h. das \mathbf{E} -Feld ist senkrecht zur Leiteroberfläche.

Bei der leitenden Kugel sprang die Normalkomponente des elektrischen Feldes beim Übergang vom Leiter ins Vakuum. Der Sprung kann mit der auf der Leiteroberfläche induzierten Influenzladung in Verbindung gebracht werden. Zum Beweis führt man eine „Gaußsche Dose“ ein, deren Deckfläche infinitesimal von der Grenzfläche entfernt im Vakuum und deren Grundfläche ebenfalls infinitesimal von der Grenzfläche im Metall verläuft, siehe Abb. 3.2. Die elektrische Ladung in der Dose ist gleich der Flächenladungsdichte $\sigma(\mathbf{r})$ multipliziert mit der Dosedeckfläche. Mit der inhomogenen Grundgleichung (2.35) finden wir

$$\oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = \int_F \mathbf{E}_{\text{außen}} \cdot \mathbf{n} df = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_F \sigma df.$$

Es folgt unmittelbar, dass

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_{\text{außen}} = \frac{\sigma(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}, \quad \mathbf{r} \in \text{Metalloberfläche.} \quad (3.5)$$

Die Bedingungen (3.4,3.5) sind wegen $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ äquivalent zu

$$\Phi = \text{const.} \quad \text{und} \quad \mathbf{n} \cdot \nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad \text{auf der Leiteroberfläche.} \quad (3.6)$$

In den Anwendungen¹ sind meistens die Potentialwerte auf den einzelnen Metallkörpern bekannt. Dann stellt sich das folgende mathematische Problem:

¹Man denke nur an Kondensatoren.

Gegeben seien N Metallkörper, welche die durchschnittsfremden Gebiete L_i ausfüllen und Oberflächen ∂L_i haben, siehe Abb. 3.3. Auf den Oberflächen aller Leiter ist das Potential konstant und

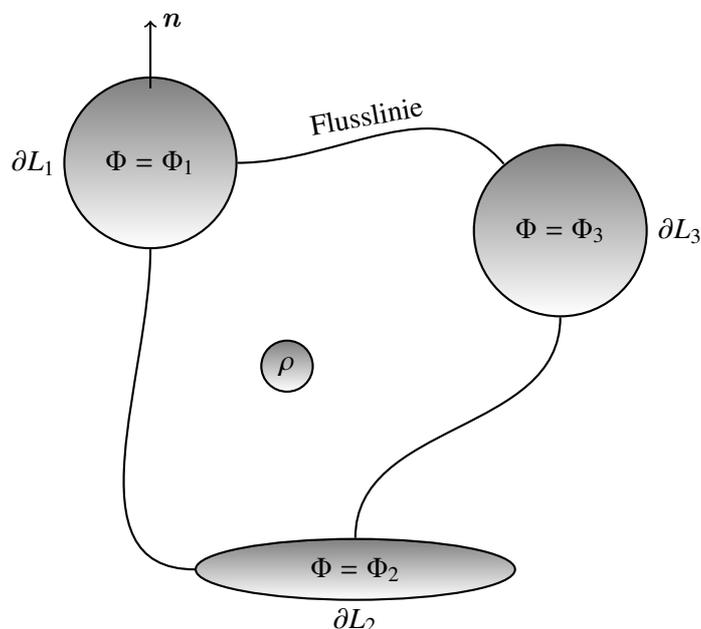


Abbildung 3.3: Das Dirichlet-Problem in Anwesenheit von idealen Leitern und Ladungen.

damit ergibt sich ein *Potentialproblem mit Randbedingungen*, auch Randwertproblem genannt:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi(\mathbf{r}) &= -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} && \text{außerhalb der Leiter} \\ \Phi(\mathbf{r})|_{\partial L_i} &= \Phi_i = \text{const.} && \text{auf den Leiteroberflächen.} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Die Suche von Lösungen einer (elliptischen) Differentialgleichung bei vorgegebenen Werten auf Rändern heißt *Dirichlet-Problem*. Wir werden zeigen, dass das vorliegende Dirichlet-Problem eine eindeutige Lösung hat. Aus dem eindeutigen Φ kann man dann mit der Formel (3.6) die Oberflächenladungen berechnen.

3.1.2 Eindeutigkeit der Lösung

Es seien Φ_1 und Φ_2 zwei Lösungen des Randwertproblems (3.7) und V das Raumgebiet *außerhalb der Leiter*. Für die Differenz $\Psi = \Phi_1 - \Phi_2$ folgt dann

$$\Delta\Psi = 0 \quad \text{in } V \quad \text{und} \quad \Psi|_{\partial V} = 0. \quad (3.8)$$

Der Rand ∂V des Raumbiets ist die Vereinigung der Ränder ∂L_i der Leiter. Im Integral

$$\int_V d^3r (\Psi \Delta \Psi + \nabla \Psi \cdot \nabla \Psi) = \int_V d^3r \nabla \cdot (\Psi \nabla \Psi) = - \sum_i \oint_{\partial L_i} df \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial n} \quad (3.9)$$

verschwindet die rechte Seite, da Ψ auf allen Leiteroberflächen verschwindet. Das negative Vorzeichen in der letzten Gleichung berücksichtigt, dass die Normalenvektoren \mathbf{n} in das Gebiet V hineinzeigen. Wegen $\Delta \Psi = 0$ im Gebiet V außerhalb der Leiter, ist

$$\int_V d^3r \nabla \Psi \nabla \Psi = 0.$$

Also verschwindet $\nabla \Psi$ in V , das heißt, Ψ ist konstant. Die Konstante muss Null sein wegen der Randbedingungen für Ψ . Damit wäre die Eindeutigkeit bewiesen.

Sind anstelle der Potentialwerte die Ladungsdichten auf den Leiteroberflächen vorgegeben, dann muss man das folgende Randwertproblem lösen:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi(\mathbf{r}) &= -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} && \text{außerhalb der Leiter} \\ \frac{\partial}{\partial n} \Phi(\mathbf{r})|_{\partial L_i} &= -\frac{\sigma_i(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} && \text{auf den Leiteroberflächen.} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Die σ_i sind die auf den Rändern der Leiter sitzenden Flächenladungsdichten. Ähnlich wie das Dirichlet-Problem hat dieses so genannte *Neumann-Problem* eine eindeutige Lösung: Für gegebene ρ und σ_i ist das Potential bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt.

3.2 Die Methode der Spiegelladungen

Mit dieser Methode kann man für viele symmetrische Anordnungen von Punktladungen in Gegenwart von idealen Leitern das Potential auf einfache Art bestimmen.

3.2.1 Punktladung in der Nähe einer ebenen Metallplatte

Zur Illustration betrachten wir eine Punktladung in der Nähe einer geerdeten Metallplatte, siehe Abb. 3.4. Die Metallplatte teilt den Raum in zwei Hälften, $x > 0$ und $x < 0$. Wir setzen eine punktförmig gedachte Ladung an die Stelle $\mathbf{r}_0 = r_0 \mathbf{e}_x$, d.h. rechts von der Platte im Abstand r_0 , und suchen das Potential im rechten Halbraum. Gesucht ist also eine Lösung von

$$\Delta \Phi = -\frac{q}{\varepsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad \text{für } x > 0, \quad \Phi(0, y, z) = 0. \quad (3.11)$$

Wir wissen bereits, dass die Lösung im rechten Halbraum die Form

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + \Phi_h(\mathbf{r}), \quad \Delta \Phi_h = 0, \quad (3.12)$$

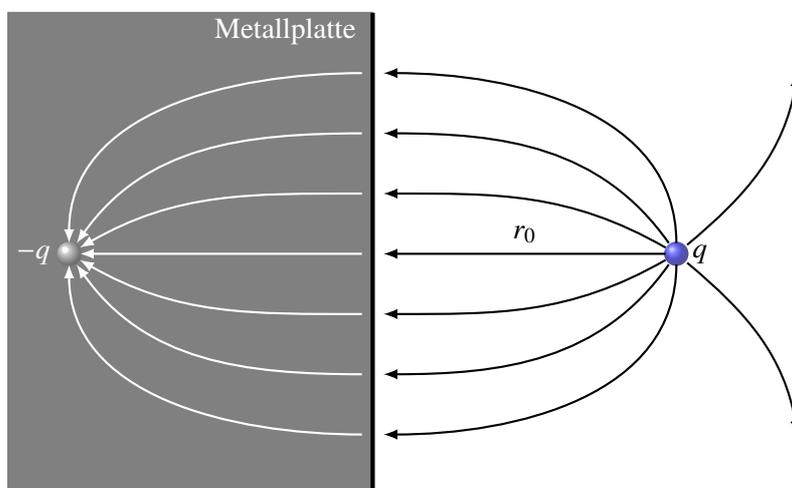


Abbildung 3.4: Bei der Bestimmung des Potentials einer Punktladung und geerdeten Metallplatte kann die Platte durch eine geeignet gewählte Spiegelladung (auch Bild- oder Scheinladung genannt) ersetzt werden.

haben muss. Wir suchen also eine in *diesem Gebiet* harmonische Funktion Φ_h , so dass Φ bei $x = 0$ verschwindet. Um diese zu finden, nehmen wir die Platte weg und setzen dafür eine Spiegelladung an den an der Plattenebene gespiegelten Ort $-\mathbf{r}_0$. Diese soll die Ladung $-q$ tragen. Aus Symmetriegründen muss das Potential von Ladung und Spiegelladung bei $x = 0$ verschwinden, genauso wie das Potential von Ladung und Platte. Das Feld der Spiegelladung hat seine Quelle im linken Halbraum und deshalb erfüllt das Potential von Ladung *und* Spiegelladung,

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} - \frac{q}{|\mathbf{r} + \mathbf{r}_0|} \right), \quad (3.13)$$

im *rechten Halbraum* die Potentialgleichung (3.11) und verschwindet bei $x = 0$. Nach dem Eindeutigkeitssatz ist Φ dann die Lösung des ursprünglichen Problems für eine Ladung q bei $\mathbf{r}_0 = r_0 \mathbf{e}_x$ und eine Metallwand bei $x = 0$. Die Feldstärke, die die Oberflächenladung im rechten Halbraum und somit auch am Ort der Ladung q erzeugt, ist identisch mit derjenigen, die von der Spiegelladung $-q$ hervorgerufen wird. Auf q wirkt somit die auf die Leiteroberfläche hin gerichtete Kraft

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2r_0)^2}. \quad (3.14)$$

Die Erscheinung, dass ein elektrisch geladener Körper auf der Oberfläche eines benachbarten, ursprünglich ungeladenen Leiters Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens hervorruft, bezeichnet man als *elektrische Influenz*.

Die Kraft divergiert für $r_0 \rightarrow 0$ und unsere Betrachtung versagt bei kleinen Entfernungen r_0 der Probeladung von der Grenzfläche. Der Grund ist in der atomistischen Struktur der Materie und

der Ladungsträger zu suchen. Einem der Oberfläche näher als $10 - 100$ Ångström kommenden Teilchen erscheint diese nicht mehr glatt. Das herannahende geladene Teilchen verschiebt die freien Ladungsträger des Leiters. Dieser Verschiebungseffekt erstreckt sich bei starker Annäherung des Teilchens nicht nur auf eine dünne Oberflächenschicht, sondern auch in die Tiefe des Metalls. Die Spiegelkraft bleibt selbst bei einem auftreffenden Teilchen endlich.

3.2.2 Punktladung in der Nähe einer leitenden Kugel

Als weitere Anwendung der Spiegelladungsmethode betrachten wir eine Punktladung q am Ort \mathbf{r}_0 außerhalb einer um den Koordinatenursprung zentrierten leitenden Kugel mit Radius R . Wir suchen das Potential Φ mit $\Phi(r = R) = 0$. Falls eine einzige Spiegelladung q' genügt, dann muss deren Position \mathbf{r}_1 aus Symmetriegründen auf dem Strahl vom Ursprung zur Ladung q liegen. Wir setzen also

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{r}_0 = r_0 \mathbf{n} \quad \text{und} \quad \mathbf{r}_1 = r_1 \mathbf{n}.$$

Die Anordnung von Ladung und Spiegelladung ist in der Abbildung 3.5 gezeigt. Nun müssen wir q' und r_1 so wählen, dass das Potential

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\mathbf{r} \mathbf{e}_r - r_0 \mathbf{n}|} + \frac{q'}{|\mathbf{r} \mathbf{e}_r - r_1 \mathbf{n}|} \right) \quad (3.15)$$

auf der Kugeloberfläche verschwindet. Die Bestimmungsgleichung lautet

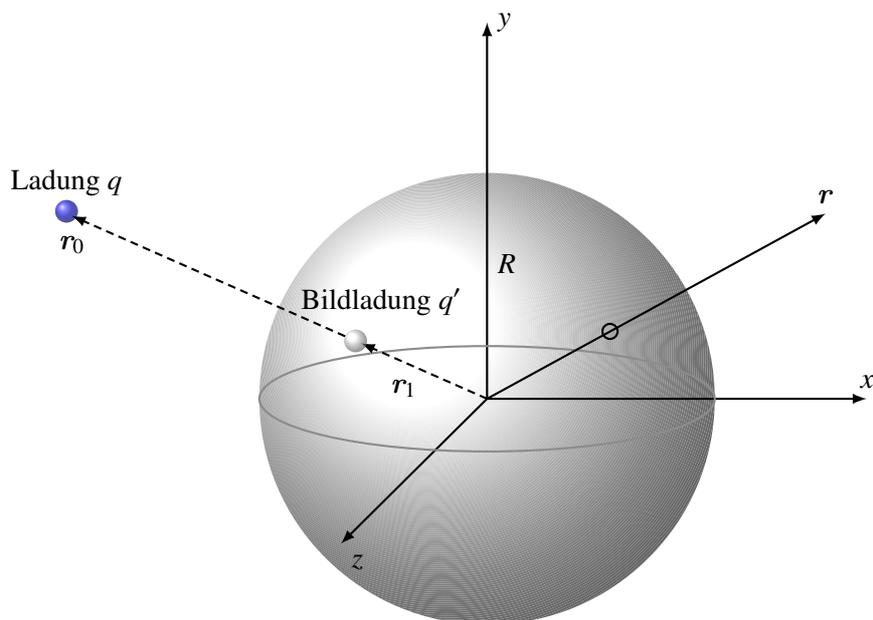


Abbildung 3.5: Bei der Bestimmung des Potentials einer Punktladung am Ort \mathbf{r}_0 außerhalb einer geerdeten Metallkugel kann die Kugel durch eine Spiegelladung am Ort \mathbf{r}_1 ersetzt werden.

$$0 = \frac{q}{R|\mathbf{e}_r - r_0\mathbf{n}/R|} + \frac{q'}{r_1|\mathbf{n} - R\mathbf{e}_r/r_1|},$$

und ist erfüllt für alle Werte von $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n}$ falls gilt

$$\frac{q}{R} = -\frac{q'}{r_1} \quad \text{und} \quad \frac{r_0}{R} = \frac{R}{r_1}.$$

Damit ist die Spiegelladung und ihr Abstand vom Ursprung gleich

$$q' = -\frac{R}{r_0}q \quad \text{und} \quad r_1 = \frac{R^2}{r_0}, \quad (3.16)$$

und das elektrostatische Potential hat die Form

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} - \frac{\xi q}{|\mathbf{r} - \xi^2\mathbf{r}_0|} \right), \quad \xi = \frac{R}{r_0} < 1. \quad (3.17)$$

Bewegen wir die Ladung ins Unendliche, $r_0 \rightarrow \infty$, dann wandert die abnehmende Spiegelladung ins Zentrum der Kugel. Bewegen wir sie dagegen nahe an die Kugel heran, dann nimmt die Spiegelladung zu und wandert vom Zentrum weg in Richtung der Ladung. Kommt q der Kugel sehr nahe, dann strebt die Spiegelladung gegen $-q$ und sitzt an dem an der Kugeloberfläche gespiegelten Ort.

Die durch die Ladung auf der Metalloberfläche induzierte *Flächenladungsdichte* ist

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial\Phi}{\partial r} \Big|_{r=R} = -\frac{q}{4\pi R^2} \frac{\xi(1-\xi^2)}{(1+\xi^2-2\xi\cos\theta_0)^{3/2}}, \quad (3.18)$$

wobei θ_0 der Winkel zwischen \mathbf{r} und \mathbf{r}_0 ist. In Abb. 3.6 ist die Flächenladungsdichte in Einheiten von $-q/4\pi R^2$ geplottet. Die Influenzladungen auf der Kugeloberfläche sind in Richtung der Punktladung konzentriert. Je näher die Ladung der Kugel kommt, desto akzentuierter ist diese Konzentration.

Die Kraft auf die Punktladung ist gleich der Kraft zwischen Ladung und Spiegelladung. Der Abstand der Ladungen ist $r_0 - r_1 = r_0(1 - R^2/r_0^2)$. Gemäß Coulombs Kraftgesetz ist diese *anziehende Kraft*

$$|\mathbf{F}| = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{|r_0 - r_1|^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{R^2} \frac{\xi^3}{(1-\xi^2)^2}, \quad \xi = \frac{R}{r_0}. \quad (3.19)$$

Weit weg von der Kugel, d.h. für kleine ξ , ist die Kraft invers proportional zu r_0^3 und nahe der Kugel invers proportional zum quadrierten Abstand von der Kugeloberfläche.

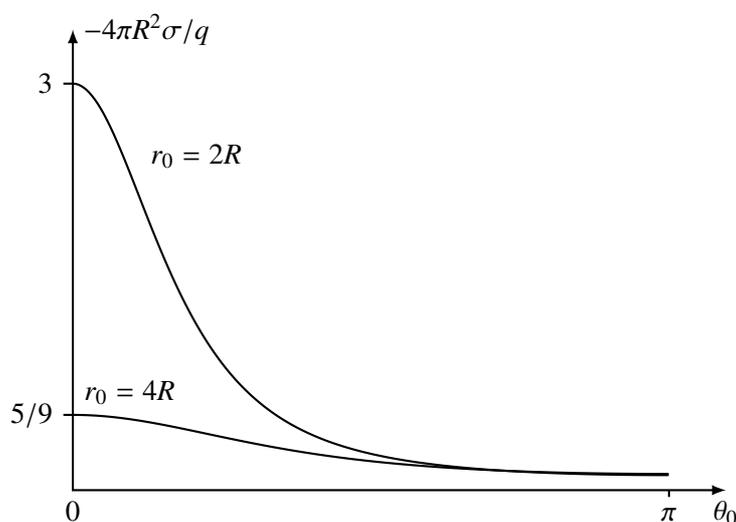


Abbildung 3.6: Oberflächenladungsdichte σ einer geerdeten Metallkugel induziert durch eine Punktladung q im Abstand r_0 vom Zentrum der Kugel. θ_0 ist der Winkelabstand zwischen Punktladung und Ort auf der Kugeloberfläche.

3.2.3 Leitende Kugel im homogenen Feld

Wir betrachten nun eine *leitende Kugel* im homogenen Feld, dessen asymptotische Kraftlinien parallel zur x -Achse verlaufen. In Abwesenheit der Kugel sind Potential und homogenes Feld

$$\Phi_0(\mathbf{r}) = -E_0 x \quad \text{und} \quad \mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_x. \quad (3.20)$$

Wir denken es uns entstanden durch die Superposition zweier Felder, dem einer fernen Ladung $-q$ am Ort $\mathbf{r}_0 = r_0 \mathbf{e}_x$ und dem einer Ladung q am gespiegelten Ort $-\mathbf{r}_0$. Für große r_0 ist das Potential der beiden Ladungen

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} + \mathbf{r}_0|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{(x+r_0)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{q}{\sqrt{(x-r_0)^2 + y^2 + z^2}} \right) \\ &\rightarrow \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0} \left(\frac{1}{\sqrt{1+2x/r_0}} - \frac{1}{\sqrt{1-2x/r_0}} \right) \rightarrow -\frac{qx}{2\pi\epsilon_0 r_0^2} \quad \text{für } r_0 \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Um Übereinstimmung mit (3.20) herzustellen, muss mit r_0 auch q anwachsen, so dass

$$\frac{q}{2\pi\epsilon_0 r_0^2} = E_0 \quad (3.22)$$

konstant ist.

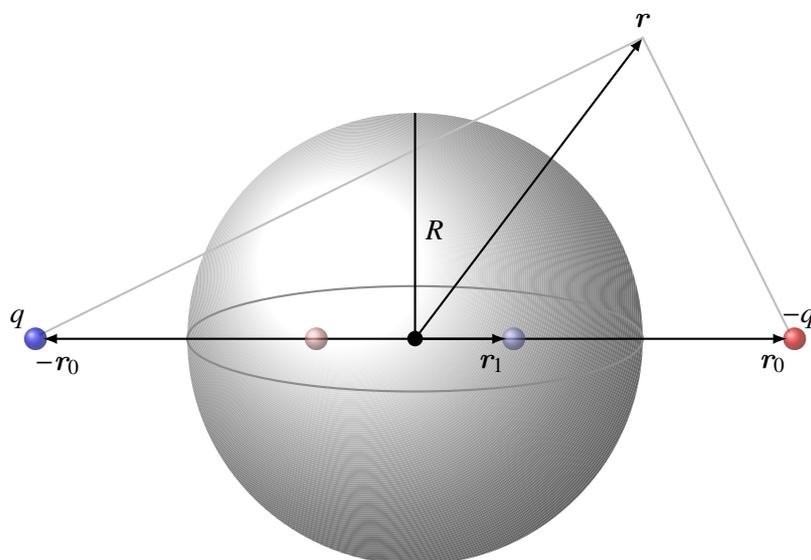


Abbildung 3.7: Zwei ins Unendliche rückende Ladungen $\pm q$ und ihre Spiegelladungen in Bezug auf eine leitende Kugel vom Radius R erzeugen ein homogenes elektrisches Feld und einen elektrischen Dipol im Mittelpunkt der Kugel.

Nun berücksichtigen wir die leitende Kugel im zweiten Schritt. Auf ihrer Oberfläche muss das Potential verschwinden. Wie oben ersetzen wir die leitende Kugel durch zwei Spiegelladungen auf der Verbindungslinie zwischen den bereits vorhandenen Ladungen bei r_0 und $-r_0$. Gemäß (3.16) sind die Spiegelladungen und deren Orte gegeben durch

$$q' = \frac{R}{r_0}q \quad \text{bei} \quad r_1 = \frac{R^2}{r_0}e_x \quad \text{und} \quad -q' \quad \text{bei} \quad -r_1.$$

Die Spiegelladungen $\pm q'$ kommen sich nahe wenn die Ladungen $\mp q$ auseinanderrücken und bilden im Grenzfall $r_0 \rightarrow \infty$ einen elektrischen Dipol mit dem Moment

$$\mathbf{p} = 2r_1q' = 4\pi\epsilon_0 R^3 \mathbf{E}_0. \quad (3.23)$$

wobei wir im letzten Schritt von der Beziehung in (3.22) Gebrauch machten. Das von den

Spiegelladungen erzeugte Dipolfeld ist

$$\begin{aligned}\Phi_D &= \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} - \frac{1}{|\mathbf{r} + \mathbf{r}_1|} \right) \\ &= \frac{Rr_0E_0}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-r_1)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+r_1)^2 + y^2 + z^2}} \right) \\ &\rightarrow \frac{Rr_0E_0}{2r} \left(\frac{1}{\sqrt{1-2xr_1/r^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+2xr_1/r^2}} \right) \rightarrow E_0R^3 \frac{x}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}.\end{aligned}\quad (3.24)$$

In der letzten Zeile haben nach der Taylorentwicklung r_1 durch R^2/r_0 ersetzt. Wir schließen, dass im homogenen Feld die Randwertaufgabe dadurch gelöst wird, dass wir im Mittelpunkt der Kugel einen virtuellen elektrischen Dipol mit endlichem Moment anbringen. Aus dem ursprünglich homogenen Feld entsteht dann das durch den Dipol gestörte Feld mit Potential

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_0(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = E_0 \left(\frac{R^3}{r^3} - 1 \right) x. \quad (3.25)$$

Das entsprechende elektrische Feld hat die Form

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{p}}{r^5}. \quad (3.26)$$

Wie gefordert nimmt Φ auf der Kugeloberfläche $r = R$ den konstanten Wert 0 an. Die Influenzladung auf der Oberfläche ist

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial\Phi}{\partial r} \Big|_{r=R} = 3\epsilon_0 E_0 \cos\theta, \quad (3.27)$$

wobei θ der Winkel zwischen der Richtung des elektrischen Feldes im Unendlichen und dem betrachteten Punkt auf der Kugeloberfläche bezeichnet. Das Oberflächenintegral dieser Ladungsdichte verschwindet und es gibt keinen Unterschied zwischen einer geladenen und einer ungeladenen isolierten Kugel. Die Feldlinien in der Umgebung einer leitenden Kugel im asymptotisch homogenen Feld sind in Abbildung (3.8) skizziert.

3.3 Die Methode der Greenschen Funktionen

Bisher haben wir das Dirichlet-Randwertproblem

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{r}) \quad \text{in } V \quad \text{und} \quad \Phi(\mathbf{r})|_{\partial V} = 0 \quad (3.28)$$

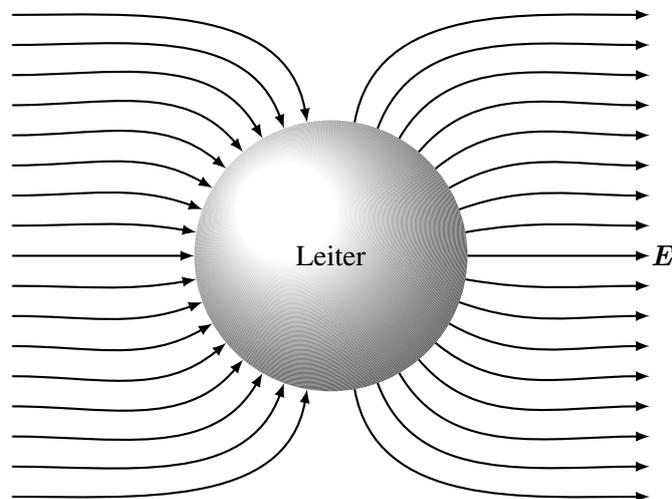


Abbildung 3.8: Eine leitende Kugel im homogenen elektrischen Feld.

für Punktladungen untersucht und für einige Fälle gelöst. Die spezielle Lösung für eine Einheitsladung mit Ladungsdichte $\rho = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ heißt *Greensche Funktion* $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$,

$$\Delta G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad \text{in } V \quad \text{und} \quad G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\partial V} = 0. \quad (3.29)$$

Die Greensche Funktion G_D für den Halbraum (3.13) und den Außenraum einer Kugel (3.17) haben wir mit der Spiegelladungsmethode berechnet. Weitere Beispiele werden Sie in den Übungen kennen lernen. Aus der Greenschen Funktion lässt sich nun die allgemeine Lösung von (3.28) gewinnen:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}'). \quad (3.30)$$

In Abschnitt 2.3 haben wir gezeigt, dass dieses Φ tatsächlich die Poissongleichung erfüllt. Diese Lösung verschwindet auch auf der Leiteroberfläche, da G_D diese Eigenschaft hat. Deshalb ist Φ die eindeutige Lösung des Randwertproblems (3.28).

Im Allgemeinen verschwindet das Potential auf den Leiteroberflächen allerdings nicht. Auch könnten anstelle der Potentialwerte Ladungsdichten auf den Leiteroberflächen vorgegeben sein. In jedem Falle hat im interessierenden Raumbereich V die Green-Funktion die Form

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + G_h(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad \Delta G_h(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad (3.31)$$

mit einer harmonischen und symmetrischen Funktion $G_h(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. Die Freiheit bei der Wahl dieser Funktion nutzt man aus, um die Randbedingungen zu realisieren. Dabei wird folgende *Greensche*

Identität gebraucht

$$\begin{aligned} & \oint_{\partial V} d\mathbf{f}' (\Phi(\mathbf{r}') \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \Phi(\mathbf{r}')) \\ &= \int_V d^3 r' (\Phi(\mathbf{r}') \Delta' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Delta' \Phi(\mathbf{r}')) \\ &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_V d^3 r' \Phi(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V d^3 r' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}'), \end{aligned}$$

um das Potential Φ am Orte $\mathbf{r} \in V$ durch die Ladungsverteilung innerhalb des Gebiets und seinen Werten auf dem Rand ∂V des Gebiets auszudrücken:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_V d^3 r' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') - \varepsilon_0 \oint_{\partial V} d\mathbf{f}' \left(\frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \Phi(\mathbf{r}') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Phi}{\partial n'} \right). \quad (3.32)$$

Bei der Herleitung dieser Formel wurde nirgendwo angenommen, dass Φ auf ∂V konstant ist. Deshalb ist sie nicht nur für die Behandlung von idealen Leitern nützlich.

3.3.1 Dirichlet-Problem

Ist das Potential auf dem Rande ∂V bekannt, dann wählt man die auf dem Rande verschwindende Dirichlet-Greenfunktion G_D in (3.29). Dann gilt

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_V d^3 r' G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') - \varepsilon_0 \oint_{\partial V} d\mathbf{f}' \frac{\partial G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \Phi(\mathbf{r}'). \quad (3.33)$$

Verschwindet das Potential auf den Leiteroberflächen, dann vereinfacht sich diese Formel weiter auf das frühere Resultat (3.30). Gibt es in V keine elektrischen Ladungen, dann ist Φ eine Lösung der Laplace-Gleichung (eine *harmonische Funktion*) und kann eindeutig aus ihren Randwerten rekonstruiert werden.

Feld einer Ladungsverteilung in der Nähe einer leitenden Kugel

In (3.17) haben wir mit der Spiegelladungsmethode die Green-Funktion G_D für das Außengebiet einer Kugel vom Radius R bestimmt,

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{R/r'}{|\mathbf{r} - R^2\mathbf{r}'/r'^2|} \right). \quad (3.34)$$

Ihre Normalenableitung auf der Kugeloberfläche ist

$$\frac{\partial G_D}{\partial n'} \Big|_{r'=R} = -\frac{\partial G_D}{\partial r'} \Big|_{r'=R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\xi}{R^2} \frac{\xi^2 - 1}{(1 + \xi^2 - 2\xi \cos \theta')^{3/2}},$$

wobei $\xi = R/r$ und θ' den Winkel zwischen \mathbf{r} und \mathbf{r}' bezeichnen. Mit Hilfe von (3.33) können wir nun das Feld einer Ladungsverteilung außerhalb der Kugel berechnen, wenn wir das Potential

auf der Kugeloberfläche kennen. Für eine leitende Kugel ist $\Phi = \Phi_L$ konstant auf der Oberfläche und wegen

$$\oint df' \frac{\partial G_D}{\partial r'} \Big|_{r'=R} = 2\pi R^2 \oint d\theta' \sin \theta' \frac{\partial G_D}{\partial r'} \Big|_{r'=R} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{R}{r}$$

ist das elektrostatische Potential außerhalb der Kugel

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_V d^3 r' G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') + \frac{R\Phi_L}{r}. \quad (3.35)$$

Es ist äquivalent zum Potential erzeugt von der Ladungsdichte ρ , seiner Spiegelladungsdichte innerhalb der Kugel und einer Punktladung $4\pi\varepsilon_0 R\Phi_L$ im Ursprung.

3.3.2 Neumann-Problem

Ist die Normalenableitung des Potentials auf den Leiterrändern vorgegeben, dann wird man die Neumann-Greenfunktion G_N wählen, für die der zweitletzte Term in (3.32) konstant ist. Wegen des Gaußschen Satzes ist

$$\oint_{\partial V} d\mathbf{f}' \nabla' G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \oint_{\partial V} df' \frac{\partial G_N}{\partial n'} = \int_V d^3 r' \Delta' G_N = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_V d^3 r' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0},$$

falls \mathbf{r} in V liegt, und wir können deshalb nicht verlangen, dass die Normalableitung von G_N am Rand des Gebietes verschwindet. Aber wir können fordern, dass

$$\frac{\partial G_N}{\partial n'} = -\frac{1}{\varepsilon_0 |\partial V|}, \quad |\partial V| = \text{Volumen von } \partial V, \quad (3.36)$$

gilt. Dann vereinfacht sich (3.32) zu

$$\Phi(\mathbf{r}) - \Phi_0 = \int_V d^3 r' G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') + \varepsilon_0 \oint_{\partial V} df' G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Phi}{\partial n'}, \quad (3.37)$$

wobei Φ_0 das über die Leiteroberfläche gemittelte Potential bezeichnet,

$$\Phi_0 = \frac{1}{|\partial V|} \oint_{\partial V} df \Phi(\mathbf{r}). \quad (3.38)$$

Für ideale Leiter gilt (3.6) und das Außenpotential ist durch die Ladungsverteilung ρ außerhalb der Leiter und die Flächenladungsdichten auf den Leiteroberflächen bestimmt,

$$\Phi(\mathbf{r}) - \Phi_0 = \int_V d^3 r' G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') - \oint_{\partial V} df' G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sigma(\mathbf{r}'). \quad (3.39)$$

Für Dielektrika muss man allerdings die allgemeinere Formel (3.37) benutzen.

3.4 Kapazitäten

Wie früher betrachten wir mehrere Leiter eingebettet in das Vakuum. Außerhalb der Leiter seien keine freibeweglichen Ladungsdichten. Die elektrischen Potentiale Φ_{L_i} auf den Leitern $\#i$ seien vorgegeben. Gesucht sind die Ladungen q_i auf den Leitern. Da die Grundgleichungen linear sind, können wir das Potential als Superposition von Fundamentallösungen $\Phi_i(\mathbf{r})$ schreiben

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_i \Phi_{L_i} \Phi_i(\mathbf{r}). \quad (3.40)$$

Dabei ist Φ_i die Lösung, die auf dem i 'ten Leiter den Wert 1 hat und auf den anderen Leitern verschwindet,

$$\Phi_i(\mathbf{r})|_{\partial L_j} = \delta_{ij}. \quad (3.41)$$

Die Ladung auf dem i 'ten Leiter ist dann gegeben durch

$$q_i = -\varepsilon_0 \oint_{\partial L_i} df \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \sum_j C_{ij} \Phi_{L_j} \quad (3.42)$$

mit den *Kapazitätskoeffizienten*

$$C_{ij} = -\varepsilon_0 \oint_{\partial L_i} df \frac{\partial \Phi_j}{\partial n}. \quad (3.43)$$

In diesen Formeln sind die Normalableitungen in Richtung des Raumbereichs V , d.h. weg von den Leitern, zu wählen. Der Koeffizient C_{ij} misst die auf dem i 'ten Leiter induzierte Ladung, wenn alle Leiter, mit Ausnahme des j 'ten, geerdet sind. Die Kapazität ist also eine Ladung je Spannung und die entsprechende Einheit F[arad]=C/V wurde nach Michael Faraday benannt: Ein Kondensator mit einer Kapazität von einem Farad (F) kann durch das Aufladen auf eine Spannung von einem Volt (V) eine Ladung von einem Coulomb (C) speichern. Wäre die Spannung des j 'ten Leiters 1V und die auf dem i 'ten Leiter gespeichert Ladung 1C, dann wäre $C_{ij} = 1 \text{ F}$.

Die elektrostatische Energie der Kapazitäten ergibt sich aus

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V d^3r \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V d^3r \nabla(\Phi \nabla \Phi) = -\frac{\varepsilon_0}{2} \sum_i \oint_{\partial L_i} df \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n}$$

und nimmt eine einfache Form an,

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \Phi_{L_i} q_i = \frac{1}{2} \sum_{ij} \Phi_{L_i} C_{ij} \Phi_{L_j}. \quad (3.44)$$

Als Anwendung berechnen wir nun die Kapazität von Kugel- und Plattenkondensatoren.

3.4.1 Kugelkondensator

Der Kugelkondensator besteht aus einer inneren Kugel mit Radius R_1 und einer äußeren Kugelschale mit Innenradius R_2 . Die Kugel trage die Ladung q und die Kugelschale die entgegengesetzte Ladung $-q$. Im Außenraum und in der Kugelschale verschwindet das Potential, $\Phi_{L_2} = 0$. Im Raum zwischen Kugel und Kugelschale ist

$$\Phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right), \quad R_1 \leq r \leq R_2. \quad (3.45)$$

In der leitenden Kugel ist das Potential konstant

$$\Phi(r) = \Phi_{L_1} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad r \leq R_1. \quad (3.46)$$

Man kann die Ladung q durch die Potentialdifferenz zwischen den Leitern ausdrücken, $q = C(\Phi_{L_1} - \Phi_{L_2})$, wobei C die oben eingeführte Kapazität C_{12} ist. Wegen

$$\Phi_{L_1} - \Phi_{L_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

ist diese gegeben durch

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \quad (3.47)$$

Zur Bestimmung der Kapazität einer isolierten Kugel lassen wir den Radius R_2 der Schale gegen

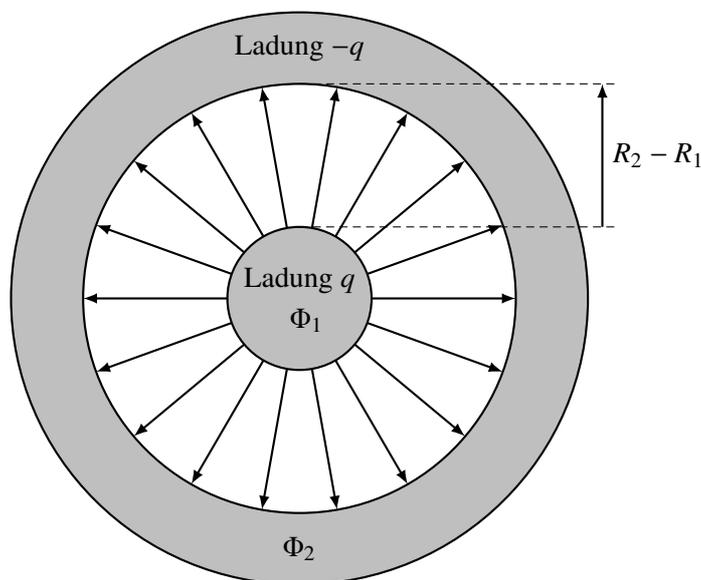


Abbildung 3.9: Zur Kapazität eines Kugelkondensators.

∞ streben und finden für eine Kugel vom Radius $R \equiv R_1$

$$C = 4\pi\epsilon_0 R, \quad 4\pi\epsilon_0 = 1.11 \cdot 10^{-10} \text{ As/Vm}. \quad (3.48)$$

Die Kapazität einer Kugel ist also proportional zu ihrem Radius. Zur Illustration berechnen wir die Kapazität der Erde, die von einem elektrischen Feld umgeben ist. Es ist in ebenem Gelände senkrecht von oben nach unten gerichtet und hat im zeitlichen Mittel den Wert

$$|\mathbf{E}| \approx 130 \text{ Volt/m}.$$

Diese rührt von einer negativen Ladung

$$q = 4\pi\epsilon_0 R^2 |\mathbf{E}| \approx 5.9 \cdot 10^5 \text{ C}$$

auf der Erde, wobei wir für die Erdoberfläche $4\pi R^2$ den Wert $5.1 \cdot 10^{14} \text{ m}^2$ benutzten. Gegenüber dem Fixsternsystem hat unsere Erde mit dem Radius $R = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$ die Kapazität von etwa $700 \mu\text{F}$.

Lassen wir in (3.47) die Radien von Kugel und Kugelschale bei festgehaltener Differenz $R_2 - R_1 = d$ gegen Unendlich streben, dann finden wir die Kapazität

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1^2 + R_1 d}{d} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1^2}{d} \left(1 + \frac{d}{R_1}\right). \quad (3.49)$$

Für große Radien erhält man zwei leitende ebene Platten im Abstand d , d.h. einen *Plattenkondensator* mit Kapazität

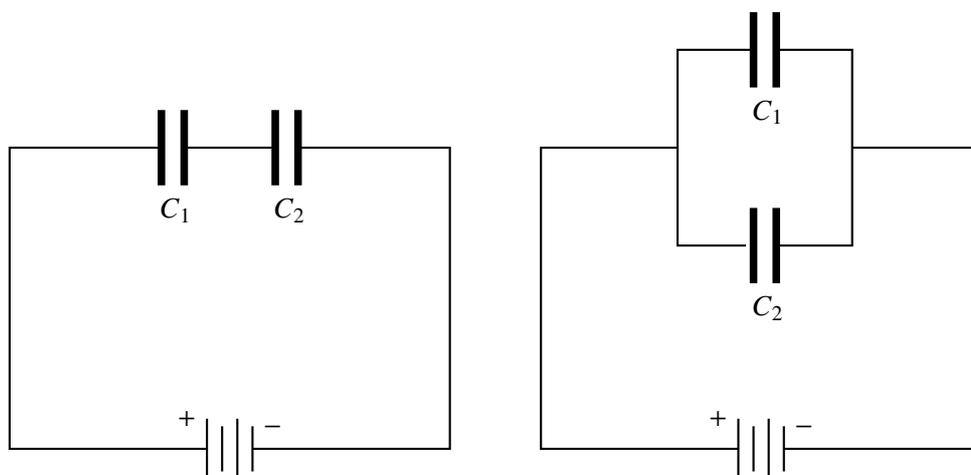
$$C = \epsilon_0 \frac{F}{d}, \quad F = \text{Fläche des Plattenkondensators}. \quad (3.50)$$

Die Zunahme der Kapazität mit der Plattenfläche wird bei Mehrplattenkondensatoren ausgenutzt. Eine Abart ist der abstimmbare Drehkondensator.

Wir notieren noch die Kapazität von zwei langen coaxialen Zylindern mit Radien R_1, R_2 und Länge L ,

$$C = 2\pi\epsilon_0 \frac{L}{\log(R_2/R_1)}. \quad (3.51)$$

Generell nimmt die Kapazität mit der Größe der Leiter zu. Kommen sich die Leiter näher, dann nimmt bei konstantem Feld ihre Potentialdifferenz ab und die Kapazität des Systems nimmt ebenfalls zu. Wir erwarten, dass das Einbringen eines Materials zwischen zwei Platten aufgrund der Influenz ebenfalls die Kapazität des Kondensators erhöht. Wir werden später auf diesen Punkt zurückkommen.



Abschließend notieren wir noch die Kapazität mehrerer Kondensatoren. Sind zwei Kondensatoren wie in der linken Abbildung in Reihe geschaltet, dann tragen beide die gleiche Ladung. Da die Gesamtspannung die Summe der Teilspannungen ist, gilt

$$\frac{1}{C_{\text{Reihe}}} = \frac{V}{q} = \frac{V_1}{q} + \frac{V_2}{q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \implies C_{\text{Reihe}} \leq \min(C_1, C_2). \quad (3.52)$$

Sind sie parallel geschaltet wie auf der rechten Seite der Abbildung, dann sind ihre Spannungen gleich und ihre Ladungen addieren zur Ladung des Systems, also

$$C_{\text{parallel}} = \frac{q_1 + q_2}{V} = C_1 + C_2 \implies C_{\text{parallel}} \geq \max(C_1, C_2). \quad (3.53)$$