

Kapitel 12

Erzeugung und Abstrahlung von Wellen

Bisher haben wir die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen diskutiert, ihre Erzeugung durch zeitabhängige Ladungs- und Stromverteilungen dagegen noch ausgespart. Der letzte Aspekt soll im vorliegenden Kapitel untersucht werden. Dazu erinnern wir daran, dass in der Lorenz-Eichung das elektromagnetische Potential die inhomogene Wellengleichung

$$\square A^\mu(x) = \mu_0 j^\mu(x), \quad (12.1)$$

löst. Dabei werden die Ladungsdichte $j^0 = c\rho$ und Stromdichte \mathbf{j} als gegeben vorausgesetzt. Als Anwendung werden wir die Abstrahlung einer lokalisierten Quelle sowie die Felder und Strahlung bewegter Punktladungen behandeln.

12.1 Inhomogene Wellengleichung

Wir wollen das Feld von beliebig bewegten Ladungen im sonst leeren Raum untersuchen. Die Ladungs- und Stromdichte sind willkürlich vorgegebene Funktionen der Raumzeit-Koordinaten und wir haben es in der Lorenz-Eichung mit der Gleichung (12.1) zu tun. Die *formale Lösung* dieser partiellen Differentialgleichung ist

$$A^\mu = \mu_0 \frac{1}{\square} j^\mu. \quad (12.2)$$

Formal deshalb, weil die homogene Wellengleichung Lösungen hat und damit der Wellenoperator \square nicht ohne Weiteres invertierbar ist. Im Folgenden wollen wir, unter Zuhilfenahme von physikalischen Bedingungen, das „Inverse des Wellenoperators“ bestimmen.

Eine partikuläre Lösung wird mit der Methode der Green'schen Funktion (Georg Green, 1799-1841) unter Berücksichtigung von „physikalischen Randbedingungen“ bestimmt. Eine *Green'sche Funktion* $G(x, x')$ der Wellengleichung löst die Wellengleichung für eine *instantane Punktquelle*

am Raumzeit-Punkt x' :

$$\square G(x, x') = \delta^4(x - x'). \quad (12.3)$$

Hier steht auf der rechten Seite die 4-dimensionale Delta-Distribution in der Raumzeit

$$\delta^4(x - x') = \delta(ct - ct')\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{c}\delta(t - t')\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (12.4)$$

Wegen der Homogenität der Raumzeit darf sich die Green'sche Funktion bei gleichzeitiger Verschiebung von Aufpunkt x und Quellpunkt x' in der Raumzeit nicht ändern. Sie kann daher nur vom Differenzvektor $x - x'$ abhängen, $G(x, x') = G(x - x')$. Ist die Green'sche Funktion bekannt, so folgt formal sofort eine partikuläre Lösung

$$A^\mu = \mu_0 \int d^4x' G(x - x') j^\mu(x'). \quad (12.5)$$

In der Tat, wendet man auf A^μ den d'Alembert-Operator an, so erhält man

$$\square A^\mu = \mu_0 \int d^4x' \square G(x - x') j^\mu(x') = \mu_0 \int d^4x' \delta^4(x - x') j^\mu(x') = \mu_0 j^\mu(x).$$

Die Green'sche Funktion beschreibt die Ausbreitung einer in der Raumzeit punktförmigen Störung.

Für ihre Berechnung lösen wir zuerst die Bestimmungsgleichung (12.3) im k -Raum, also für die Fourier-Transformierte \tilde{G} in der Transformationsformel

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4k e^{i(k,x)} \tilde{G}(k). \quad (12.6)$$

Frequenz und Wellenzahlvektor bilden die Komponenten eines 4-er Vektors,

$$k = (k^\mu) = \begin{pmatrix} \omega/c \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \quad (12.7)$$

und dieser 4-er Wellenzahlvektor tritt in der Form

$$(k, x) = k^\mu x_\mu = k^0 x^0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \quad (12.8)$$

in der Fourier-Transformation (12.6) auf. Im k -Raum geht der d'Alembert-Operator bis auf das Vorzeichen in die Multiplikation mit k^2 über,

$$\square G(x) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4k k^2 e^{i(k,x)} \tilde{G}(k). \quad (12.9)$$

Andererseits ist die Fourier-Transformierte der Punktquelle

$$\delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{ikx}. \quad (12.10)$$

Setzen wir diese beiden Fourier-Darstellungen in die Bestimmungsgleichung für die Green'sche Funktion ein, so finden wir folgende Fourier-Transformierte von G ,

$$\tilde{G}(k) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{k_\mu k^\mu} = -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{k^2}. \quad (12.11)$$

Damit ergibt sich folgende formale Lösung für die Green-Funktion in (12.6)

$$G(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{i(k,x)}}{k^2} d^4k, \quad k^2 = k_\mu k^\mu. \quad (12.12)$$

Da \square nicht invertierbar ist, müssen wir bei der Auswertung der Integrale etwas vorsichtig sein. Zuerst berechnen wir das Integral über k^0 . Da wir die Ladungen und Ströme als *Ursachen* für die Potentiale betrachten, sollte die Green'sche Funktion $G(x - x')$ nur ungleich Null sein, falls das Ereignis x später als das Ereignis x' ist, d.h. falls $x^0 \geq x'^0$ gilt. Diese Forderung ist erfüllt, falls

$$G(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int \frac{e^{i(k,x)}}{(k^0 - i\varepsilon)^2 - \mathbf{k}^2} d^4k, \quad (12.13)$$

ist. Hier bedeutet $\varepsilon \rightarrow +0$, dass $\varepsilon > 0$ gegen Null strebt. Dies ist mit Hilfe des Residuensatzes einfach zu beweisen: Für $x^0 < 0$ strebt der Integrand in der unteren Halbebene $\Im(k^0) < 0$ exponentiell gegen Null und ist dort analytisch, da seine Pole bei

$$k^0 = i\varepsilon \pm |\mathbf{k}|,$$

also in der oberen Halbebene, liegen. Damit verschwindet das k^0 -Integral längs der Schleife $C_1 \cup C_2$ in der Abb. 12.1. Da C_2 nicht beiträgt, verschwindet das k^0 -Integral längs C_1 für negative x^0 . Für positive x^0 fällt der Integrand nur in der oberen Halbebene $\Im(k^0)$ -Ebene ab und wir müssen das Schleifenintegral längs $C_1 \cup C_3$ nehmen. Da C_3 nicht beiträgt, ist dies gleich dem Integral längs C_1 . Nach dem Residuensatz ist das Schleifenintegral proportional zur Summe der Residuen innerhalb $C_1 \cup C_3$. Also gilt

$$\int_{C_1} dk^0 \frac{e^{ik^0 x^0}}{(k^0 - i\varepsilon)^2 - \mathbf{k}^2} = \oint_{C_1 \cup C_3} dk^0 \frac{e^{ik^0 x^0}}{(k^0 - i\varepsilon - |\mathbf{k}|)(k^0 - i\varepsilon + |\mathbf{k}|)} \rightarrow -\frac{2\pi}{|\mathbf{k}|} \sin |\mathbf{k}| x^0$$

im Grenzfall $\varepsilon \rightarrow +0$. Dies setzen wir in (12.13) ein und finden

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{\sin(|\mathbf{k}| x^0)}{|\mathbf{k}|} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3k.$$

Zur Berechnung des Integrals legen wir die 3-Achse im \mathbf{k} -Raum in Richtung von \mathbf{r} , so dass

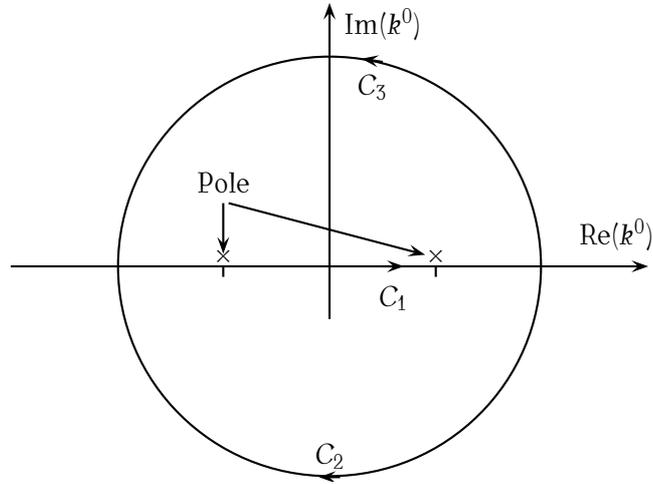


Abbildung 12.1: Zur Berechnung des retardierten Potentials.

$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = |\mathbf{k}| |\mathbf{r}| \cos \theta$ ist, und integrieren über den Azimutalwinkel. Setzen wir noch $\cos \theta = z$, dann finden wir

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-1}^1 dz \int_0^\infty d|\mathbf{k}| |\mathbf{k}| \sin(|\mathbf{k}| x^0) e^{-izr |\mathbf{k}|} \\ &= \frac{1}{2\pi^2 |\mathbf{r}|} \int_0^\infty d|\mathbf{k}| \sin(|\mathbf{k}| x^0) \sin(|\mathbf{k}| r). \end{aligned} \quad (12.14)$$

Der Integrand ist eine gerade Funktion von $|\mathbf{k}|$ und das Integral von 0 nach ∞ ist gleich der Hälfte des Integrals von $-\infty$ nach ∞ . Schreiben wir die beiden Sinus-Funktionen als Differenz zweier Exponentialfunktionen und benutzen die Formel (8.57), dann finden wir unter Beachtung von $x^0 + r > 0$ die einfache Darstellung

$$G(x) = \frac{1}{4\pi |\mathbf{r}|} \delta(x^0 - r). \quad (12.15)$$

Wie gefordert, ist G nur ungleich Null, wenn x auf dem Vorwärtslichtkegel von 0 liegt,

$$\text{Träger}(G) = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 = (x^0)^2 - \mathbf{r}^2 = 0, x^0 \geq 0\}. \quad (12.16)$$

In anderen Worten: Die Green-Funktion am Raumzeitpunkt x ist ungleich Null, falls eine zur Zeit 0 am Ursprung ausgesandte Kugelwelle zur Zeit $t = x^0/c$ den Ort \mathbf{r} erreicht. Die soeben konstruierte Green-Funktion nennt man *retardierte Green'sche Funktion*

$$G_{\text{ret}}(x - x') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta[c(t - t') - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|]. \quad (12.17)$$

Da die Wellengleichung invariant unter einer Zeitspiegelung $Tx = (-x^0, \mathbf{r})$ ist, ist auch

$$G_{\text{av}}(x - x') = G_{\text{ret}}(T(x - x')) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta[c(t - t') + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|] \quad (12.18)$$

eine mögliche Green-Funktion. Lügen die Pole in (12.1) etwas unterhalb der reellen Achse, dann

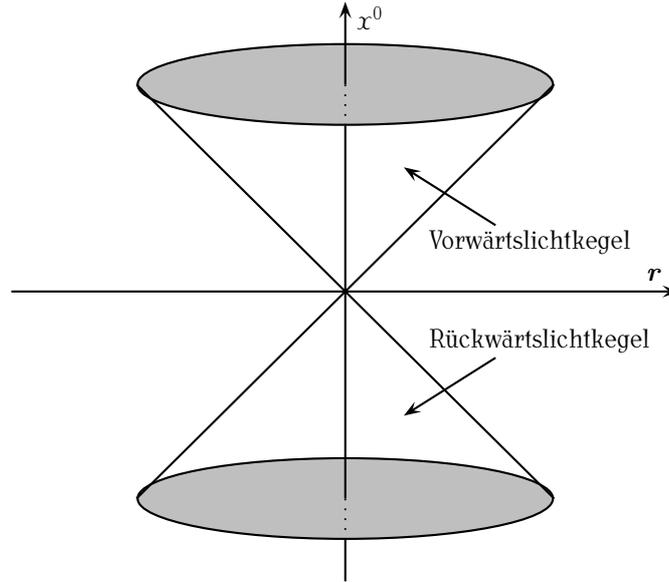


Abbildung 12.2: Vorwärts- und Rückwärtslichtkegel als Träger von G_{ret} bzw. G_{av} .

hätte die Fourier-Transformation diese unphysikalische *avancierte Green'sche Funktion* geliefert. Unphysikalisch deshalb, weil ihr Träger der Rückwärtslichtkegel ist: $G_{\text{av}}(x, x')$ ist nur für $t \leq t'$ ungleich Null.

Nun setzen wir die retardierte Green-Funktion in (12.5) ein und finden

$$A^\mu(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^4x' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(c(t - t') - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) j^\mu(ct', \mathbf{r}'). \quad (12.19)$$

Die Zeitintegration führt auf

$$A^\mu(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{j^\mu(ct - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{j^\mu(ct_{\text{ret}}, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (12.20)$$

Die elektromagnetischen Potentiale haben formal dieselbe Struktur wie in der Statik. Aber die Potentiale zur Zeit t hängen nun von den Stromdichten zu früheren retardierten Zeiten

$$ct_{\text{ret}} = ct - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \leq ct \quad (12.21)$$

ab. Etwas genauer: Sie hängen nur von den Werten der Stromdichte auf dem Rückwärtslichtkegel

von x ab. Wegen $t' = t_{\text{ret}}$ ist

$$c^2(t - t')^2 - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 = (x - x')^2 = 0,$$

was bedeutet, dass der Quellpunkt x' und der Aufpunkt x lichtartig getrennt sind. Das entsprechende Raumzeit-Diagramm ist in der Abbildung 12.3 gezeigt.

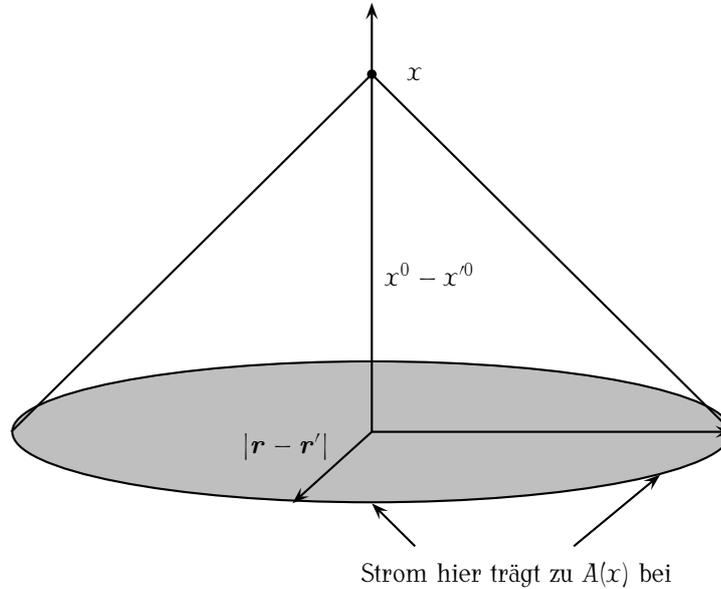


Abbildung 12.3: Die Werte des Stromes auf dem Rückwärtslichtkegel von x bestimmen das Potential am Raumzeitpunkt x .

Das Potential (12.20) erfüllt automatisch die *Lorenz-Eichung*. Zum Beweis dieser Aussage machen wir von der Darstellung (12.5) Gebrauch und benutzen die Kontinuitätsgleichung für die 4-er Stromdichte,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \partial_\mu A^\mu &= \int d^4 x' \partial_\mu G(x - x') j^\mu(x') \\ &= - \int d^4 x' \partial'_\mu G(x - x') j^\mu(x') = \int d^4 x' G(x - x') \partial'_\mu j^\mu(x') = 0. \end{aligned}$$

Bei der partiellen Integration haben wir Oberflächenterme vernachlässigt, was für lokalisierte Stromverteilungen gerechtfertigt ist.

12.2 Strahlungsfeld in der Fernzone

Wir betrachten eine auf ein endliches Gebiet mit linearer Ausdehnung d eingeschränkte Ladungs- und Stromverteilung und bestimmen die Abstrahlung dieses „Senders“. Dazu benötigen wir die

elektromagnetischen Felder in großen Abständen von den Quellen. Der Koordinatenursprung liege räumlich und zeitlich innerhalb des Senders.

Für $r \gg d$, also weit weg vom Sender, ist $r \gg r'$ und wir entwickeln den räumlichen Abstand nach Potenzen von r'/r ,

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r \sqrt{1 + r'^2/r^2 - 2\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'/r} = r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}' + O(d^2/r), \quad (12.22)$$

wobei der Einheitsvektor \mathbf{n} in Richtung von \mathbf{r} zeigt, $\mathbf{n} = \hat{\mathbf{r}}$. Die führenden Terme der Felder weit weg vom Sender klingen also wie $1/r$ ab. Um diese führenden Terme zu berechnen, dürfen wir den Nenner in (12.20) durch r ersetzen. Wir benutzen diese Näherung auch für die retardierte Zeit

$$ct_{\text{ret}} = ct - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = ct - r + \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}' + O(d^2/r). \quad (12.23)$$

Diese Näherung ist allerdings nur zulässig, wenn die zeitliche Änderung der Quellen während des Zeitintervalls d^2/rc klein ist. Hierbei ist d/c die Zeit, die Licht zum Durchqueren der Quelle braucht. Für eine harmonische Welle $\sim e^{i\omega t}$ bedeutet dies

$$\frac{d^2}{rc} \ll \frac{1}{\omega}. \quad (12.24)$$

In der so genannten *Wellen-* oder *Fernzone*, charakterisiert durch die Bedingungen

$$r \gg d \quad \text{und} \quad r \gg \lambda/(2\pi), \quad (12.25)$$

vereinfacht sich der Ausdruck (12.20) für das 4-er Potential dann zu

$$A^\mu = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int d^3r' j^\mu(ct - r + \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}', \mathbf{r}'), \quad (12.26)$$

das heißt für das skalare und Vektorpotential zu

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int d^3r' \rho(ct - r + \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}', \mathbf{r}') \quad (12.27)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int d^3r' \mathbf{j}(ct - r + \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}', \mathbf{r}'). \quad (12.28)$$

Wir bestimmen nun die entsprechenden $1/r$ -Terme der elektromagnetischen Felder. Die Ableitung von $1/r$ fällt wie $1/r^2$ ab und trägt zu den führenden $1/r$ -Termen nicht bei. Damit ist das magnetische Feld in der Wellenzone

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi cr} \mathbf{n} \times \int d^3r' \partial_t \mathbf{j}(ct - r + \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}', \mathbf{r}').$$

Der Vergleich des Integranden mit (12.28) ergibt die Formel für das Fernfeld,

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{c} \mathbf{n} \times \dot{\mathbf{A}}, \quad (12.29)$$

wobei das Potential \mathbf{A} nach der Formel (12.28) berechnet wird. Mit Hilfe der Maxwell-Gleichung $\dot{\mathbf{E}} = c^2 \nabla \times \mathbf{B}$ bestimmen wir den führenden Term von $\dot{\mathbf{E}}$,

$$\dot{\mathbf{E}} = -c \nabla \times (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{A}}) = \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{A}}).$$

Daraus ergibt sich bis auf einen statischen Anteil das elektrische Feld

$$\mathbf{E} = \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{A}}) = -c \mathbf{n} \times \mathbf{B}. \quad (12.30)$$

Man hat also dieselben Verhältnisse wie bei ebenen Wellen; die Strahlungsfelder \mathbf{E} und $c\mathbf{B}$ sind senkrecht zur Ausbreitungsrichtung \mathbf{n} , haben die gleiche Amplitude und stehen senkrecht aufeinander.

In den Formeln für die Felder in der Fernzone geht das (genäherte) Vektorpotential A^μ in (12.26) ein. Zu dessen Berechnung schreiben wir die Stromdichte als Überlagerung von ebenen Wellen,

$$j^\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i(k,x)} j^\mu(k) d\omega d^3k, \quad k_\mu j^\mu(k) = 0. \quad (12.31)$$

Die letzte Bedingung ist die Kontinuitätsgleichung für die 4-er Stromdichte im k -Raum. Um die Stromdichte j^μ im Minkowski-Raum von ihrer Fourier-Transformierten im k -Raum zu unterscheiden, schreiben wir im Folgenden das Argument von j^μ explizit. Setzen wir die Fourier-Zerlegung in (12.26) ein, dann finden wir das Vektorpotential

$$A^\mu(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d\omega e^{i\omega(t-r/c)} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3r' d^3k e^{i\mathbf{r}' \cdot (\mathbf{q}-\mathbf{k})} j^\mu(\omega, \mathbf{k}),$$

wobei $\mathbf{q} = \omega \mathbf{n}/c$ in Richtung von \mathbf{r} zeigt. Die d^3r' -Integration kann nun ausgeführt werden und ergibt mit $\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} = \omega r/c$ folgende Formel für das elektromagnetische Potential

$$A^\mu(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d\omega e^{i(\omega t - \mathbf{q} \cdot \mathbf{r})} j^\mu(\omega, \mathbf{q}), \quad \mathbf{q} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}. \quad (12.32)$$

Im *monochromatischen Fall* ist

$$j^\mu(t, \mathbf{r}) = \Re \left(e^{i\omega t} j^\mu(\mathbf{r}) \right), \quad j^\mu(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{j}(\mathbf{k}) d^3k \quad (12.33)$$

und der Ausdruck für das Potential in der Fernzone vereinfacht sich zu

$$A^\mu(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \Re \left(e^{i(\omega t - \mathbf{q} \cdot \mathbf{r})} j^\mu(\mathbf{q}) \right) \quad (12.34)$$

Es ist proportional zur Fourier-Transformierten der Stromdichte für den Impuls $\mathbf{q} = \omega \hat{\mathbf{r}}/c$. Das

entsprechende Magnetfeld hat die Form

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \omega}{4\pi cr} \Im \left(\mathbf{B}(\mathbf{q}) e^{i(\omega t - \mathbf{q} \cdot \mathbf{r})} \right) \quad \text{mit} \quad \mathbf{B}(\mathbf{q}) = \mathbf{n} \times \mathbf{j}(\mathbf{q}), \quad (12.35)$$

und das elektrische Feld ist $\mathbf{E} = -c \mathbf{n} \times \mathbf{B}$. Die abgestrahlte Welle in der Wellenzone ist eine auslaufende Kugelwelle mit winkelabhängigen Koeffizienten.

12.3 Multipolentwicklung

Die Amplitude einer Welle ändert sich kaum über Distanzen, die viel kleiner als die Wellenlänge sind oder während Zeiten, die viel kürzer als die inverse Frequenz sind. Die Retardierung wird also vernachlässigbar sein, wenn sich die Stromdichte während der Zeitdauer d/c , die das Licht zur Durchquerung des Senders braucht, kaum ändert. Wir wollen jetzt *zusätzlich* zu (12.25) annehmen, dass dies der Fall sei, d.h. dass gelte

$$\lambda \gg d. \quad (12.36)$$

Damit dürfen wir den Integranden in (12.28) entwickeln,

$$\mathbf{j}(ct - r + \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}', \mathbf{r}') = \mathbf{j}(ct - r, \mathbf{r}') + \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')}{c} \partial_t \mathbf{j}(ct - r, \mathbf{r}') + \dots$$

und dies führt auf folgende Multipolentwicklung für das Vektorpotential:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3 r' \mathbf{j}(ct - r, \mathbf{r}') + \frac{\mu_0}{4\pi cr} \int d^3 r' (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}') \partial_t \mathbf{j}(ct - r, \mathbf{r}') + \dots \\ &= \mathbf{A}_1(t, \mathbf{r}) + \mathbf{A}_2(t, \mathbf{r}) + \dots \end{aligned} \quad (12.37)$$

Im Folgenden werden wir sehen, dass \mathbf{A}_1 die elektrische Dipolstrahlung und \mathbf{A}_2 die magnetische Dipol- und elektrische Quadrupolstrahlung enthält.

12.3.1 Elektrisches Dipolfeld

Zur weiteren Umformung des Integrals verallgemeinern wir die Identität (6.52) in Kapitel 6 auf zeitabhängige Situationen. Für zeitabhängige Ladungsdichten ist die Stromdichte nicht mehr quellenfrei, und

$$0 = \oint d\mathbf{f} (g\mathbf{j}) = \int d^3 r \nabla \cdot (g\mathbf{j}) = \int d^3 r \nabla g \cdot \mathbf{j} + \int d^3 r g \nabla \cdot \mathbf{j},$$

wobei g eine beliebige Funktion ist und angenommen wurde, dass für ein genügend großes Integrationsgebiet $g\mathbf{j}$ auf dem Rande des Gebietes verschwindet. Mit der Kontinuitätsgleichung ergibt sich

$$\int d^3 r (\nabla g) \cdot \mathbf{j} = \int d^3 r g \dot{\rho}. \quad (12.38)$$

Wählen wir zunächst $g = x_i$, dann kann das erste Integral in (12.37) folgendermaßen umgeformt werden,

$$\int d^3r' \mathbf{j}(ct - r, \mathbf{r}') = \int d^3r' \mathbf{r}' \dot{\rho}(ct - r, \mathbf{r}') = \dot{\mathbf{p}}(ct - r),$$

wobei $\mathbf{p}(t)$ das in (4.5) eingeführte *elektrische Dipolmoment* der Ladungsverteilung ist. Ein zeitabhängiges Dipolmoment erzeugt also in der Wellenzone ein Vektorpotential, welches wie $1/r$ abfällt und proportional der zeitlichen Änderung des Dipols ist,

$$\mathbf{A}_1(t, \mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \dot{\mathbf{p}}(ct - r). \quad (12.39)$$

Dabei ist die Zeitableitung von \mathbf{p} zur Zeit $t - r/c$ zu nehmen, also zu der Zeit als (in unserer Approximation) die Welle im Sender erzeugt wurde.

12.3.2 Magnetisches Dipol- und elektrisches Quadrupolfeld

Die Zeitableitung im zweiten Integral in (12.37) ziehen wir vor das Integral und formen den auftretenden Term $x'_p j_q$ folgendermaßen um

$$x'_p j_q = \frac{1}{2} (x'_p j_q + x'_q j_p) + \frac{1}{2} (x'_p j_q - x'_q j_p) = \frac{1}{2} \nabla' (x'_p x'_q) \cdot \mathbf{j} + \frac{1}{2} \varepsilon_{pqs} (\mathbf{r}' \times \mathbf{j})_s.$$

Bei der Integration des zweitletzten Terms über d^3r' dürfen wir (12.38) anwenden. Dann finden wir die Zeitableitung des elektrischen Quadrupolmoments (4.6). Die Integration des letzten Terms ergibt das magnetische Dipolmoment (6.55) in Kapitel 6. Es gilt

$$\int d^3r' x'_p j_q = \frac{1}{2} \left(\dot{Q}_{pq} + \frac{1}{3} \delta_{pq} \int d^3r' r'^2 \dot{\rho} \right) + \varepsilon_{pqr} m_r,$$

woraus ein Zwischenergebnis für \mathbf{A}_2 in (12.37) resultiert,

$$\mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{cr} \frac{\partial}{\partial t} \int d^3r' (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{cr} \left(\frac{1}{2} \ddot{\mathbf{Q}} \mathbf{n} + \frac{1}{6} (\nabla \log r) \int d^3r' r'^2 \ddot{\rho} - \mathbf{n} \times \dot{\mathbf{m}} \right).$$

Hierbei steht $\mathbf{Q} \mathbf{n}$ für den Vektor mit den Komponenten $\sum_j Q_{ij} n_j$. Der zweite Term auf der rechten Seite ist ein Gradient, der nicht zum elektromagnetischen Feld beiträgt. Wir können das Potential umeichen, so dass er verschwindet. Damit finden wir folgenden Ausdruck für den Beitrag \mathbf{A}_2 zum Eichpotential in der Wellenzone:

$$\mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{cr} \left(\dot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n} + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{Q}} \mathbf{n} \right)_{ct-r}. \quad (12.40)$$

Auch ein zeitabhängiges magnetisches Dipolmoment und zeitabhängiges elektrisches Quadrupolmoment tragen zum Vektorpotential in der Wellenzone bei.

Addieren wir die Beträge \mathbf{A}_1 und \mathbf{A}_2 , dann finden wir mit den allgemeinen Formeln (12.29)

und (12.30) das elektromagnetische Feld in der Wellenzone,

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{cr} \mathbf{n} \times \left(\dot{\mathbf{p}} + \frac{1}{c} \ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n} + \frac{1}{2c} \ddot{\mathbf{Q}} \mathbf{n} \right)_{ct-r} = \mathbf{n} \times \frac{\mathbf{E}}{c} \quad (12.41)$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{cr} \mathbf{n} \times \left(c\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{p}} + \ddot{\mathbf{m}} + \frac{1}{2} \mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{Q}} \mathbf{n} \right)_{ct-r} = -c \mathbf{n} \times \mathbf{B}. \quad (12.42)$$

In den führenden Ordnungen tragen zeitabhängige elektrische und magnetische Dipolmomente und ein zeitabhängiges, elektrisches Quadrupolmoment bei. Wir erinnern an die gemachten Annahmen:

$$r \gg \lambda \gg d. \quad (12.43)$$

Nun werden wir die von der variablen Quelle abgestrahlte Leistung berechnen.

12.4 Abgestrahlte Leistung

Zur Berechnung der Dipol- und Quadrupolstrahlung eines Senders dürfen wir die elektromagnetischen Felder (12.41,12.42) verwenden. In der Wellenzone bilden \mathbf{n} , \mathbf{E} und $c\mathbf{B}$ ein orthogonales Dreibein und

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} = c|\mathbf{B}|^2 \mathbf{n} = \frac{1}{c} |\mathbf{E}|^2 \mathbf{n}. \quad (12.44)$$

Damit finden wir für die abgestrahlte Leistung pro Raumwinkel

$$\frac{dP}{d\Omega} = r^2 \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = r^2 (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} = c\epsilon_0 r^2 |\mathbf{E}|^2 = \frac{c}{\mu_0} r^2 |\mathbf{B}|^2. \quad (12.45)$$

Wir betrachten zuerst ein System, für das die elektrischen Dipolfelder dominieren. Dann ist

$$\left. \frac{dP}{d\Omega} \right|_{\text{el.Dipol}} = \frac{\mu_0}{16\pi^2} \frac{1}{c} |\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{p}}|^2 = \frac{\mu_0}{16\pi^2} \frac{1}{c} \dot{\mathbf{p}}^2 \sin^2 \theta, \quad (12.46)$$

wobei θ den Winkel zwischen Ausbreitungsrichtung \mathbf{n} und $\dot{\mathbf{p}}$ bezeichnet. Der Dipol strahlt am stärksten senkrecht zum Dipolmoment. Längs der Dipolachse erfolgt keinerlei Abstrahlung. Die Abstrahlung erfolgt rotationssymmetrisch um die Dipolachse. Integrieren wir über alle Richtungen, so erhalten wir mit Hilfe von

$$\int \sin^2 \theta d\Omega = 2\pi \int \sin^3 \theta d\theta = \frac{8\pi}{3}$$

für die Leistung der abgestrahlten *elektrischen Dipolstrahlung*

$$P|_{\text{el.Dipol}} = \frac{\mu_0}{6\pi c} \dot{\mathbf{p}}^2. \quad (12.47)$$

Analog erhält man für die *magnetische Dipolstrahlung*

$$P|_{\text{magn.Dipol}} = \frac{\mu_0}{6\pi c^3} \dot{\mathbf{m}}^2. \quad (12.48)$$

Für harmonisch schwingende Dipole, $\mathbf{p}, \mathbf{m} \sim e^{i\omega t}$ ist die Strahlungsleistung proportional zur vierten Potenz der Frequenz und zum Quadrat des Dipolmomentes.

Nun betrachten wir die *elektrische Quadrupolstrahlung*. Für den Quadrupolanteil in (12.41,12.42) ist die abgestrahlte Intensität

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega}|_{\text{el.Quad.}} &= \frac{\mu_0}{64\pi^2 c^3} (\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{Q}} \mathbf{n})^2 \\ &= \frac{\mu_0}{64\pi^2 c^3} (\ddot{Q}_{kl} \ddot{Q}_{km} n_l n_m - \ddot{Q}_{kl} \ddot{Q}_{mp} n_k n_l n_m n_p). \end{aligned} \quad (12.49)$$

Für eine um die z -Achse drehinvariante Ladungsverteilung hat \mathbf{Q} die Form

$$\mathbf{Q} = \frac{Q_0}{2} \text{diag}(-1, -1, 2), \quad \text{so dass} \quad \mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{Q}} \mathbf{n} = \frac{3}{2} \ddot{Q}_0 n_3 \begin{pmatrix} n_2 \\ -n_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist. Benutzen wir noch

$$|\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{Q}} \mathbf{n}|^2 = \frac{9}{4} \ddot{Q}_0^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta,$$

dann findet man folgende Winkelverteilung für die Strahlung in der Wellenzone,

$$\frac{dP}{d\Omega}|_{\text{el.Quad.}} = \frac{9\mu_0}{256\pi^2 c^3} \ddot{Q}_0^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \quad (12.50)$$

siehe Abb. 12.4. Die Strahlungsleistung ist rotationssymmetrisch zur z -Achse und *maximal* in den Richtungen $\theta = \pi/4$ und $3\pi/4$. Sie verschwindet für $\theta = 0, \pi/2$ und π . Um die gesamte abgestrahlte Leistung zu bestimmen, benötigen wir Integrale der Form $I(i, j, \dots) = \int d\Omega n_i n_j \dots$ mit $2p$ Faktoren $n_i n_j \dots$. Diese werden natürlich auch bei der Berechnung der höheren Multi-polbeiträge zur Strahlung benötigt. Zu ihrer Berechnung benutzen wir folgenden Trick: Die linke Seite der Identität

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r e^{-r^2/2} x_i x_j \dots &= \int_0^\infty dr r^{2+2p} e^{-r^2/2} I(i, j, \dots) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} (2p+1)!! I(i, j, \dots) \end{aligned} \quad (12.51)$$

kann durch mehrfaches Ableiten der *erzeugenden Funktion*

$$I(\mathbf{j}) = \int d^3 r \exp\left(-\frac{r^2}{2} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{r}\right) = (2\pi)^{3/2} \exp\left(\frac{\mathbf{j}^2}{2}\right) \quad (12.52)$$

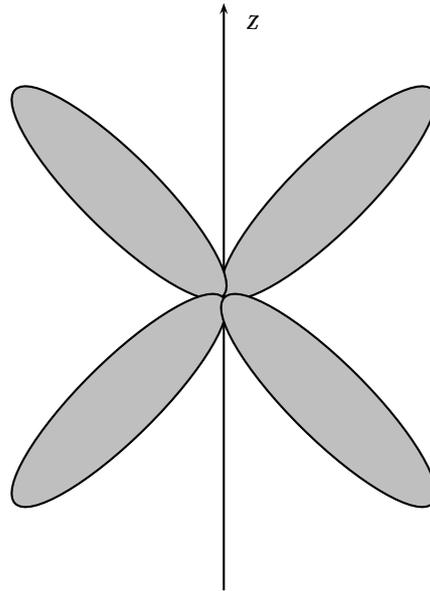


Abbildung 12.4: Winkelverteilung der elektrischen Quadrupolstrahlung.

nach den Komponenten der Quelle \mathbf{j} berechnet werden. Zum Beispiel finden wir:

$$\int d^3r e^{-r^2/2} x_l x_m = \frac{\partial^2}{\partial j_l \partial j_m} I(\mathbf{j})|_{\mathbf{j}=0} = (2\pi)^{3/2} \delta_{lm},$$

$$\int d^3r e^{-r^2/2} x_k x_l x_m x_p = \frac{\partial^4}{\partial j_k \partial j_l \partial j_m \partial j_p} I(\mathbf{j})|_{\mathbf{j}=0} = (2\pi)^{3/2} (\delta_{kl} \delta_{mp} + \delta_{km} \delta_{lp} + \delta_{kp} \delta_{lm}).$$

Benutzen wir diese Resultate in (12.51), so finden wir für die gesuchten Integrale über die Winkel

$$I(l, m) = \frac{4\pi}{3} \delta_{lm} \quad \text{und} \quad I(k, l, m, p) = \frac{4\pi}{15} (\delta_{kl} \delta_{mp} + \delta_{km} \delta_{lp} + \delta_{kp} \delta_{lm}). \quad (12.53)$$

Nun können wir (12.49) über die Winkel integrieren. Berücksichtigen wir die Symmetrie und Spurfreiheit des Quadrupoltensors, dann ergibt sich

$$P|_{\text{el. Quad.}} = \frac{\mu_0}{48\pi c^3} \ddot{Q}_{kl} \ddot{Q}_{kl} - \frac{\mu_0}{240c^3} (\ddot{Q}_{kl} \ddot{Q}_{kl} + \ddot{Q}_{kl} \ddot{Q}_{lk}) = \frac{\mu_0}{80c^3} \text{Sp } \ddot{\mathbf{Q}}^2. \quad (12.54)$$

Die Ausdrücke für die Beiträge höherer Multipole zur Abstrahlung werden immer komplizierter. Eine systematische Entwicklung mit Hilfe der Kugelflächenfunktionen ist möglich, mathematisch aber nicht ganz einfach.

12.5 Liénard-Wiechert-Potentiale

Wir wollen eine wichtige Anwendung der retardierten Potentiale diskutieren. Eine Punktladung q bewege sich längs einer Bahn $\mathbf{r}(t)$ mit der (momentanen) Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$. Diese bewegte Punktladung wird ein zeitlich veränderliches, elektromagnetisches Feld erzeugen, welches wir nun bestimmen werden. Wir berechnen also die Potentiale zu den Dichten

$$\rho(t, \mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)) \quad , \quad \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = q\mathbf{v}(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)) \quad , \quad (12.55)$$

oder in der 4-er Schreibweise

$$j^\mu(x) = qv^\mu(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)) \quad , \quad \text{wobei} \quad (v^\mu) = \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \quad (12.56)$$

ist. Wir setzen diese Stromdichte in (12.19) ein und integrieren über d^3r' mit dem Resultat

$$A^\mu(x) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \int dt' \frac{\delta(c(t-t') - |\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|} v^\mu(t') \quad . \quad (12.57)$$

Um die t' -Integration auszuführen, brauchen wir die Formel

$$\delta(f(t')) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{|\dot{f}(t_j)|} \delta(t' - t_j) \quad , \quad (12.58)$$

wobei t_1, \dots, t_n die einfachen Nullstellen der Funktion f sind. In unserem Fall ist

$$f(t') = ct - ct' - R(t') \quad , \quad \text{wobei} \quad R(t') = |\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')| \quad (12.59)$$

der räumliche Abstand zwischen dem Ort \mathbf{r} des Empfängers zur Zeit t und dem Ort $\mathbf{r}(t')$ des Senders zur früheren Zeit t' ist.

Beweis der Formel 12.58: Im Integral

$$\int dt \delta(f(t)) g(t)$$

tragen nur t -Werte bei, für die das Argument der δ -Distribution verschwindet. Sei t_1 die einzige einfache Nullstelle im Intervall Δ um t_1 und sei $\varepsilon = t - t_1$. Dann ist $f(t) = \dot{f}(t_1)\varepsilon + \dots$ und der Beitrag dieser Nullstelle ist

$$\int_{\Delta} \delta(\dot{f}(t_1)\varepsilon) g(t_1 + \varepsilon) d\varepsilon = \frac{1}{|\dot{f}(t_1)|} \int \delta(x) g\left(t_1 + \frac{x}{\dot{f}(t_1)}\right) dx = \frac{g(t_1)}{|\dot{f}(t_1)|} \quad .$$

Da dies für jede Nullstelle und für beliebige Testfunktionen g gilt, folgt sofort (12.58).

Das Argument $f(t')$ der delta-Distribution enthält den Abstand $R(t')$ und dessen Ableitung

nach t' ist

$$\frac{dR(t')}{dt'} = -c\mathbf{n}(t') \cdot \boldsymbol{\beta}(t'), \quad (12.60)$$

wobei wir den vom Sender zum Empfänger zeigenden Einheitsvektor

$$\mathbf{n}(t') = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')}{R(t')} \quad (12.61)$$

eingeführt. Mit (12.60) ergibt sich dann für die Ableitung des in (12.58) definierten Arguments der delta-Distribution

$$\frac{df}{dt'} = -(1 - \mathbf{n}(t') \cdot \mathbf{v}(t')). \quad (12.62)$$

Da die Geschwindigkeit jedes massiven Teilchens stets kleiner der Lichtgeschwindigkeit ist, ist die rechte Seite in (12.62) negativ. Deshalb kann f höchstens eine Nullstelle $t' = t_{\text{ret}}$ haben. Diese Nullstelle ist Lösung von

$$ct_{\text{ret}} = ct - R(t_{\text{ret}}) = 0, \quad (12.63)$$

und diese wichtige Gleichung bestimmt die *retardierte Zeit* zu der das Licht vom Emittor ausgesandt wurde. Damit können wir die t' -Integration in (12.57) ausführen,

$$A^\mu(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv^\mu(t)}{R(t)[1 - \mathbf{n}(t) \cdot \boldsymbol{\beta}(t)]} \Big|_{t_{\text{ret}}}. \quad (12.64)$$

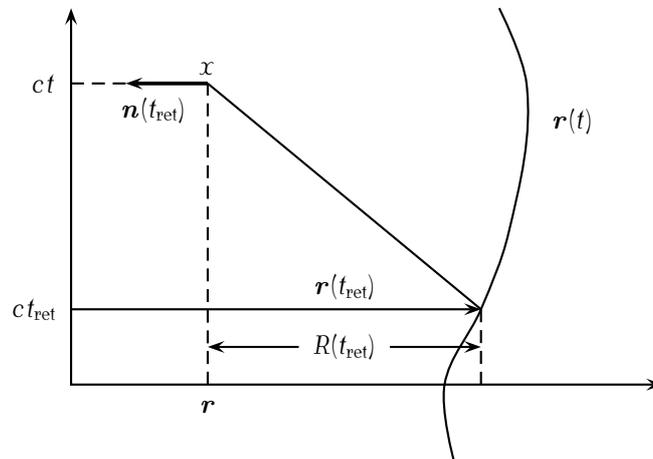


Abbildung 12.5: Zur Ableitung der Liénard-Wiechert-Potentiale.

In Komponenten geschrieben, lauten die Potentiale

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R(t)[1 - \boldsymbol{\beta}(t) \cdot \mathbf{n}(t)]} \Big|_{t_{\text{ret}}} \quad (12.65)$$

$$\mathbf{A}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\boldsymbol{\beta}(t)}{R(t)[1 - \boldsymbol{\beta}(t) \cdot \mathbf{n}(t)]} \Big|_{t_{\text{ret}}}. \quad (12.66)$$

Dies sind die nach Lienard und Wiechert benannten elektromagnetischen Potentiale einer beliebig bewegten Punktladung. Wegen der für allgemeine Teilchenbahnen komplizierten Bestimmungsgleichung für die *retardierte Zeit* (12.63) ist das Potential (12.64) in vielen Situationen nicht leicht berechenbar.

12.5.1 Die Feldstärken

Zur Bestimmung der Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} brauchen wir die Ableitungen der Potentiale nach der Zeit und den räumlichen Koordinaten. Dazu benötigen wir die entsprechenden Ableitungen von t_{ret} . Die Ableitung der retardierten Zeit nach t (bei festem \mathbf{r}) folgt aus der Bestimmungsgleichung (12.63) und aus (12.60),

$$\frac{dt_{\text{ret}}}{dt} = 1 + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} \Big|_{t_{\text{ret}}} \frac{dt_{\text{ret}}}{dt}.$$

Die Auflösung nach der Ableitung der retardierten Zeit ergibt

$$\frac{dt_{\text{ret}}}{dt} = \frac{1}{\kappa} \Big|_{t_{\text{ret}}} \quad \text{mit} \quad \kappa = 1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}. \quad (12.67)$$

Damit können wir Zeitableitungen der in den Potentialen auftretenden Größen bei konstantem \mathbf{r} berechnen. Wir benötigen die Formeln

$$\frac{dR(t_{\text{ret}})}{dt} \stackrel{(12.60)}{=} -\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{\kappa} \Big|_{t_{\text{ret}}} \quad \text{und} \quad \frac{d\kappa(t_{\text{ret}})}{dt} = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{c}{R} (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta})^2 - \mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) \Big|_{t_{\text{ret}}}.$$

Nun findet man relativ leicht für die Zeitableitung des Potentials den Ausdruck

$$\dot{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \frac{\boldsymbol{\beta}}{\kappa^3} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} - \beta^2) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{Rc} \frac{1}{\kappa^3} (\dot{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{n} \times (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})). \quad (12.68)$$

Die räumlichen Ableitungen der retardierten Zeit (bei festem t) ergeben sich durch Differentiation der Bestimmungsgleichung (12.63) worin wir

$$\nabla R(t_{\text{ret}}) = \mathbf{n}(t_{\text{ret}}) - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \Big|_{t_{\text{ret}}} \nabla t_{\text{ret}} \quad (12.69)$$

benutzen. Dies führt auf die einfachen Formeln

$$\nabla t_{\text{ret}} = -\frac{1}{c} \frac{\mathbf{n}}{\kappa} \Big|_{t_{\text{ret}}} \stackrel{(12.69)}{\implies} \nabla R(t_{\text{ret}}) = \frac{\mathbf{n}}{\kappa}. \quad (12.70)$$

Mit Hilfe der Kettenregel ergibt sich dann noch

$$\nabla \kappa(t_{\text{ret}}) = \frac{1}{\kappa c} (\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \mathbf{n} - \frac{1}{\kappa R} (\boldsymbol{\beta} + (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) + \beta^2 \mathbf{n}).$$

Damit lässt sich der Gradient des skalaren Potentials berechnen. Man findet

$$\nabla \Phi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2 \kappa^3} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta})) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{Rc \kappa^3} (\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \mathbf{n}. \quad (12.71)$$

Mit unseren Formeln für die zeitliche Variation von \mathbf{A} und $\nabla\Phi$ ergibt sich für das elektrische Feld

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\kappa^3} \left(\frac{1-\beta^2}{R^2} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) + \frac{1}{Rc} \mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}) \right) \Big|_{t_{\text{ret}}}. \quad (12.72)$$

Um $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ zu bestimmen, brauchen wir schlussendlich noch

$$\nabla \times \boldsymbol{\beta} = -\frac{1}{\kappa c} \mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}.$$

Deshalb hat das magnetische Feld einer bewegten Punktladung die Form

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 c}{4\pi} \frac{q}{\kappa^3} \left(\frac{1-\beta^2}{R^2} \mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta} + \frac{1}{Rc} \mathbf{n} \times (\dot{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{n} \times (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})) \right) \Big|_{t_{\text{ret}}}, \quad (12.73)$$

wobei wir uns noch einmal an unsere Abkürzungen erinnern:

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c}, \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)|, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)}{R}, \quad \kappa = 1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}. \quad (12.74)$$

Damit wären die elektromagnetischen Felder (beinahe) explizit bestimmt. Die ersten Terme in (12.72) und (12.73) sind das Feld einer gleichförmig bewegten Punktladung; sie fallen wie $1/R^2$ ab. Die zweite Terme in diesen Formeln sind proportional zur Beschleunigung und fallen nur wie $1/R$ ab. Sie sind verantwortlich für die elektromagnetische Strahlung von beschleunigten Teilchen.

Wir untersuchen zwei Spezialfälle. Dabei können wir uns wegen des einfachen Zusammenhangs

$$c\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{n} \times \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \quad (12.75)$$

zwischen dem \mathbf{E} und \mathbf{B} -Feld auf das elektrische Feld beschränken.

12.5.2 Gleichförmig bewegte Teilchen

Ruht ein Teilchen dann ist $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0$ zeitunabhängig und $\mathbf{v} = 0$. Entsprechend verschwindet das Vektorpotential und

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad \text{sowie} \quad \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}. \quad (12.76)$$

Wie nicht anders erwartet, finden wir das Coulomb-Potential. Für eine Punktladung mit *konstanter* Geschwindigkeit ist $\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}t$ linear in t und das Quadrat von $(v^\mu) = (c, \mathbf{v})$ ist

$$v^\mu v_\mu = c^2 (1 - \beta^2) = \frac{c^2}{\gamma^2}.$$

Der im letzten Kapitel eingeführt 4-er Geschwindigkeitsvektor ist

$$u^\mu = \gamma v^\mu = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \mathbf{v} \end{pmatrix} \implies (u, u) = c^2. \quad (12.77)$$

Nun bestimmen wir zuerst die retardierte Zeit. Die Bedingung (12.63) lautet

$$c^2(t - t_{\text{ret}})^2 = r^2 + v^2 t_{\text{ret}}^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} t_{\text{ret}}$$

und die Elimination der retardierten Zeit führt auf

$$ct_{\text{ret}} = \frac{\gamma}{c} \left((u, x) \pm \sqrt{(u, x)^2 - c^2 x^2} \right). \quad (12.78)$$

Da $t > t_{\text{ret}}$ sein muss, kommt nur das negative Vorzeichen in Frage. Mit

$$\begin{aligned} R(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})|_{t_{\text{ret}}} &= |\mathbf{r} - \mathbf{v} t_{\text{ret}}| - (\mathbf{r} - \mathbf{v} t_{\text{ret}}) \boldsymbol{\beta} \\ &= c(t - t_{\text{ret}}) - (\mathbf{r} - \mathbf{v} t_{\text{ret}}) \boldsymbol{\beta} = \frac{1}{\gamma c} (u, x) - \frac{c}{\gamma^2} t_{\text{ret}} \end{aligned}$$

finden wir eine einfache Form für den Nenner in den Liénard-Wiechert Potentialen (12.64)

$$R(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})|_{t_{\text{ret}}} = \frac{1}{\gamma c} \sqrt{(u, x)^2 - c^2 x^2}. \quad (12.79)$$

Das Potential (12.64) vereinfacht sich entsprechend zu

$$A^\mu(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q u^\mu}{\sqrt{(\tilde{u}, x)^2 - x^2}}, \quad \tilde{u} = \frac{u}{c}. \quad (12.80)$$

Speziell für ein längs der z -Achse bewegtes Teilchen sind die nicht-verschwindenden Komponenten des 4-er Potentials

$$A^0(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + \gamma^2(z - vt)^2}}, \quad A^3(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\beta\gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + \gamma^2(z - vt)^2}}, \quad (12.81)$$

Nun können wir aus (12.80) leicht die elektromagnetischen Felder bestimmen. Mit

$$R(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})|_{t_{\text{ret}}} = \mathbf{r} - \mathbf{v} t_{\text{ret}} - (t - t_{\text{ret}}) \mathbf{v} = \mathbf{r} - \mathbf{v} t$$

findet man das folgende elektrische und magnetische Feld,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) &= \frac{q\gamma}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{v} t}{[(\tilde{u}, x)^2 - x^2]^{3/2}} \\ \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 q\gamma}{4\pi} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{[(\tilde{u}, x)^2 - x^2]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (12.82)$$

12.6 Der Hertz'sche Dipol

Als weiteres, interessantes System werden wir nun ein um den Ursprung schwingendes Teilchen untersuchen. Ort und Geschwindigkeit der Ladung ändern sich harmonisch,

$$\mathbf{r}(t) = d \sin \omega t \mathbf{e}_3 = z(t) \mathbf{e}_3 \quad , \quad \mathbf{v}(t) = \dot{z}(t) \mathbf{e}_3 = \omega d \cos \omega t \mathbf{e}_3 . \quad (12.83)$$

Wir wollen $d \ll r$ annehmen, so dass wir folgende Näherungen machen dürfen:

$$t_{\text{ret}} \approx t - \frac{r}{c} \quad , \quad z_r \equiv z(t_{\text{ret}}) \approx d \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

$$R(t_{\text{ret}}) \approx r \left(1 - \frac{z z_r}{r^2} \right) \quad , \quad R \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}_{\text{ret}} \approx (z - z_r) \frac{\dot{z}_r}{c} .$$

Daraus folgt die folgende Entwicklung für die Nenner der Potentiale

$$\left(\frac{1}{R(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \right)_{\text{ret}} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{z z_r}{r^2} + \frac{z \dot{z}_r}{c r} \right) .$$

Eingesetzt in (12.65,12.66) finden wir für die nicht verschwindenden Komponenten des elektromagnetischen Potentials

$$\Phi \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r} + \frac{q d}{r^2} \cos \theta \sin(\omega t - k r) + \frac{q d \omega}{r c} \cos \theta \cos(\omega t - k r) \right)$$

$$A_3 \approx \frac{\dot{z}_r}{c^2} \Phi \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q d}{r} \omega \cos(\omega t - k r), \quad k = \omega/c .$$

Fügt man noch eine im Ursprung ruhende Ladung $-q$ hinzu, so findet man nach Einführung des elektrischen Dipolmomentes $p_0 = qd$ (das Dipolmoment bei der maximalen Auslenkung des Oszillators) die einfachen Formeln

$$\Phi \approx \frac{p_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} \sin(\omega t - k r) + \frac{\omega}{r c} \cos(\omega t - k r) \right)$$

$$A_3 \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p_0 \omega}{r} \cos(\omega t - k r) . \quad (12.84)$$

Dies sind die retardierten Potentiale des *Hertz'schen Dipols* in Kugelkoordinaten. Die ruhende Ladung und die darum schwingende positive Ladung stellen einen schwingenden Dipol dar. Das ruhende Teilchen trägt nicht zur Strahlung bei.

12.7 Abstrahlung von bewegten Ladungen

Nachdem wir die exakten Lienard-Wiechert-Felder von bewegten Punktladungen kennen und die Felder von beliebigen Ladungs- und Stromverteilungen in der Wellenzone (für $\lambda \gg d$) bestimmten, wollen wir nun die von diesen Sendern abgestrahlte Leistung berechnen. Diese ist durch den Poyntingvektor bestimmt.

Die ins Unendliche abgestrahlte Leistung P eines Senders ist durch den Poyntingvektor gegeben,

$$P = \lim_{R \rightarrow \infty} R^2 \oint d\Omega \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}, \quad \mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (12.85)$$

Nur Terme, die für große Abstände vom Sender wie $1/R^2$ abfallen, tragen zu dieser Strahlung bei. Deshalb brauchen wir bei der Berechnung der Strahlung einer beschleunigten Punktladung nur diejenigen Terme in (12.72,12.73) berücksichtigen, die $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ enthalten, da nur diese zur Strahlung im Unendlichen beitragen. Wegen $c\mathbf{B} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}$ ist

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{E} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) = \frac{1}{c} E^2 \mathbf{n} - \frac{1}{c} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{E}, \quad (12.86)$$

und für große Abstände vom Strahler steht das elektrische Feld

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\kappa^3} \frac{1}{Rc} \mathbf{n} \times \left((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}} \right)_{t_{\text{ret}}} \quad (12.87)$$

senkrecht auf \mathbf{n} und deshalb ist

$$R^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} = \frac{R^2}{\mu_0 c} \mathbf{E}^2 = \frac{\mu_0 c}{16\pi^2} \frac{q^2}{\kappa^6} \left| \mathbf{n} \times \left((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) \right|^2. \quad (12.88)$$

12.7.1 Nichtrelativistische Teilchen

Wir betrachten zunächst Teilchen mit kleinen Geschwindigkeiten, $\beta \ll 1$. Dann ist die abgestrahlte Leistung pro Raumwinkel ($\kappa \sim 1$)

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 c}{16\pi^2} q^2 \left| \mathbf{n} \times \left(\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) \right|^2.$$

Ist θ der Winkel zwischen \mathbf{n} und dem Beschleunigungsvektor $\dot{\boldsymbol{v}}$, so ist

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0}{16\pi^2} \frac{q^2}{c} \left(\dot{v}^2 - (\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{v}})^2 \right) = \frac{\mu_0}{16\pi^2} \frac{q^2}{c} \dot{v}^2 \sin^2 \theta. \quad (12.89)$$

Die *gesamte Strahlungsleistung* ist

$$P = \frac{\mu_0}{6\pi c} q^2 \dot{v}^2. \quad (12.90)$$

Dies ist die bekannte *Larmorsche Formel* (12.47) für die Strahlungsleistung von nichtrelativistisch beschleunigten Ladungen. Diese Strahlung tritt zum Beispiel auf, wenn Elektronen in Metallen gestreut und abgebremst werden und entsprechend heißt sie *Bremsstrahlung*¹.

¹Aus Kovarianzüberlegungen kann man (12.90) auf beliebige Teilchen, also nicht notwendigerweise langsame, verallgemeinern. Siehe die Diskussion in Kapitel 14 von Jackson.

12.7.2 Relativistische Teilchen

Wir untersuchen nun den allgemeinen Fall für beliebige Geschwindigkeiten $v < c$. Der allgemeine Ausdruck (12.88) gibt den Energiefluss pro Flächen- und Zeiteinheit beim Beobachtungspunkt zur Zeit t . Diese Strahlung wurde zur Zeit $t_{\text{ret}} = t - R(t_{\text{ret}})/c$ ausgesandt. Interessanter ist die Energie, die das Teilchen auf seiner Bahn pro Zeiteinheit dt_{ret} abstrahlt. Wir wollen also die Strahlung berechnen, welche in der Zeit $T_1 \leq t_{\text{ret}} \leq T_2$ emittiert wurde. Die zugehörige Energie, welche der Beobachter empfängt, ist

$$\int_{T_1+R(T_1)/c}^{T_2+R(T_2)/c} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) dt = \int_{T_1}^{T_2} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) \frac{dt}{dt_{\text{ret}}} dt_{\text{ret}}.$$

Die abgestrahlte Leistung je Raumwinkel ist demnach

$$\frac{dP}{d\Omega}(t_{\text{ret}}) = R^2 (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) \frac{dt}{dt_{\text{ret}}}. \quad (12.91)$$

In (12.67) hatten wir bereits die hier auftretende Ableitung

$$\frac{dt}{dt_{\text{ret}}} = \kappa(t_{\text{ret}})$$

definiert, so dass

$$\frac{dP}{d\Omega}(t_{\text{ret}}) = R^2 \kappa (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) \quad (12.92)$$

folgt. Setzen wir hier den obigen Ausdruck für $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}$ ein, dann finden wir für die abgestrahlte Leistung pro Raumwinkel,

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 c}{16\pi^2} \frac{q^2}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^5} \left| \mathbf{n} \times \left((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}} \right) \right|^2. \quad (12.93)$$

Für kleine Geschwindigkeiten geht diese Formel in (12.89) über. Die etwas aufwändige Integration über alle Richtungen \mathbf{n} liefert die folgende abgestrahlte Leistung des geladenen Teilchens,

$$P = \frac{\mu_0 c}{6\pi} q^2 \gamma^6 \left(\dot{\boldsymbol{\beta}}^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2 \right). \quad (12.94)$$

Kolineare Beschleunigung

Für eine lineare Bewegung sind $\boldsymbol{\beta}$ und $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ kollinear und

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0 c}{6\pi} \frac{q^2}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \left| (\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}) \mathbf{n} - \dot{\boldsymbol{\beta}} \right|^2 = \frac{\mu_0}{6\pi c} \frac{q^2 v^2 \sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5}. \quad (12.95)$$

Hier tritt der Winkel θ zwischen \mathbf{n} und $\dot{\mathbf{v}}$ auf. Der Winkel θ_{\max} bei dem die Strahlung maximal ist, erfüllt die Bestimmungsgleichung

$$\cos^2 \theta_{\max} + \frac{2}{3\beta} \cos \theta_{\max} - \frac{5}{3} = 0 \implies \cos \theta_{\max} = \frac{1}{3\beta} \left(\sqrt{1 + 15\beta^2} - 1 \right). \quad (12.96)$$

Für langsame Teilchen mit $v \ll c$ ist

$$\theta_{\max} \approx \frac{\pi}{2} - \frac{5\beta}{2}, \quad (12.97)$$

und für schnelle Teilchen mit $\beta \sim 1 - 1/2\gamma^2 \rightarrow 1$ ist

$$\cos \theta \approx \left(1 + \frac{1}{2\gamma^2} \right) \left(1 - \frac{5}{8\gamma^2} \right) \approx 1 - \frac{1}{8\gamma^2} \implies \theta_{\max} \approx \frac{1}{2\gamma}, \quad \beta \approx 1. \quad (12.98)$$

Für ultrarelativistische Teilchen mit $\gamma \gg 1$ ist die Strahlung in einem engen Kegel in die Vorwärtsrichtung gebündelt. Die gesamte Abstrahlung erhält man leicht aus (12.94),

$$P = \frac{\mu_0 \gamma^6}{6\pi c} (q\dot{v})^2 \quad (\text{lineare Beschleunigung.}) \quad (12.99)$$

Kreisbeschleunigung

Ohne Beweis zitieren wir das entsprechende Resultat für eine *Kreisbewegung* mit dem Radius R und Kreisfrequenz ω :

$$P = \frac{\mu_0 c \gamma^4}{6\pi} (q\omega)^2 \beta^2 \quad (\text{Kreisbeschleunigung.}) \quad (12.100)$$

Diese Formel wurden erstmalig von LIENARD im Jahre 1898 hergeleitet. Der relativistische Faktor γ^4 führt zu großen Strahlungsverlusten in Synchrotrons für hochenergetische Elektronen.