Kapitel 2

Einführung in die Elektrostatik

Nach altbewährter Methode kann man elektrische Ladungen erzeugen, indem man zum Beispiel Glas mit einem Seidentuch reibt. Der geriebene Körper zieht ein Kügelchen aus Holundermark an, was vor dem Reiben nicht der Fall war. Diese Erscheinung erklären wir folgendermaßen: Atome bestehen aus einem positiv geladenen kleinen Atomkern[1] und einer um den Kern herum angeordneten Hülle aus negativ geladenen Elektronen. Die positive Ladung des Kerns und die negative Ladung der Hülle sind normalerweise[2] dem Betrage nach gleich groß, so dass Atome insgesamt keine Ladung tragen. Bei manchen Substanzen lassen sich Elektronen der Hülle relativ leicht entfernen. Das geschieht zum Beispiel durch Reiben des Glases mit Seide. Dabei gehen Elektronen vom Glas auf die Seide über, so dass nach dem Reiben das Glas positiv, das Seidentuch aber negativ geladen ist. Reibt man dagegen einen Gummistab mit Katzenfell, so gehen Elektronen vom Fell zum Stab über. Durch Streichen des Glas- und Gummistabes aneinander kann man wieder für einen Ausgleich der Ladungen zwischen beiden Stäben sorgen.

Wir haben hier schon von einem fundamentalen Naturgesetz – *dem Erhaltungssatz für die elektrische Ladung* – Gebrauch gemacht. Nach diesem Gesetz ist die Summe aller elektrischen Ladungen zeitlich konstant. Erzeugt man durch Ladungstrennung und Ladungstransport eine positive Ladung an einem Ort, dann entsteht eine negative Ladung an einem anderen Ort. Wir sehen die Existenz elektrischer Ladungen als gegebene Tatsache an. Die beobachteten Anziehungs-, Abstoßungs- und Wärmewirkungen sind die Folgen der Wechselwirkungen zwischen Ladungen.

2.1 Das Coulombsche Gesetz und Maßsysteme

Zwischen elektrisch geladenen Körpern wirken Kräfte, die vom Ladungszustand abhängen. Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens ziehen sich an, Ladungen gleichen Vorzeichens stoßen sich ab. Für zwei kugelförmige Körper, deren Durchmesser viel kleiner als ihr Abstand ist, ist das Kraftgesetz besonders einfach. Diese Kraft kann man zum Beispiel auf eine Art messen, die in Abb. 2.1 dargestellt ist: Aus den Ablenkungen φ_1 und φ_2 der geladenen Kügelchen aus

[1] Der Durchmesser des Atomkerns beträgt etwa 10^{-13}cm.
[2] Für Ionen fehlen einige Elektronen in der Hülle.

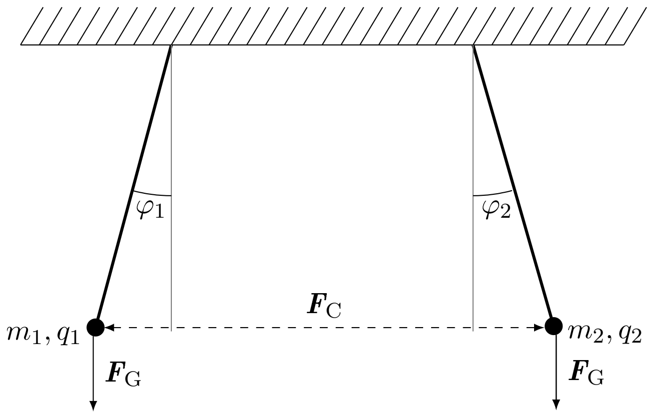

Abbildung 2.1: *Eine Methode zur Bestimmung der Kraft zwischen zwei elektrischen Ladungen.*

ihren Gleichgewichtslagen und ihren Massen kann man die wirkende Kraft $\boldsymbol{F}_C$ berechnen[3]. Die Experimente zeigen, dass die Kraft proportional zu den elektrischen Ladungen q_i und invers proportional zum Quadrat des Abstands $r_{12} = |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|$ der beiden Ladungen ist. Diese *Coulombkraft* wirkt in Richtung der Verbindungslinie der beiden Ladungen. Damit ergibt sich das folgende Kraftgesetz für zwei Punktladungen

$$\boldsymbol{F}_C = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^3} \,. \tag{2.1}$$

Die *Dielektrizitätskonstante* des Vakuums ε_0 bestimmt die Stärke der Wechselwirkung; ihr numerischer Wert hängt von der gewählten Maßeinheit für die Ladungen q_1 und q_2 ab.

Das Coulombgesetz (2.1) ist die Grundlage der *Elektrostatik*, in der man ruhende oder stationäre Ladungsverteilungen betrachtet. Die $1/r^2$-Abhängigkeit der Coulombkraft ist über viele Längenbereiche experimentell bestätigt. Im Zentimeter- bis Meterbereich kann man das Gesetz durch Experimente an makroskopischen geladenen Körpern im Labor direkt nachprüfen. Für mikroskopische Distanzen vergleicht man die Resultate von Streuexperimenten (zum Beispiel ionisierte Heliumkerne an Goldkernen oder Elektronen an Positronen) mit den Vorhersagen der Theorie, welche auf dem Coulombgesetz beruhen[4]. Für astronomische Skalen kann man die planetaren Magnetfelder „ausmessen“, deren Form eng mit dem Coulombgesetz verknüpft ist. Bisher wurde im Längenbereich von 10^{-16}cm bis einigen astronomischen Einheiten keine Abweichung vom Coulombgesetz gefunden.

Für die Coulombkraft gilt das *Superpositionsprinzip*: Die von mehreren Ladungen auf eine gegebene Ladung ausgeübte Kraft ergibt sich als Summe der einzelnen Coulombkräfte zwischen den Ladungen und der gegebenen Ladung. Das Superpositionprinzip gilt nicht für alle Kräfte in der Natur und ist keine Selbstverständlichkeit.

[3] Die elektrische Kraft hält der von der Gravitation herrührenden Rückstellkraft $m_i g \sin\varphi_i$ das Gleichgewicht.
[4] Kommt man einem „Punktteilchen“ näher als seine Comptonwellenlänge, dann hängt seine Ladung vom Abstand ab, $e = e(r)$.

2.1.1 Messung und Einheit der Ladung

Die Ladung kann man zum Beispiel mit dem sogenannten *Blättchenelektroskop*, dargestellt in Abb. 2.2, messen. Die beiden dünnen Aluminium- oder Goldfolienblättchen B_1 und B_2 sind

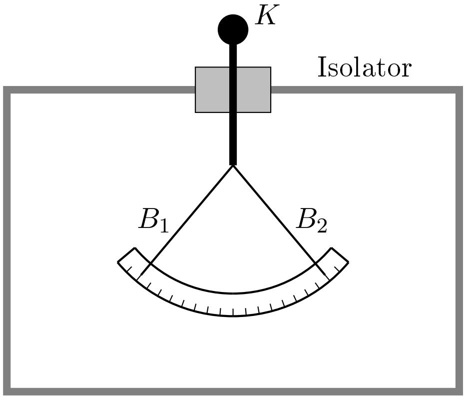

Abbildung 2.2: *Blättchen Elektroskop.*

mit dem metallischen Kopf K leitend verbunden, aber gegen das Gehäuse isoliert. Bringt man elektrische Ladung auf K, so verteilt sich diese auf die beiden Blättchen. Diese stoßen sich gegenseitig ab und spreizen auseinander. Die Abstoßung wird umso größer, je größer die auf K aufgebrachte Ladung ist. Nach einer Eichung der Skala kann man über den Ausschlag der Blättchen die Größe der Ladung messen.

Wie wir schon erwähnten, gilt für die Ladungen der *Erhaltungssatz*: Die Summe der Ladungen eines abgeschlossenen Systems ist erhalten. Des Weiteren treten in der Natur nur quantisierte Ladungen auf. Die Ladung des Protons wird mit $q = e$ und diejenige des Elektrons mit $q = -e$ bezeichnet. Die Ladungen aller Elementarteilchen[5] sind quantisiert. Allerdings spielt die Quantisierung der elektrischen Ladung für makroskopische Körper mit $q \gg e$ keine Rolle.

Erst nach Einführung einer Ladungseinheit oder gleichbedeutend nach Festlegung der Konstanten ε_0 in (2.1) wird die Ladung zur Meßgröße. Es wäre am natürlichsten, das Ladungsquant, also die Ladung des Protons, als Ladung 1 LE zu definieren. Danach wäre die Konstante ε_0 eine bestimmbare Größe der Dimension

$$[\varepsilon_0] = \frac{(\mathrm{LE})^2}{\mathrm{Nm}^2}, \qquad \mathrm{N{=}Newton}, \;\; \mathrm{m{=}Meter}\,.$$

International eingeführt ist allerdings die Ladungseinheit

$$1\ \mathrm{Coulomb} = 1\mathrm{C}\,,$$

[5] Die fundamentalen geladenen Elementarteilchen sind die Leptonen e, μ, τ, die Quarks u, d, c, s, t, b und die Eichbosonen $W^{\pm}$. Das Proton besteht aus zwei up-Quarks und einem down-Quark.

für die Elektrizitätsmenge. Sie wird mit Hilfe pro Zeiteinheit durch einen Leiter fließenden elektrischen Stromes definiert,

$$1 \text{ A} = 1 \text{ Ampere} = 1\text{C/s}\,. \tag{2.2}$$

Diese Definition führt zur Festlegung

$$\varepsilon_0 = 8.854\,187 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}\,. \tag{2.3}$$

Ein Coulomb ist eine enorm große Ladung. Zwei Körper im Abstand von 1m, die je ein Coulomb Ladung tragen, üben eine Kraft von

$$F_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\text{C}^2}{\text{m}^2} \sim 9 \cdot 10^9\,\text{N} \tag{2.4}$$

aufeinander aus.

Es fehlt noch die Festlegung der Stromeinheit. Diese kann über die Kraft zwischen zwei parallelen, unendlich langen und Strom durchflossenen (idealisierten) Drähten im Abstand d bestimmt werden. Fließt durch jeden Draht der Strom $I = \Delta q/\Delta t$, so wirkt auf jedes Drahtstück der Länge Δl die Kraft (siehe später)

$$\frac{\Delta F}{\Delta l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I^2}{d}\,,$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist. Zwei Drähte im Abstand von $d = 1$m, durch die jeweils 1 *Ampere* fließt, erfahren eine Kraft pro Länge von $2 \cdot 10^{-7}$N/m.

Die universelle Elementarladung (z.B. Betrag der Ladung des Elektrons) ist dann

$$e = 1.602\,177\,33(49) \times 10^{-19}\text{C}, \quad \text{Unsicherheit} \quad 0.30 \text{ ppm}\,. \tag{2.5}$$

Neben der Ladungseinheit benutzen wir als mechanische Einheiten für Länge, Masse und Zeit den Meter (m), das Kilogramm (kg) und die Sekunde (s). Die Arbeits- und Leistungseinheiten sind

$$1\,\text{Joule} = 1\text{Nm} = 1\,\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}, \quad 1\,\text{Watt} = 1\,\frac{\text{Joule}}{\text{s}}\,. \tag{2.6}$$

Das Maßsystem mit der Einheit Ampere als vierter Grundeinheit heißt MKSA-System oder SI-System. MKSA steht für Meter, Kilogramm, Sekunde und Ampere und SI für Systeme International d'Unites.

2.2 Das elektrische Feld

Zum Begriff des elektrischen Feldes gelangt man, wenn man nach der *Übertragung der elektrischen Kräfte* von einer Ladung q_1 auf eine andere Ladung q_2 fragt. In der Elektrostatik muss man diese Frage nicht unbedingt stellen. Man kann sich damit begnügen, dass eine Kraft zwischen elektrischen Ladungen wirkt; die Ausbreitung der Kraft ist in der Statik unwesentlich. Geht man allerdings zu zeitlich rasch veränderlichen Ladungs- und Stromverteilungen über[6], so stellt sich die Frage nach der Ausbreitung von Kraft und Energie erneut. Nun kann sie nicht mehr umgangen werden, da sich elektromagnetische Wirkungen mit der endlichen Lichtgeschwindigkeit fortpflanzen. Daher ist es angebracht, schon in der Elektrostatik nach der Art der Kraftübertragung zwischen Ladungen zu fragen. Dies führt uns auf den Begriff der elektrischen Feldstärke, oft nur elektrisches Feld genannt. Vom Feldwirkungsstandpunkt aus müssen wir uns eine von den Ladungszentren ausgehende Erregung des umgebenden Raumes vorstellen.

Wir definieren das elektrische Feld $\boldsymbol{E}$ über die auf einen (möglichst kleinen) geladenen Probekörper ausgeübte Kraft, geteilt durch die Ladung des Probekörpers,

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \lim_{q\to 0} \frac{1}{q}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\,. \tag{2.7}$$

Das elektrische Feld variiert von Ort zu Ort nach Richtung und Größe. Durch den Grenzfall $q \to 0$ wird erreicht, dass die Probeladung die vorhandenen Ladungen nicht stört, z.B. in diesen keine Polarisation der elektrischen Ladung hervorruft.

Die Dimension des elektrischen Feldes ist

$$[\boldsymbol{E}] = \mathrm{N/C}\,. \tag{2.8}$$

Wenn wir der Richtung von $\boldsymbol{E}$ folgen, durchlaufen wir eine *elektrische Kraftlinie bzw. Feldlinie.* Man kann das Feldlinienbild festlegen, indem man von jeder positiven Ladungseinheit eine Feldlinie ausgehen lässt. Entsprechend endet an jeder negativen Ladungseinheit eine Feldlinie. Dann ist die Dichte der Feldlinien proportional zur elektrischen Feldstärke.

Nun bewegen wir eine Probeladung q längs eines die Punkte $\boldsymbol{r}_1$ und $\boldsymbol{r}_2$ verbindenden Weges C. Die auf dem kleinen Wegstück $d\boldsymbol{r}$ vom Feld an der Probeladung verrichtete Arbeit ist gleich dr multipliziert mit der Kraft $q|\boldsymbol{E}|$ in Richtung des Weges, also gleich $q\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}$. Der Ausdruck ist positiv, wenn eine positive Ladung in Richtung von $\boldsymbol{E}$ bewegt wird, wobei also Arbeit nach außen gewonnen wird. Für ein ortsabhängiges $\boldsymbol{E}$ ist die *gewonnene Arbeit* bei der Bewegung einer Ladung durch das Linienintegral

$$q\int_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} = q\int_{s_1}^{s_2} \boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{r}(s)\right)\cdot \dot{\boldsymbol{r}}(s)\,ds \equiv qV \tag{2.9}$$

gegeben. Hier durchläuft $\boldsymbol{r}(s)$ die Kurve C, welche den Anfangspunkt $\boldsymbol{r}_1$ mit dem Endpunkt $\boldsymbol{r}_2$ der Bewegung verbindet, also $\boldsymbol{r}(s_1) = \boldsymbol{r}_1$ und $\boldsymbol{r}(s_2) = \boldsymbol{r}_2$. Wir nennen das Linienintegral V die *Spannung.* Zur Berechnung der Spannung muss neben den Endpunkten auch der verbindende Weg bekannt sein. Nur in wirbelfreien Feldern mit $\nabla\times\boldsymbol{E} = 0$ ist nach dem Stokesschen Satz das Linienintegral und damit die Arbeit im elektrischen Feld unabhängig vom Weg. Dann sagen wir statt Spannung auch *Potentialdifferenz* zwischen den Punkten $\boldsymbol{r}_1$ und $\boldsymbol{r}_2$. Die Einheit der

[6] Siehe Kapitel 5

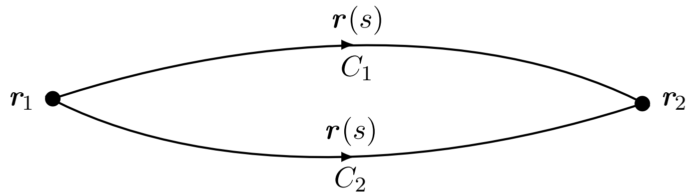

Abbildung 2.3: *Die Spannung hängt vom Weg ab.*

Spannung im SI-Einheitensystem ist

$$[V] = \mathrm{J/C}\,. \tag{2.10}$$

Nun betrachten wir N Punktladungen $q_1, \dots, q_N$, die an den Orten $\boldsymbol{r}_1, \dots, \boldsymbol{r}_N$ ruhen. Nach dem Superpositionsprinzip[7] ist eine Punktladung q am Orte $\boldsymbol{r}$ der Kraft

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|^3} = q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

ausgesetzt. Entsprechend ist das elektrische Feld von N Punktladungen gleich

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|^3}\,. \tag{2.11}$$

Das Feld einer positiv geladenen Punktladung in in Abb. 2.4 dargestellt. Ebenfalls gezeigt sind

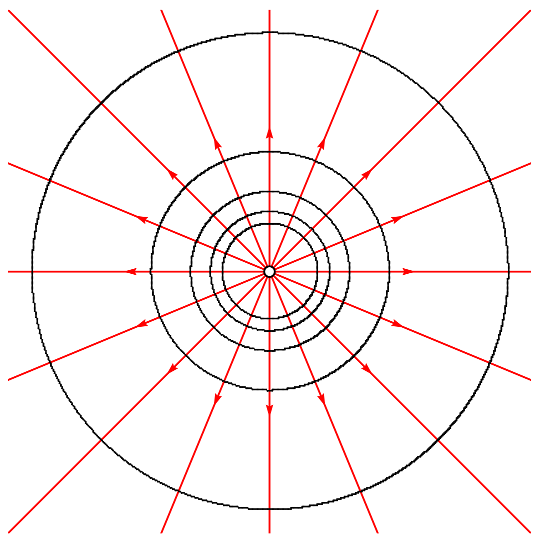

Abbildung 2.4: *Äquipotentialflächen und elektrisches Feld einer Punktladung.*

[7] Für Punktladungen treten keine Polarisationseffekte auf.

die Äquipotentialflächen, die auf den folgenden Seiten eingeführt werden. Abbildung 2.5 zeigt dagegen die Äquipotentialflächen und das elektrische Feld für zwei entgegengesetzt geladene bzw. zwei gleich geladene Punktteilchen.

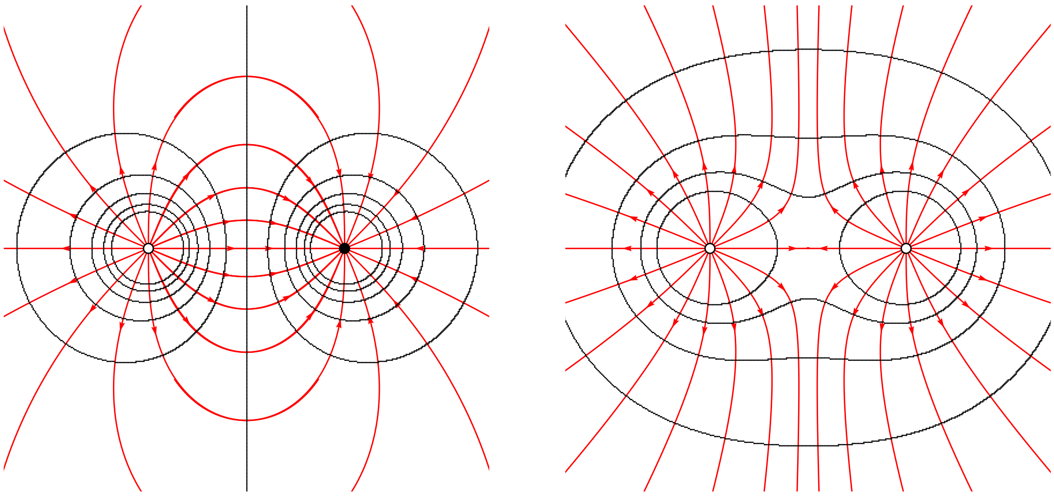

Abbildung 2.5: *Äquipotentialflächen und elektrisches Feld für zwei entgegengesetzt geladene (links) und zwei gleich geladene Teilchen (rechts).*

Das elektrische Feld (2.11) ist der Gradient einer Funktion Φ und seine Quellen sind an den Orten der Punktladungen lokalisiert. Um dies einzusehen, benutzen wir die Formeln

$$\begin{aligned} \nabla \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} &= -\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3} \\ \nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3} &= -\Delta\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} = 4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\,. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Gradient, Divergenz und Rotation sind lineare Operationen und deshalb folgt

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\Phi(\boldsymbol{r}), \qquad \Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|}\,.$$

Da ein Gradientenfeld immer wirbelfrei ist, impliziert dieses Resultat

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = 0 \quad \text{und} \quad \nabla\cdot\boldsymbol{E} = -\Delta\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)\,. \tag{2.13}$$

Wegen $\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi$ hängt die Spannung längs eines Weges $C: \boldsymbol{r}_1 \to \boldsymbol{r}_2$ nur von den Endpunkten ab

$$V \equiv \int_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_C \nabla\Phi\cdot d\boldsymbol{r} = \Phi(\boldsymbol{r}_1) - \Phi(\boldsymbol{r}_2) \tag{2.14}$$

und wird zu einer Potentialdifferenz. Entsprechend hängt die bei der Bewegung einer Probeladung *zu leistende Arbeit* ebenfalls nur von dem Anfangs- und Endpunkt ab,

$$A = -q \int_C \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} = q\Phi(\boldsymbol{r}_2) - q\Phi(\boldsymbol{r}_1)\,. \tag{2.15}$$

Bewegt man eine Ladung längs einer beliebigen, geschlossenen Kurve, dann verschwindet die Arbeit. Also ist für Coulombfelder die *elektrische Ringspannung* gleich Null,

$$0 = \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r}\,. \tag{2.16}$$

Bewegt sich eine Ladung allein unter der Kraftwirkung des Feldes, gilt also für den Probekörper mit der Masse m die Bewegungsgleichung[8]

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = q\boldsymbol{E}\,, \tag{2.17}$$

so wird die dem Feld entnommene Arbeit wegen des Energiesatzes gleich der Zunahme der kinetischen Energie des Körpers sein,

$$\frac{m\boldsymbol{v}_2^2}{2} - \frac{m\boldsymbol{v}_1^2}{2} = q\Phi(\boldsymbol{r}_1) - q\Phi(\boldsymbol{r}_2)\,. \tag{2.18}$$

Hier bezeichnen $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ die Anfangs- und Endgeschwindigkeit des Probekörpers. Deshalb gibt man die kinetische Energie, die ein geladenes und anfangs ruhendes Teilchen beim Durchlaufen einer bestimmten Strecke erhält, meist unmittelbar durch das Produkt aus Ladung und durchlaufener Spannung an. Ein Proton hat die kinetische Energie von 1 KeV, wenn die Spannungsdifferenz zwischen Anfangs- und Endort 1000 Volt beträgt.

Die Feldlinien schneiden die *Äquipotentialflächen*, auf denen das elektrostatische Potential Φ konstant ist, orthogonal. Zum Beweis betrachten wir eine Kurve $\boldsymbol{r}(s)$ in einer solchen Fläche. Dann ist $\Phi(\boldsymbol{r}(s))$ konstant und entsprechend gilt

$$0 = \frac{d}{ds}\Phi(\boldsymbol{r}(s)) = \nabla\Phi(\boldsymbol{r}(s)) \cdot \dot{\boldsymbol{r}}(s) = -\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}(s)) \cdot \dot{\boldsymbol{r}}(s)\,.$$

Daher ist das elektrische Feld orthogonal zu allen Tangentialvektoren an die Fläche, d.h. orthogonal zur Äquipotentialfläche. Bei der Bewegung einer Probeladung auf einer festen Äquipotentialfläche wird also weder Arbeit verrichtet noch gewonnen.

Wir benutzen nun die Gaußsche Integralformel, um den Fluss des elektrischen Feldes durch die Oberfläche ∂V eines beliebig gewählten Raumgebiets V mit der im Gebiet enthaltenen Ladung in Verbindung zu bringen. Sei also $\boldsymbol{n}$ das nach außen gerichtete Einheitsfeld orthogonal zu ∂V

[8] Bezüglich der Verhältnisse bei hohen Geschwindigkeiten verweise ich auf das Kapitel über die relativistische Mechanik.

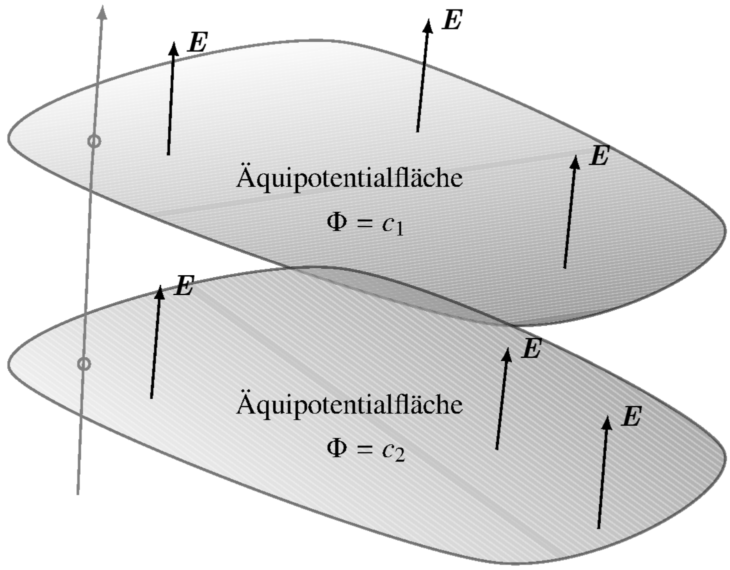

Abbildung 2.6: *Die Flusslinien schneiden die Äquipotentialflächen orthogonal.*

und $d\boldsymbol{f} = \boldsymbol{n}df$ das gerichtete Oberflächenelement,

$$\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{f} = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,df = E_n df, \quad E_n = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,,$$

dann ist nach dem Gaußschen Satz

$$\oint_{\partial V}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{f} = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{E}\;d^3r = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i\int_V \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)\,d^3r\,.$$

Nach Definition der Dirac'schen Delta-Distribution ist das letzte Integral gleich 1, wenn die Ladung q_i in V liegt und es verschwindet, wenn sie außerhalb liegt. Folglich erhalten wir

$$\oint_{\partial V}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{f} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i:\boldsymbol{r}_i\in V} q_i = \frac{1}{\varepsilon_0}\,q(V)\,, \tag{2.19}$$

wobei $q(V)$ die gesamte in V enthaltene elektrische Ladung bezeichnet. Der gesamte durch ∂V strömende Fluss der elektrischen Feldstärke, oft als *elektrischer Kraftfluss* bezeichnet, ist demnach proportional zur Ladung in V.

Wie sieht nun das elektrische Feld einer beliebigen Ladungsdichte $\rho(\boldsymbol{r})$ aus? Die elektrische Ladungsdichte ist so definiert, dass für jedes Raumgebiet V

$$q(V) = \int_V \rho(\boldsymbol{r})\,d^3r \tag{2.20}$$

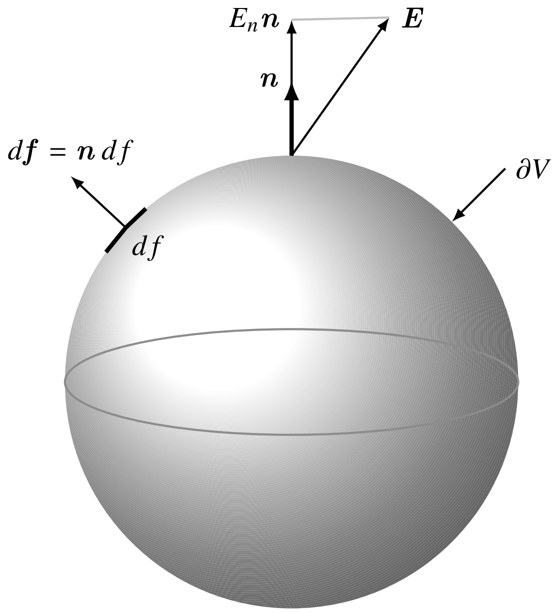

Abbildung 2.7: *Der Fluss des elektrischen Feldes durch ∂V misst die Ladung in V.*

die in V enthaltene Ladung ist. Wir zerlegen V in viele kleine disjunkte Teilgebiete,

$$V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_N, \qquad V_i \cap V_j = \emptyset \quad \text{für} \quad i \neq j\,,$$

und schreiben die Ladung $q(V)$ als Summe der Ladungen in den Teilgebieten

$$q(V) = \sum_i q(V_i) = \sum_i \int\limits_{V_i} \rho(\boldsymbol{r}) d^3r\,.$$

Wir wählen die Volumen der Teilgebiete V_i so klein, dass die darin enthaltenen Ladungen $q(V_i)$ als Punktladungen betrachtet werden können. Dies setzt voraus, dass der Ort $\boldsymbol{r}$, wo das elektrische Feld gemessen wird, weit weg von V_i ist. Etwas genauer: Ist $\boldsymbol{r}_i \in V_i$ und d_i der „Durchmesser" von V_i, dann muss $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i| \gg d_i$ gelten.

Nach dem Superpositionsprinzip ist das elektrische Feld aller „Punktladungen" $q(V_i)$ gleich der Summe der elektrischen Felder der einzelnen „Punktladungen", $\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi$ mit

$$\Phi(\boldsymbol{r}) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q(V_i)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \int\limits_{V_i} \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|} d^3r' \quad \text{für} \quad d_i \ll |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|\,.$$

Nun machen wir den Grenzübergang $|V_i| \to 0$, wobei die $q(V_i)$ in der Tat zu Punktladungen werden, und erinnern uns daran, dass $\boldsymbol{r}_i$ in V_i liegt. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung konvergiert die Riemannsche Summe gegen das entsprechende Integral und wir erhalten

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\, d^3r' \,. \tag{2.21}$$

Die obige Bedingung $d_i \ll |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|$ bedeutet nun, dass $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}'$ gelten muss. Wir wollen noch einsehen, dass wir für stetige Ladungsdichten diese Einschränkung fallen lassen können. Dazu bestimmen wir den Beitrag der Ladungen in der Umgebung des Ortes $\boldsymbol{r}$ zum Integral (2.21). Wir dürfen $\boldsymbol{r}=0$ annehmen und als Umgebung V_ε eine Kugel mit Radius ε um $\boldsymbol{r}=0$ wählen. Für stetige ρ können wir den Mittelwertsatz der Integralrechnung anwenden und finden

$$\int_{V_\varepsilon} \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{r'} d^3r' = \rho(\bar{\boldsymbol{r}}) \int_{V_\varepsilon} \frac{1}{r'} d^3r' = 4\pi\rho(\bar{\boldsymbol{r}}) \int_0^\varepsilon dr' r' = 2\pi\rho(\bar{\boldsymbol{r}})\varepsilon^2 \,,$$

wobei $\bar{\boldsymbol{r}} \in V_\varepsilon$ ist und r' die Länge von $\boldsymbol{r}'$ bezeichnet. Verkleinern wir die Umgebung, d.h lassen wir $\varepsilon \to 0$ streben, dann erhalten wir keinen Beitrag dieser Umgebung zum Integral für $\Phi(0)$. Also dürfen wir die Einschränkung $\boldsymbol{r} \notin V$ im Integral (2.21) für Φ oder im entsprechenden Integral für $\boldsymbol{E}$ aufgeben,

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r'\, \rho(\boldsymbol{r}') \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \,. \tag{2.22}$$

Die Ladungsdichte von N Punktladungen an den Orten $\boldsymbol{r}_i$ ist offensichtlich

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i) \,. \tag{2.23}$$

Für diese unstetige Verteilung liefert das Integral (2.21)

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \int_V d^3r'\; q_i \frac{\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|} \,, \tag{2.24}$$

das korrekte elektrische Coulomb-Potential für Punktladungen. Deshalb sind (2.21,2.22) die Verallgemeinerung des Coulombgesetzes für Punktladungen auf beliebige Ladungsverteilungen. Für beliebige Ladungsverteilungen ist das elektrische Feld ein Gradientenfeld und damit verschwinden alle elektrischen Ringspannungen,

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} = 0 \quad \text{für alle geschlossenen Wege.} \tag{2.25}$$

Dies bedeutet insbesondere, dass es in der Elektrostatik *keine geschlossenen Feldlinien* gibt. Gäbe es nämlich nur eine geschlossene Feldlinie, so wäre bei der Führung einer Testladung entlang dieser Linie die Arbeit ungleich Null.

2.3 Feldgleichungen der Elektrostatik

Das elektrische Feld $\boldsymbol{E}$ ist durch sein Wirbelfeld $\nabla\times\boldsymbol{E}$ und sein Quellenfeld $\nabla\cdot\boldsymbol{E}$ bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt. Für Punktladungen ist es wirbelfrei mit Quellen an den Positionen der Punktladungen. Wegen des Superpositionsprinzipes gelten diese Aussagen auch für beliebige Ladungsverteilungen $\rho(\boldsymbol{r})$. Davon wollen wir uns aber noch direkt überzeugen. Für beliebige Ladungsdichten ist das elektrische Feld durch das Integral (2.22) eindeutig bestimmt und wir wählen diese Integraldarstellung als Ausgangspunkt. Wegen $\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi$ ist $\boldsymbol{E}$ wirbelfrei,

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=0\,. \tag{2.26}$$

Für das Quellenfeld finden wir

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=-\Delta\Phi(\boldsymbol{r})&=-\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\,\rho(\boldsymbol{r}')\Delta\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\\&=\frac{1}{\varepsilon_0}\int d^3r'\rho(\boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r})\,.\end{aligned}$$

Damit finden wir als zweite Bestimmungsgleichung für $\boldsymbol{E}$ die partielle Differentialgleichung

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\,. \tag{2.27}$$

Die Gleichungen (2.26,2.27) sind die *Feldgleichungen der Elektrostatik.* Die erste Gleichung (2.26) heißt auch homogene Gleichung, die zweite Gleichung (2.27) wegen des Quellterms auf der rechten Seite inhomogene Gleichung. Diese Feldgleichungen sind partielle Differentialgleichungen, die das Feld lokal bestimmen[9]. Das Grundproblem der Elektrostatik ist, aus einer gegebenen Ladungsverteilung $\rho(\boldsymbol{r})$ das Feld $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ zu berechnen.

In einigen Darstellungen der Elektrostatik werden diese beiden Grundgleichungen in den Vordergrund gestellt. Aus ihnen kann man natürlich wieder die allgemeine Lösung konstruieren: Jedes wirbelfreie Vektorfeld ist ein Gradientenfeld, d.h. es gibt ein Potential Φ mit $\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi$. Damit wäre die homogene Feldgleichung bereits gelöst. Setzen wir diese Lösung der homogenen Gleichung in die inhomogene Gleichung (2.27) ein, so erhalten wir die wichtige *Poisson-Gleichung*

$$-\Delta\Phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r})\,. \tag{2.28}$$

Um diese inhomogene elliptische partielle Differentialgleichung zu lösen, beschafft man sich zuerst eine Greenfunktion von $-\Delta$, d.h. eine Funktion $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$, welche

$$-\Delta G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{2.29}$$

[9] für eine eindeutige Festlegung der Lösung benötigt man noch die Randbedingungen, siehe unten.

erfüllt. Eine Greenfunktion ist also eine Lösung von (2.28) für eine Punktquelle der Ladung 1. Vermittels der Greenfunktion kann man nun eine Lösung von (2.28) konstruieren,

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \int d^3r' G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\,. \tag{2.30}$$

Dies ist leicht zu beweisen,

$$-\Delta\Phi(\boldsymbol{r}) = -\int d^3r' \Delta G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}') = \frac{1}{\varepsilon_0}\int d^3r' \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}') = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r})\,.$$

Von unseren obigen Resultaten über das Potential wissen wir natürlich bereits, dass

$$G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \tag{2.31}$$

das Potential für eine Punktladung, und damit eine Greenfunktion ist. Deshalb ist eine Lösung von (2.28)

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\,. \tag{2.32}$$

Dies ist allerdings noch nicht die allgemeine Lösung von (2.28). Um eine solche zu finden, müssen wir eine allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $\Delta\Phi_h = 0$ zu Φ addieren. Damit lautet die allgemeine Lösung von (2.28)

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} + \Phi_h(\boldsymbol{r}), \qquad \Delta\Phi_h = 0\,. \tag{2.33}$$

Die harmonische Funktion Φ_h wird durch die physikalischen Randbedingungen eindeutig bestimmt.

Wir fassen zusammen: Die differentiellen *Grundgleichungen der Elektrostatik* lauten

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \quad \text{und} \quad \nabla \times \boldsymbol{E} = 0\,. \tag{2.34}$$

Diese sind äquivalent zu den Integralformen

$$\oint_{\partial V} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{f} = \frac{1}{\varepsilon_0}q(V) \quad \text{und} \quad \oint \boldsymbol{E} d\boldsymbol{r} = 0\,. \tag{2.35}$$

Die homogene Gleichung in (2.34) wird durch Einführung des Potentials Φ gelöst. Die verbleibende inhomogene Gleichung für Φ ist die Poisson-Gleichung mit der Lösung (2.33).

2.3.1 Feld einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung

Wir werden nun das Potential und das elektrische Feld einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \rho(r) \Longrightarrow q = 4\pi\int_0^\infty \rho(r) r^2 dr, \quad r = |\boldsymbol{r}|\,, \tag{2.36}$$

bestimmen. Aus Symmetriegründen weist das elektrische Feld in Normalenrichtung $\boldsymbol{E} = E_r(r)\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$. Die erste Gleichung in (2.35) vereinfacht sich zu

$$4\pi r^2 E_r(r) = \frac{q(r)}{\varepsilon_0}, \quad q(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r')r'^2 dr' \,,$$

so dass man für das elektrische Feld die Bestimmungsgleichung

$$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q(r)}{r^2} \tag{2.37}$$

erhält, wobei $q(r)$ die Ladung innerhalb einer (gedachten) Kugel vom Radius r bezeichnet. Insbesondere für eine homogen geladene Kugel mit Ladungsdichte

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & \text{für } r = |\boldsymbol{r}| < R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$$

gilt $q(r) = (r/R)^3 q$ für $r < R$ und $q(r) = q$ für $r > R$. Dabei bezeichnet q die Gesamtladung der Kugel. Deshalb ist das elektrische Feld

$$E_r(r) = \begin{cases} qr/(4\pi\varepsilon_0 R^3) & r < R \\ q/(4\pi\varepsilon_0 r^2) & r > R \,. \end{cases} \tag{2.38}$$

Das Potential Φ hängt aus Symmetriegründen ebenfalls nur vom Radius ab und

$$E_r(r) = -\frac{d\Phi(r)}{dr} \,. \tag{2.39}$$

Die Lösung außerhalb der Kugel ist

$$\Phi(r > R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r} \,, \tag{2.40}$$

wobei die Integrationskonstante wegen unserer Normierungsbedingung $\Phi(\infty) = 0$ wegfällt. Außerhalb der Kugel ändert sich das Feld nicht, wenn wir bei gleich bleibender Ladung die Kugel verkleinern. Das Feld ist *identisch zum Feld einer Punktladung im Kugelzentrum.* Innerhalb der Kugel ist

$$\Phi(r < R) = -\frac{1}{6\varepsilon_0}\rho_0 r^2 + c = -\frac{q}{8\pi\varepsilon_0} \frac{r^2}{R^3} + c \,. \tag{2.41}$$

Für beschränkte Ladungsdichten ist das elektrische Feld stetig und entsprechend das Potential differenzierbar. Dies legt die Integrationskonstante c fest und wir erhalten

$$\Phi(r < R) = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) \,. \tag{2.42}$$

Die Ladungsverteilung, das elektrische Feld und Potential einer homogen geladenen Kugel sind in der Abbildung 2.8 gezeigt.

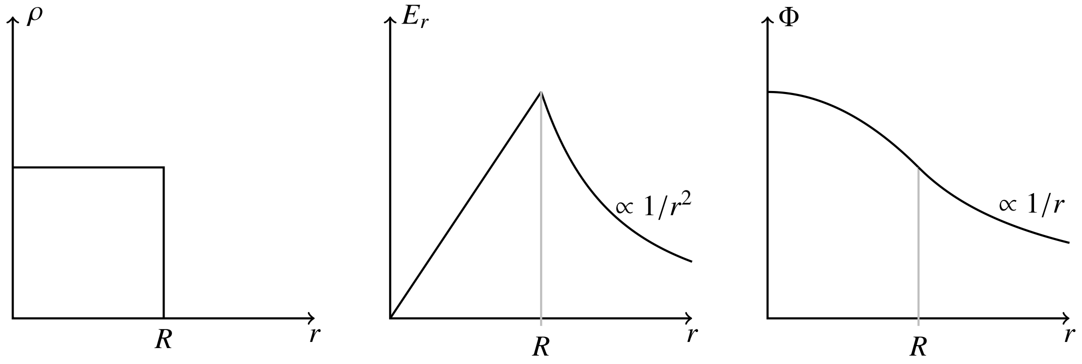

Abbildung 2.8: *Ladungsverteilung $\rho(r)$, Feldstärke $E_r(r)$ und Potential $\Phi(r)$ einer homogen geladenen Kugel.*

Ist dagegen die Ladung gleichmäßig auf einer (unendlich dünnen) *Kugelschale* vom Radius R verteilt, wie es bei idealen Leitern der Fall ist, dann findet man mit der ersten Gleichung in (2.35) ein verschwindendes Innenfeld,

$$E_r(r) = \begin{cases} 0 & r < R \\ q/(4\pi\varepsilon_0 r^2) & r > R. \end{cases} \tag{2.43}$$

Mit Messungen außerhalb der Kugel kann man nicht entscheiden, ob die Ladungen in der Kugel homogen verteilt sind oder gleichmäßig auf der Kugeloberfläche sitzen.

2.4 Energie des elektrostatischen Feldes

Wir wollen zuerst die Frage beantworten, was die Energie eines geladenen Testteilchens in einem gegebenen elektrischen Feld ist. Wir nehmen an, das elektrische Feld sei lokalisiert. Dann dürfen wir das elektrostatische Potential im Unendlichen auf Null normieren, $\Phi(r \to \infty) = 0$. Wir bringen eine Testladung aus dem Unendlichen an den Ort $\boldsymbol{r}$. Dabei müssen wir die Arbeit

$$A = -\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = q\Phi_{\text{ext}}(\boldsymbol{r}) \tag{2.44}$$

verrichten. Hier ist C irgendein Weg, der aus dem Unendlichen nach $\boldsymbol{r}$ führt. Nun bewegen wir N Testladungen[10] aus dem Unendlichen an die Orte $\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N$. Die verrichtete Arbeit ist

$$A = \sum_{i=1}^{N} q_i \Phi_{\text{ext}}(\boldsymbol{r}_i) = \sum_i q(V_i)\Phi_{\text{ext}}(\boldsymbol{r}_i) = \sum_i \int_{V_i} d^3r\, \rho(\boldsymbol{r})\Phi_{\text{ext}}(\boldsymbol{r}_i)\,.$$

Hier ist V_i ein kleines Volumen, das genau die Ladung am Ort $\boldsymbol{r}_i$ enthält. Da $\boldsymbol{r}_i$ in V_i liegt, erhalten wir im Grenzfall einer Ladungsverteilung für die Energie dieser Ladungsverteilung in einem *äußeren elektrischen Feld*

$$U = A = \int d^3r\, \rho(\boldsymbol{r})\Phi_{\text{ext}}(\boldsymbol{r})\,. \tag{2.45}$$

Für eine Punktladung ist dieses Resultat identisch mit (2.44).

Nun wollen wir uns von der Testteilchenapproximation lösen und bestimmen die elektrostatische Energie einer Ladungsverteilung in ihrem eigenen Feld. Dazu bringen wir zuerst die Ladung q_2

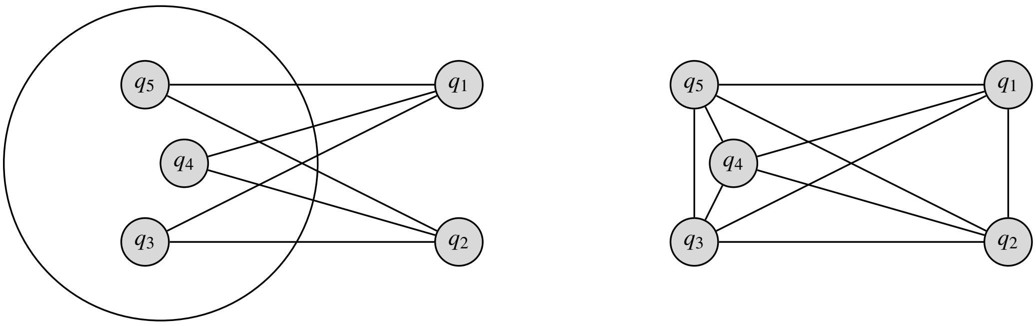

Abbildung 2.9: *Energie von Testteilchen im äußeren Feld (linkes Bild) und Gesamtenergie von wechselwirkenden geladenen Teilchen (rechtes Bild).*

aus dem Unendlichen in die Nähe von q_1, danach q_3 aus dem Unendlichen in die Nähe von q_1 und q_2 usf. Es sei $U(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N)$ die Energie von N Punktladungen, die an den Orten $\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N$ ruhen. Nun transportieren wir eine weitere Punktladung q_{N+1} aus dem Unendlichen in die Nähe der vorhandenen N Punktladungen. Die Energie des aus $N+1$ Teilchen bestehenden Systems ist dann

$$U(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_{N+1}) = U(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N) + \frac{q_{N+1}}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{N+1}|}\,.$$

Mit $U_1 = 0$ können wir diese Induktionsformel lösen und finden

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i<j} \frac{q_i q_j}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{i\neq j} \frac{q_i q_j}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|}\,. \tag{2.46}$$

[10] Die Ladungen der Teilchen seien so klein, dass sie weder das gegebene elektrische Feld ändern noch gegenseitig wechselwirken.

Um die Energie einer kontinuierlichen Ladungsverteilung ρ zu finden, teilen wir das Gebiet V, welches die Ladungen enthält, in kleine Teilgebiete V_i auf. Wie früher sei $q(V_i)$ die in V_i enthaltene Ladung. Wir dürfen $q(V_i)$ als Punktladung behandeln und obiges Resultat anwenden. Dies führt auf

$$\begin{aligned} U &\approx \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{i\neq j}\frac{q(V_i)q(V_j)}{|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{i\neq j}\frac{\int_{V_i} d^3r\rho(\boldsymbol{r})\int_{V_j} d^3r'\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|} \\ &\approx \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\int d^3r\int d^3r'\,\frac{\rho(\boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Lassen wir die Volumen der Teilgebiete gegen Null streben, dann wird das Resultat exakt, solange die Ladungsverteilungen stetig sind.

Mit (2.32) wird (2.47) zu

$$U = \frac{1}{2}\int d^3r\;\Phi(\boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r})\,. \tag{2.48}$$

Im Gegensatz zu (2.45) ist hier Φ das durch ρ erzeugte Potential und nicht ein externes Potential; dieser Unterschied führt zu dem relativen Faktor 1/2 verglichen mit (2.45).

Zur weiteren Umformung der Energie benutzen wir die Poisson-Gleichung $\Delta\Phi = -\rho/\varepsilon_0$:

$$U = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r\;\Phi\Delta\Phi = \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r\;\nabla\Phi\cdot\nabla\Phi = \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r\;\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}\,. \tag{2.49}$$

Hier haben wir die bei der partiellen Integration auftretenden Randterme vernachlässigt. Dies ist für lokalisierte Ladungsverteilungen erlaubt. Die Form (2.49) legt nahe,

$$u(\boldsymbol{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2}|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2 \tag{2.50}$$

als *Energiedichte* des elektrischen Feldes zu interpretieren.

2.4.1 Probleme mit der Selbstenergie

Für unstetige Verteilungen macht (2.47) im Allgemeinen keinen Sinn. Zum Beispiel folgt für Punktladungen aus (2.47) die Formel (2.46), aber ohne die Einschränkung $i \neq j$ in der Summe. Damit ist die Energie *einer* Punktladung in ihrem eigenen Feld schon unendlich. Um eine Punktladung zu erzeugen, braucht es in der klassischen Elektrodynamik unendlich viel Energie. Dieses Problem der *unendlichen Selbstenergie* taucht im modifizierten Gewand in der Quantentheorie des elektromagnetischen Feldes wieder auf.

Das Problem kann anhand der homogen geladenen *Kugel* studiert werden. Die Energiedichte des Feldes (2.38) ist

$$u(r) = \begin{cases} (qr/4\pi\varepsilon_0 R^3)^2 & \text{r<R} \\ (q/4\pi\varepsilon_0 r^2)^2 & \text{r>R} \end{cases}$$

und entsprechend ist die Feldenergie

$$U = 2\pi\varepsilon_0 \int u(r) r^2 dr = \frac{3}{5}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}\;. \tag{2.51}$$

Für eine punktförmige Kugel $R \to 0$ divergiert die Selbstenergie der geladenen Kugel.
Für eine homogen geladene *Kugelschale* ist die Feldenergie

$$U = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{q^2}{r^4} r^2 dr = \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}\,. \tag{2.52}$$

Genauso wie für die homogen geladene Kugel divergiert die Feldenergie für $R \to 0$. Sie ist gleich der Ruheenergie des Elektrons, $U = m_e c^2$, wenn

$$R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{2m_e c^2} = 1.4 \cdot 10^{-13}\mathrm{cm}\,. \tag{2.53}$$

Das Doppelte von R bezeichnet man als *klassischen Elektronenradius*,

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2} = 2{,}818\,375\,516\,10^{-15}\ \mathrm{m}. \tag{2.54}$$