Kapitel 11

Relativistische Punktteilchen

In diesem Kapitel untersuchen wir die Bewegung von geladenen Punktteilchen in elektromagnetischen Feldern. Wir beginnen mit der Diskussion der Weltlinien von Teilchen und deren 4-er Impuls. Danach studieren wir geladene Teilchen in konstanten elektromagnetischen Feldern und in ebenen Wellenfeldern.

11.1 Eigenzeit, 4-er Geschwindigkeit und 4-er Impuls

In der klassischen Newtonschen Mechanik versteht man unter der Bahnkurve die durch die Zeit t parametrisierten drei Raumkoordinaten eines Punktteilchens. Jedem Zeitpunkt wird ein Punkt des Raumes zugeordnet. Wird die Zeit jedoch als weitere eigenständige Dimension im Minkowski-Raum aufgefasst, dann ist jeder Punkt auf einer Trajektorie ein Ereignis, und die gesamte Trajektorie ist eine kontinuierliche Kurve im 4-dimensionalen Minkowski-Raum – man spricht von der *Weltlinie* des Teilchens. Ist τ der Kurvenparameter, dann ist eine Weltlinie also durch eine Abbildung

$$\tau \longrightarrow x(\tau) = (x^\mu(\tau)) \tag{11.1}$$

gegeben. So entspricht einem ruhenden Teilchen die Trajektorie $(x^0(\tau), 0, 0, 0)$. Die Weltlinie der Erde ist eine Schraube in der Raumzeit, da sie sich auf einer räumlich kreisförmigen Bahn um die Sonne und mit konstanter „Geschwindigkeit“ durch die Zeit bewegt. Dies ist in der Abbildung 11.1 gezeigt. Der Begriff der Weltlinie wurde von Hermann Minkowski (1908) zuerst im Zusammenhang mit der speziellen Relativitätstheorie benutzt.

Die Ableitung von $x^\mu(\tau)$ nach dem Kurvenparameter τ definiert eine 4-er Geschwindigkeit

$$u^\mu = \frac{d}{d\tau} x^\mu(\tau) = \begin{pmatrix} u^0 \\ \boldsymbol{u} \end{pmatrix} \tag{11.2}$$

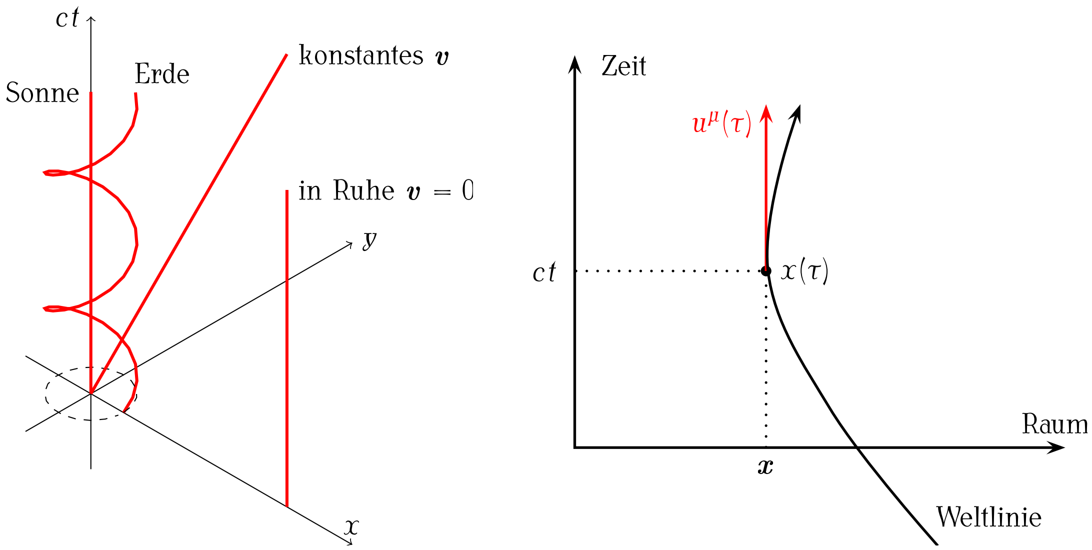


Abbildung 11.1: *Linkes Bild: Die Weltlinien eines ruhenden Teilchens, gleichförmig bewegten Teilchens und der Erde bei ihrer Rotation um die Sonne. Rechtes Bild: Die* 4*-er Geschwindigkeit ist tangential an der Weltlinie.*

und steht in Verbindung mit der 3-er Geschwindigkeit,

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = c\frac{\boldsymbol{u}}{u^0}\,. \tag{11.3}$$

Massive Objekte bewegen sich mit $|\boldsymbol{v}| < c$ oder $|\boldsymbol{u}| < |u^0|$ und masselose Objekte haben Lichtgeschwindigkeit oder $|\boldsymbol{u}| = |u^0|$. Entsprechend sind die Weltlinien massiver Objekte immer zeitartig und diejenigen von masselosen Teilchen lichtartig,

$$\text{massive Teilchen: } u^\mu u_\mu > 0 \quad , \quad \text{masselose Teilchen: } u^\mu u_\mu = 0\,. \tag{11.4}$$

Es gibt nun einen ausgezeichneten Kurvenparameters τ – *die Eigenzeit.* Diese ist ein fundamentaler Begriff der Relativitätstheorie. Die Eigenzeit ist die in einem (momentan) mitbewegten Bezugssystem ablaufende Zeit. Sie hängt mit dem Linienelement der Metrik, $ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ über $ds^2 = c^2d\tau^2$ zusammen. Die Eigenzeit eines Beobachters entspricht damit der Länge der Weltlinie des Beobachters. Sie ist ein Skalar, der in der relativistischen Kinematik an die Stelle des Zeitdifferentials dt der Newtonschen Mechanik tritt. Die Eigenzeitelement eines Körpers, der sich gegen ein Inertialsystem mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ bewegt, ist

$$c^2d\tau^2 = \eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu d\tau^2 = (u^0)^2\left(1-\beta^2\right)d\tau^2\,. \tag{11.5}$$

Wegen $u^0d\tau = cdt$ gilt dann folgende Beziehung zwischen der Koordinatenzeit im Inertialsystem

t und der Eigenzeit τ,

$$d\tau = dt \cdot \sqrt{1-\beta^2} = \frac{dt}{\gamma} \quad \text{bzw.} \quad u^0 = c\gamma\,. \tag{11.6}$$

Die Eigenzeit des bewegten Körpers verstreicht also stets langsamer als die des Inertialsystems (Zeitdilatation). Das Zwillingsparadox ist eine Beispiel, wo sich der Unterschied zwischen Eigen- und Koordinatenzeit manifestiert. Mit der Eigenzeit als Kurvenparameter gilt also

$$u^\mu = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \boldsymbol{v} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad u^\mu u_\mu = c^2\,. \tag{11.7}$$

Multiplizieren wir u^μ mit der Ruhemasse des Teilchens, dann erhalten wir dessen 4-er Impuls,

$$p^\mu = m u^\mu = m \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \boldsymbol{v} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad p^\mu p_\mu = m^2 c^2\,. \tag{11.8}$$

Insbesondere ist dessen Zeitkomponente p^0 proportional zur Energie,

$$p^\mu = \begin{pmatrix} E/c \\ \boldsymbol{p} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad E^2 - \boldsymbol{p}^2 c^2 = m^2 c^4\,. \tag{11.9}$$

Für ein ruhendes Teilchen reduziert sich die letzte Relation auf die wohl bekannteste Formel der Physik, $E = mc^2$. Das wichtige Konzept der invarianten Eigenzeit erlaubt uns eine bequeme kovariante Formulierung der Teilchenkinematik und -dynamik. Die kovariante Definition der kinematischen Größen 4-er Geschwindigkeit und 4-er Beschleunigung

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} \Longrightarrow u_\mu a^\mu = 0\,, \tag{11.10}$$

erfolgt in Bezug auf die Eigenzeit des Teilchens.

Kovariante Bewegungsgleichungen lassen sich aus dem Hamiltonschen Prinzip in der Lagrangeformulierung bestimmen. Für freie Teilchen hat man als einzigen Vierervektor, der maximal die erste Ableitung nach der Eigenzeit enthält, nur u^μ zur Verfügung, um eine invariante Wirkung zu formulieren[1]. Der einzige Skalar, der sich aus diesem bilden lässt ist $u^\mu u_\mu$, so dass für ein massives Teilchen

$$S_0[x] = -mc \int ds = -mc \int d\tau \sqrt{\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx_\mu}{d\tau}} \tag{11.11}$$

der geeignete Ansatz für eine Wirkung darstellt. Wir haben im letzten Schritt die Wirkung bzgl. eines beliebigen Kurvenparameters τ dargestellt, da die Eigenzeit selbst nicht unabhängig ist. Die Wirkung S_0 ist unabhängig von der Parametrisierung der Weltlinie,

$$x^\mu(\tau) \longrightarrow x^\mu\left(\tau'(\tau)\right) \quad \text{mit} \quad \frac{d\tau'}{d\tau} > 0\,.$$

[1] x^μ ist kein Vektor!

Man kann als Weltparameter selbstverständlich auch die Koordinatenzeit t bzgl. eines beliebigen Inertialsystems wählen:

$$S_0[x] = -mc^2 \int dt\, \sqrt{1-\boldsymbol{\beta}^2} = \int dt \left(-mc^2 + \frac{m}{2}\boldsymbol{v}^2 + \dots\right). \tag{11.12}$$

Für kleine Geschwindigkeiten $v \ll c$ ist S_0 bis auf eine additive Konstante die Wirkung eines nicht-relativistischen Teilchens $\int m\boldsymbol{v}^2/2$. Die Euler-Lagrange Gleichung zur Wirkung (11.11) lautet

$$mc\frac{d}{d\tau}\left(\frac{u^\mu}{\sqrt{u\cdot u}}\right) = \frac{mc}{\sqrt{u\cdot u}}\left(a^\mu - \frac{u\cdot a}{u\cdot u}\,u^\mu\right) = 0\,. \tag{11.13}$$

Wählen wir die Eigenzeit als Kurvenparameter dann ist $u^\mu u_\mu = 1 \Rightarrow u^\mu a_\mu = 0$ und die Bewegungsgleichungen für ein freies relativistisches Teilchen vereinfachen sich zu

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = 0 \qquad (u^\mu u_\mu = 1)\,. \tag{11.14}$$

Wir folgern, dass der 4-er Impuls $p^\mu = mu^\mu$ des Teilchens zeitlich erhalten ist. Dies folgt auch aus dem Noethertheorem für die Invarianz der Wirkung S_0 unter zeitlichen und räumlichen Verschiebungen,

$$p^\mu = \text{ const.}, \quad (p^\mu) = \begin{pmatrix} E/c \\ \boldsymbol{p} \end{pmatrix}, \quad E = m\gamma c^2, \quad \boldsymbol{p} = m\gamma\boldsymbol{v}. \tag{11.15}$$

Bisher wurde noch in keinem Experiment eine Verletzung der Energie- und Impulserhaltung gefunden. Ähnlich wie die Erhaltung der elektrischen Ladung scheinen sie immer und überall zu gelten.

11.1.1 Ein freies Elektron kann kein Photon absorbieren

Ein vollständig isoliertes Elektron kann keine Photon absorbieren und dabei ein Elektron bleiben. Dies würde der Erhaltung von Energie und Impuls widersprechen. Es sei

$$p^\mu = \begin{pmatrix} p^0 \\ \boldsymbol{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c \\ \boldsymbol{p} \end{pmatrix}\,. \tag{11.16}$$

der 4-er Impuls des Teilchens (Elektron, Photon, Positron…) Das Produkt

$$p\cdot p \equiv p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \boldsymbol{p}^2 = m^2c^2 \tag{11.17}$$

hat denselben Wert in allen Inertialsystemen. Bezeichnen wir die 4-er Impulse des einlaufenden Elektrons, absorbierten Photons und auslaufenden Elektrons mit

$$p_1^\mu = \begin{pmatrix} E_1/c \\ \boldsymbol{p}_1 \end{pmatrix}, \quad p_\gamma^\mu = \begin{pmatrix} E_\gamma/c \\ \boldsymbol{p}_\gamma \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad p_2^\mu = \begin{pmatrix} E_2/c \\ \boldsymbol{p}_2 \end{pmatrix}, \tag{11.18}$$

dann bedeutet die Erhaltung von Energie und Impuls beim Stoßprozess

$$p_1^\mu + p_\gamma^\mu = p_2^\mu \,. \tag{11.19}$$

Wir quadrieren diese Gleichung und finden mit $p_\gamma \cdot p_\gamma = 0$

$$p_1 \cdot p_1 + 2p_1 \cdot p_\gamma = p_2 \cdot p_2 \Longleftrightarrow m^2c^2 + 2p_1p_\gamma = m^2c^2 \,.$$

Damit gilt in jedem Inertialsystem

$$p_1p_\gamma = \frac{E_1E_\gamma}{c^2} - \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_\gamma = 0\,.$$

Im Inertialsystem, in dem das Elektron nach Absorption des Photons ruht, gilt $\boldsymbol{p}_2 = 0$ oder mit (11.19) auch $\boldsymbol{p}_\gamma = -\boldsymbol{p}_1$, so dass

$$\frac{E_1E_\gamma}{c^2} + \boldsymbol{p}_1^2 = 0\,. \tag{11.20}$$

Da die Energie eines Teilchens größer oder gleich seiner Ruheenergie ist, $E \geq mc^2$, folgern wir, dass $|\boldsymbol{p}_1| = |\boldsymbol{p}_\gamma| = 0$ gilt. Das Elektron war also auch vor dem Absorptionsprozess in Ruhe und das Photon hatte wegen $E_\gamma = \hbar\omega = 0$ eine unendlich große Wellenlänge. Dies bedeutet, dass keine wirkliche Wechselwirkung zwischen Elektron und Photon stattfand. Ist das erste Elektron aber an ein Atom gebunden oder existieren äußere Felder, dann ist der Absorptionsprozess $e^- + \gamma \to e^-$ durchaus möglich. Nun stellt sich die folgende interessante Frage: kann eine ebene Welle mit fester Frequenz, die als Superposition von Photonen mit fester Energie und festem Impuls angesehen werden kann, ein Elektron beschleunigen?

11.2 Relativistische Teilchen in elektromagnetischen Feldern

Die Berechnung von Elektronenbahnen in starken elektromagnetischen Feldern ist eines der grundlegenden Probleme der Laser-Elektron Wechselwirkung. Da nun schon mit 'tabletop'-Lasern sehr große Spitzenfelder erzeugt werden, ist ein Verständnis der *relativistischen Dynamik* von Elektronen in starken Feldern auch von praktischer Bedeutung.

11.2.1 Starke Felder in der Natur und im Laboratorium

Das Erd-Magnetfeld variiert zwischen 0.3 und 0.6 Gauss. Dies ist sehr gering verglichen mit den Magnetfeldern von bis zu 10^{12} Gauss an den Polkappen der Neutronensterne. Magnetars, dies sind sehr schnell (Periode < 10ms) rotierende und junge Neutronensterne, haben sogar Magnetfelder bis zu 10^{15} Gauss. In Laboratorien können wir *statische Magnetfelder* von bis zu 40 Tesla oder $4 \cdot 10^5$ Gauss herstellen und mit gepulsten Lasern kann man im Fokus kurzzeitig Felder mit etwas

$$B \approx \left(\frac{10^{10}}{300}\right) \text{Gauss} = 3.34 \cdot 10^7 \,\text{Gauss} \tag{11.21}$$

erzeugen. Ein Elektron im Abstand von einem Angstrom $= 10^{-8}$ cm vom Proton sieht ein elektrisches Feld der Stärke

$$|\boldsymbol{E}| = \frac{e}{r_a^2} \approx 1.4 \cdot 10^9 \,\frac{\text{V}}{\text{cm}}\,. \tag{11.22}$$

Dies ist geringer als die von modernen Femtosekunden-Lasern erzeugten Felder von 10^{10} V/cm.

Ein Elektron werde von einem Laserfeld der Frequenz ν beschleunigt. Während einer kurzen Zeitdauer Δt, die kleiner als die halbe Periode des Laserfelds sei, können wir das elektrische Feld als nahezu konstant behandeln. Die Änderung der Geschwindigkeit ist dann etwa

$$\Delta v = \frac{e}{m}\bar{E}\Delta t, \quad \bar{E} = \frac{2}{\pi}E_{\max}\,. \tag{11.23}$$

Das Elektron wird relativistisch bei der Beschleunigung während einer halben Periode wenn

$$\Delta v \approx c \Longleftrightarrow a_0 = \frac{eE}{m\omega c} = \frac{eE}{mc^2}\frac{\lambda}{2\pi} > 1\,. \tag{11.24}$$

Messen wir das Feld in Vielfachen von $10^{10}\,$V/cm und die Wellenlänge in μm (dies entspricht 3.36 fs) dann finden wir

$$a_0 = 0.31 \cdot E\left[10^{10}\frac{\text{V}}{\text{cm}}\right]\lambda\,[\mu\text{m}]\,. \tag{11.25}$$

Für gepulste Hochintensitätslaser ist der *relativistische Parameter* $a_0 \gg 1$ und die Elektronen müssen relativistisch behandelt werden.

11.2.2 Relativistische Form der Lorentzschen Bewegungsgleichungen

Es sei $x^\mu(\tau)$ die Weltlinie eines geladenen Punktteilchens der Masse m mit der Eigenzeit als Kurvenparameter. Dann hat die 4-er Geschwindigkeit

$$(u^\mu) = \begin{pmatrix}\gamma c\\ \gamma \boldsymbol{v}\end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \tag{11.26}$$

die kovariante Länge $u_\mu u^\mu = c^2$. Um die kovariante Form der Bewegungsgleichungen zu finden, verjüngen wir den Feldstärketensor

$$(F^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} 0 & E_1/c & E_2/c & E_3/c \\ E_1/c & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2/c & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3/c & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{11.27}$$

mit der 4-er Geschwindigkeit und erhalten

$$F^\mu{}_\nu u^\nu = \gamma \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \end{pmatrix} .$$

Die Zeitkomponente des Vektors auf der rechten Seite ist proportional zur Arbeit, die das elektrische Feld am Teilchen leistet. Dies führt zu einer zeitlichen Zunahme der Energie $E = p^0 c = m u^0 c$ des geladenen Teilchens. Die 3 räumlichen Komponenten des Vektors auf der rechten Seite sind proportional zur wirkenden Lorentzkraft. Diese Kraft bedingt eine zeitlichen Änderung des 3-er Impulses $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{u}$. Zusammengefasst haben die relativistischen Bewegungsgleichungen folgende elegante Form,

$$m\frac{du^\mu}{d\tau} = eF^\mu{}_\nu u^\nu , \tag{11.28}$$

wobei auf der linken Seite die Ableitung nach der Eigenzeit auftritt. Man beachte, dass aufgrund von

$$\frac{d}{d\tau}\left(u^\mu u_\mu\right) = \frac{2e}{m} F_{\mu\nu} u^\nu u^\mu = 0$$

die Nebenbedingung $u_\mu u^\mu = c^2$ mit den relativistischen Bewegungsgleichungen verträglich ist. Benutzen wir noch $dt = \gamma d\tau$, dann lauten diese Gleichungen in der $3+1$-Zerlegung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\gamma m c^2) &= e\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{E} \\ \frac{d}{dt}(\gamma m \boldsymbol{v}) &= e(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) . \end{aligned} \tag{11.29}$$

Die erste Gleichung gibt an, wie sich die relativistische Energie $\gamma m c^2$ des geladenen Teilchens im elektrischen Feld ändert und die zweite Gleichung ist die relativistische Form der Lorentz-Kraft Gleichung.

11.3 Bewegung im konstanten Feld

Für einen konstanten Feldstärketensor können die Bewegungsgleichungen (11.28) formal leicht integriert werden: Bezeichnet u den Spaltenvektor (u^μ) und F die 4-dimensionale konstante

Matrix $(F^\mu{}_\nu)$ dann lautet die formale Lösung

$$u(\tau) = e^{\ell F \tau} u(0), \quad \ell = \frac{e}{m}\,. \tag{11.30}$$

Im Folgenden wählen wir angepasste Inertialsysteme in denen das (konstante) elektromagnetische Feld eine möglichst einfache Form hat. Bei Lorentztransformationen ändern sich skalare Größen nicht – sie haben in allen Inertialsystemen denselben Wert. Aus dem elektrischen und magnetischen Feld können wir nun genau zwei lorentzinvariante Größen konstruieren. Dies sind

$$-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\boldsymbol{E}^2}{c^2} - \boldsymbol{B}^2\right) \quad \text{und} \quad -\frac{1}{8}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} = \frac{1}{c}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}\,. \tag{11.31}$$

Auf den linken Seiten treten hier nur vollständigen Verjüngungen von Tensoren auf und dies beweist, dass es sich dabei um lorentzinvariante Größen handelt. Diese beiden Invarianten treten im charakteristischen Polynom der Matrix F auf,

$$F^4 - \left(\frac{\boldsymbol{E}^2}{c^2} - \boldsymbol{B}^2\right) F^2 - \frac{(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B})^2}{c^2} = 0\,, \tag{11.32}$$

Sie haben denselben Wert in allen Inertialsystemen. Sind zum Beispiel $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ orthogonal in einem Inertialsystem, dann sind sie auch orthogonal in jedem anderen Inertialsystem. Ferner sind die Eigenschaften $|\boldsymbol{E}|$ kleiner, größer oder gleich $c|\boldsymbol{B}|$ unabhängig vom Bezugssystem. Deshalb haben wir folgende vier verschiedenen Fälle:

- Für $\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{B}$ gibt es folgende drei Fälle:

  hyperbolisch: Für $|\boldsymbol{E}| > c|\boldsymbol{B}|$ existiert ein Inertialsystem mit $\boldsymbol{B} = 0$;

  elliptisch: Für $|\boldsymbol{E}| < c|\boldsymbol{B}|$ existiert ein Inertialsystem mit $\boldsymbol{E} = 0$;

  parabolisch: Für $|\boldsymbol{E}| = c|\boldsymbol{B}|$ ist in allen Inertialsystemen $|\boldsymbol{E}| = c|\boldsymbol{B}|$.

- Für $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B} \neq 0$ existiert ein Inertialsystem mit $\boldsymbol{E} \parallel \boldsymbol{B}$ (loxodromisch).

Der letzte Fall ist die generische Situation. Nun diskutieren wir die Lösungen der Bewegungsgleichung für die 4 unterschiedlichen Fälle.

Hyperbolischer Fall: Hier können wir ein Inertialsystem wählen, in dem $\boldsymbol{B} = 0$ und $\boldsymbol{E} = E\boldsymbol{e}_3$ ist. Dann lauten die Bewegunggleichungen für die Komponenten der 4-er Geschwindigkeit

$$\dot{u}^0 = \omega_e u^3, \quad \dot{u}^3 = \omega_e u^0, \quad \dot{u}^1 = \dot{u}^2 = 0\,, \tag{11.33}$$

wobei der Punkt die Ableitung nach τ bedeutet. Hierin erscheint die charakteristische Frequenz

$$\omega_e = \ell\frac{E}{c} = \frac{eE}{m_0 c} \Longleftrightarrow \omega_e\Big[\frac{1}{\mathrm{s}}\Big] \approx 5.867\cdot 10^4 \times E\Big[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{cm}}\Big]\,. \tag{11.34}$$

Die einfache Lösung lautet

$$\begin{aligned} u^0(\tau) &= \cosh(\omega_e\tau)u^0(0) + \sinh(\omega_e\tau)u^3(0) \\ u^3(\tau) &= \sinh(\omega_e\tau)u^0(0) + \cosh(\omega_e\tau)u^3(0) \,. \end{aligned} \tag{11.35}$$

Für ein anfänglich ruhendes Teilchen ist $u^0 = c\cosh(\omega_e\tau)$ und $u^3(0) = c\sinh(\omega_e\tau)$, so dass

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{u^0}{c} = \cosh(\omega_e\tau) \quad \text{bzw.} \quad \omega_e t = \sinh(\omega_e\tau) \,. \tag{11.36}$$

Setzen wir dies in $\boldsymbol{\beta} \equiv \boldsymbol{v}/c = \boldsymbol{u}/u^0$ ein, dann erhalten wir

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\ell \boldsymbol{E} t/c}{\cosh(\operatorname{arcsinh}(\omega_e t))} = \frac{\omega_e t}{\sqrt{1+(\omega_e t)^2}}\,\hat{\boldsymbol{E}} \,. \tag{11.37}$$

Für Zeiten $t \gg 1/\omega_e$ nähert sich die Geschwindigkeit des Teilchens der Lichtgeschwindigkeit.

Elliptischer Fall: In dieser Situation können wir ein Inertialsystem wählen, in dem $\boldsymbol{E} = 0$ und $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_3$ ist. Es tritt nun die charakteristische Zyklotronfrequenz auf,

$$\omega_c = \ell B = \frac{eB}{m_0} \Longleftrightarrow \omega_c\left[\frac{1}{\mathrm{s}}\right] \approx 1.760 \cdot 10^7 \times B[\text{Gauss}] \,. \tag{11.38}$$

Die Lösung der Bewegunggleichung beschreibt einen Kreis in der Ebene senkrecht zum Magnetfeld,

$$\begin{aligned} u^1(\tau) &= \cos(\omega_c\tau)u^1(0) + \sin(\omega_c\tau)u^2(0) \\ u^2(\tau) &= -\sin(\omega_c\tau)u^1(0) + \cos(\omega_c\tau)u^2(0) \end{aligned} \tag{11.39}$$

mit konstanten u^0, u^3. Damit ist auch $|\boldsymbol{u}|$ und der relativistische γ-Faktor konstant. Es folgt, dass die Eigen- und Koordinatenzeit proportional sind, $\gamma\tau = t$ und deshalb wird die Kreisbahn mit *rot-verschobener Frequenz* $\omega = \omega_c/\gamma$ durchlaufen,

$$\begin{aligned} v^1(t) &= \cos(\omega t)v^1(0) + \sin(\omega t)v^2(0) \\ v^2(t) &= -\sin(\omega t)v^1(0) + \cos(\omega t)v^2(0) \,. \end{aligned} \tag{11.40}$$

Ein relativistisches Teilchen zirkuliert mit einer Kreisfrequenz die kleiner als die nicht-relativistische Zyklotronfrequenz ω_c ist.

Parabolischer Fall: In diesem Ausnahmefall können wir in ein Inertialsystem wechseln, in dem

$$\boldsymbol{E} = E\boldsymbol{e}_1 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{B} = cE\boldsymbol{e}_2 \tag{11.41}$$

gilt. Führen wir wieder die charakteristische Kreisfrequenz $\omega_e = eE/mc$ ein, dann ist die Zunahme der 4-er Geschwindigkeit $\Delta u^\mu(\tau) = u^\mu(\tau) - u^\mu(0)$ gleich

$$\begin{aligned}\Delta u^0(\tau) &= \Delta u^3(\tau) = \omega_e\tau\, u^1(0) + \frac{\omega_e^2\tau^2}{2}\Big(u^0(0) - u^3(0)\Big)\\ \Delta u^1(\tau) &= \omega_e\tau\Big(u^0(0) - u^3(0)\Big)\,, \quad \Delta u^2(\tau) = 0\,.\end{aligned} \tag{11.42}$$

Für ein anfänglich ruhendes Teilchen ist $u(0) = (c, \boldsymbol{0})$ und die Differentialgleichung $cdt/d\tau = u^0(\tau)$ führt auf folgende Beziehung zwischen Koordinaten- und Eigenzeit,

$$t = \tau + \frac{\tau}{6}(\omega_e\tau)^2\,. \tag{11.43}$$

Die 3-er Geschwindigkeit ist nun

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\omega_e\tau}{\gamma}\begin{pmatrix}1\\0\\\omega_e\tau/2\end{pmatrix}, \quad \gamma = 1 + \frac{\omega_e^2\tau^2}{2}\,, \tag{11.44}$$

worin $\tau(t)$ die Lösung des kubischen Polynoms in (11.43) ist. Die Geschwindigkeit in Richtung des elektrischen Feldes nimmt zu bis zur Eigenzeit $\tau_{\max} = \sqrt{2}/\omega_e$ – dies entspricht der Koordinatenzeit $t_{\max} = 4\sqrt{2}/(3\omega_e)$. Dann ist die maximale Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_\parallel = c/\sqrt{2}$ in $\boldsymbol{E}$-Richtung erreicht und nimmt danach wieder monoton ab. Die Geschwindigkeit senkrecht zu $\boldsymbol{E}$ und zu $\boldsymbol{B}$ nimmt während der ganzen Zeit monoton zu und nähert sich asymptotisch der Lichtgeschwindigkeit.

Loxodromischer Fall: Für $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B} \neq 0$ können wir weder $\boldsymbol{E}$ noch $\boldsymbol{B}$ auf Null transformieren. Aber wir können ein Inertialsystem finden in dem $\boldsymbol{E} = E\boldsymbol{e}_3$ und $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_3$ ist. In diesem System lautet die Lösung der Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned}u^0(\tau) &= \cosh(\omega_e\tau)\, u^0(0) + \sinh(\omega_e\tau)\, u^3(0)\\ u^1(\tau) &= \cos(\omega_c\tau)\, u^1(0) + \sin(\omega_c\tau)\, u^2(0)\\ u^2(\tau) &= -\sin(\omega_c\tau)\, u^1(0) + \cos(\omega_c\tau)\, u^2(0)\\ u^3(\tau) &= \sinh(\omega_e\tau)\, u^0(0) + \cosh(\omega_e\tau)\, u^3(0)\,.\end{aligned} \tag{11.45}$$

Für ein anfänglich ruhendes Teilchen ist dies die Lösung zum hyperbolischen Problem.

11.4 Relativistische Teilchen in ebenen Wellenfeldern

Das 4-er Potential einer ebenen Welle hat die Form $A_\mu(x) = A_\mu(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) = A_\mu(k\cdot x)$, wobei

$$k = (k^\mu) = \begin{pmatrix} \omega/c \\ \boldsymbol{k} \end{pmatrix} \tag{11.46}$$

der 4-er Wellenzahlvektor ist. In der kovarianten Lorenzeichung erfüllt das 4-er Potential die Bedingung $(k^\mu A_\mu)' = 0$, wobei Strich die Ableitung nach der Phase kx bezeichnet. Wir dürfen konstante Beträge zum Potential vernachlässigen, so dass $k_\mu A^\mu = 0$ gesetzt werden kann. Die Richtungsableitung $u^\nu \partial_\nu A_\mu$ des Potentials in der Bewegungsgleichung

$$\dot{u}^\mu = \frac{e}{m} F^\mu{}_\nu u^\nu = \frac{e}{m}\left(u^\nu \partial^\mu A_\nu - u^\nu \partial_\nu A^\mu\right) \tag{11.47}$$

ist proportional zu dessen τ-Ableitung. Deshalb kann der entsprechende Term auf die linke Seite der Gleichung geschlagen werden. Wir führen das *reskalierte Potential* $a^\mu = eA^\mu/m$ mit der Einheit einer Geschwindigkeit ein, so dass

$$\frac{d}{d\tau}\left(u^\mu + a^\mu\right) = u^\nu \partial^\mu a_\nu = u^\nu k^\mu a'_\nu \,. \tag{11.48}$$

Überschieben wir diese Gleichung mit k_μ und benutzen $k\cdot a = k\cdot k = 0$, dann ergibt sich die zeitliche Konstanz von $ku \equiv \Omega$. Bis auf eine irrelevante Konstante ist also $k_\mu x^\mu = \Omega\tau$. Sei nun ξ ein konstanter und zu k orthogonaler 4-Vektor. Die Überschiebung der letzten Gleichung mit ξ führt dann zu einer weiteren Konstanten der Bewegung,

$$\xi\cdot v = \text{const.} \quad \text{mit} \quad v^\mu = u^\mu + a^\mu \,. \tag{11.49}$$

Der 4-er Vektor mv^μ ist der eichabhängige *kanonische* 4-er Impuls. Der transversale Anteil dieses Impulses ist zeitlich konstant. Er erfüllt die Bewegungsgleichung

$$\frac{dv^\mu}{d\tau} = u^\nu k^\mu a'_\nu = v^\nu k^\mu a'_\nu - a^\nu k^\mu a'_\nu \,. \tag{11.50}$$

Der letzte Term ist wieder eine τ-Ableitung, da das Argument von a_μ gleich $k\cdot x = \Omega\tau$ ist:

$$k^\mu a^\nu a'_\nu = \frac{k^\mu}{2\Omega}\frac{d}{d\tau}(a^\nu a_\nu) = \frac{k^\mu}{2k\cdot u_0}\frac{d}{d\tau}(a\cdot a) \,. \tag{11.51}$$

Beim letzten Gleichheitszeichen benutzten wir, dass wir in der Integrationskonstanten $\Omega = k\cdot u$ die 4-er Geschwindigkeit u durch die Anfangsgeschwindigkeit u_0 ersetzen dürfen. Nun bringen wir noch den letzten Term in (11.50) nach links unter die Zeitableitung und definieren dabei den 4-er Vektor

$$w^\mu = u^\mu + a^\mu + k^\mu \frac{a\cdot a}{2k\cdot u_0} \,. \tag{11.52}$$

In der Lorenz-Eichung gilt $k_\mu w^\mu = k_\mu u^\mu = \Omega$. Der Vektor w^μ erfüllt die Bewegungsgleichung

$$\frac{dw^\mu}{d\tau} = k^\mu a'_\nu \, v^\nu = k^\mu a'_\nu \, w^\nu \,. \tag{11.53}$$

Die letzte Gleichung gilt in der Lorenzeichung. Diese Evolutionsgleichung ist leicht zu lösen, da die Matrix $(k^\mu a'_\nu)$ in folgendem Sinne nilpotent ist,

$$k^\mu a'_\nu(k\cdot x)\, k^\nu a'_\alpha(k\cdot y) = 0\,.$$

Die exakte Lösung des Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen (11.53) lautet nun

$$w^\mu(\tau) = w^\mu(\tau_0) + \frac{k^\mu}{k\cdot u_0}\left(a_\nu(\Omega\tau) - a_\nu(\Omega\tau_0)\right) w^\nu(\tau_0)\,. \tag{11.54}$$

Wir bezeichnen das (reskalierte) Potential und die Geschwindigkeit zur anfänglichen Zeit mit $a^\mu(\Omega\tau_0) \equiv a_0^\mu$ und u_0^μ. Erinnern wir uns noch an die Definition von w^μ dann finden wir

$$u^\mu(\tau) = u_0^\mu - \left(\Delta a^\mu - k^\mu \frac{\Delta a\cdot u_0}{k\cdot u_0}\right) - k^\mu \frac{\Delta a\cdot\Delta a}{2k\cdot u_0}, \quad \Delta a = a(\Omega\tau) - \alpha_0\,. \tag{11.55}$$

Man prüft leicht nach, dass die Zwangsbedingung $u\cdot u = c$ für alle Zeiten gilt. Der letzte Term enthält $(\Delta a)^2 = (a-\alpha_0)^2$ und nicht etwa $a^2 - a_0^2$ wie man erwarten könnte. Die Lösung $u^\mu(\tau)$ ist auch eichinvariant: transformiert man $a^\mu \to a^\mu + k^\mu\lambda'(k\cdot x)$, so dass das neue Potential immer noch die Lorenzeichung erfüllt, dann ist die rechte Seite unabhängig von der Eichfunktion λ. Verschwindet das Eichpotential zur anfänglichen Zeit, dann ergibt sich die etwas einfachere Formel

$$u^\mu = u_0^\mu - \left(a^\mu - k^\mu \frac{a\cdot u_0}{k\cdot u_0}\right) - k^\mu \frac{a\cdot a}{2k\cdot u_0}\,. \tag{11.56}$$

Es sein nun $A^\mu(k\cdot x)$ eine ebene Welle, die eine gewisse Zeit auf ein geladenes Teilchen einwirke. Bevor die Welle das Teilchen erreicht ist am Teilchenort $A^\mu = 0$. Ist sie am Teilchen vorbeigezogen, dann ist am Teichenort wieder $A^\mu = 0$. Also verschwindet für $\tau_0 \to -\infty$ und $\tau \to \infty$ die Differenz Δa^μ in der allgemeinen Lösung (11.55). Daraus folgt sofort

$$u^\mu(\tau\to\infty) = u^\mu(\tau\to-\infty)\,. \tag{11.57}$$

Wirkt eine ebene Welle eine endliche Zeit auf ein geladenes Teilchen dann kann sie weder Energie noch Impuls auf das Teilchen übertragen. Wenn die Welle vorbeistreicht, dann beschreibt das Teilchen eine unter Umständen komplizierte und beschleunigte Bewegung. Aber am Ende ist die Geschwindigkeit wieder gleich der Anfangsgeschwindigkeit. Dieses Lemma heißt *Satz von Lawson und Woodward*. Das Theorem ist in Einklang mit unserer Auffassung von ebenen Wellen als Strom von freien Photonen und der Tatsache, dass ein freies Elektron kein Photon absorbieren kann.

11.4.1 Gepulste ebene Wellen

Wir betrachten eine modulierten Puls

$$(a_\mu) = c\alpha_0 c e^{-(k,x)^2/\xi^2}\left(\sin(k\cdot x)\boldsymbol{e}_1 - \delta\cos(k\cdot x)\boldsymbol{e}_2\right) \tag{11.58}$$

mit dimensionloser Amplitude α_0, Breite ξ und Wellenzahlvektor $kc = \omega\,(1,0,0,1)^T$. Für $\delta = 0$ handelt es ich um eine linear polarisiere und für $\delta = 1$ um eine zirkulär polarisierte Welle. Die Beziehung zwischen dem Argument des Potentials und der Eigenzeit ist wieder $k\cdot x = \Omega\tau$. Die 4-er Geschwindigkeit, gemessen in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit, eines zur Anfangszeit ruhenden Teilchens (dann ist $\Omega = \omega$) lautet

$$\left(\frac{u^\mu}{c}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_\perp^2, \boldsymbol{u}_\perp, \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_\perp^2\right) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{u}_\perp = \alpha_0 e^{-(\omega\tau/\xi)^2}\left(\sin(\omega\tau)\boldsymbol{e}_1 - \delta\cos(\omega\tau)\boldsymbol{e}_2\right)\,. \tag{11.59}$$

Zur numerischen Berechnung der Trajektorie definieren wir den dimensionslosen Weltlinienparameter $\eta = \omega\tau$ und bezeichen die Ableitung nach η mit einem Strich. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{x'}{\lambda\!\!\!^{-}} &= \alpha_0 e^{-\eta^2/\xi^2}\sin\eta, \quad (\lambda\!\!\!^{-} = c/\omega)\\
\frac{y'}{\lambda\!\!\!^{-}} &= -\alpha_0\delta e^{-\eta^2/\xi^2}\cos\eta\\
\frac{z'}{\lambda\!\!\!^{-}} &= \frac{\alpha_0^2}{2}e^{-2\eta^2/\xi^2}\left(\sin^2\eta + \delta^2\cos^2\eta\right),
\end{aligned} \tag{11.60}$$

Das folgende `octave`-Programm berechnet die Trajektorie eines anfänglich ruhenden Teilchens für $\alpha_0 = 5$, $\xi = 10\lambda$ und $\delta = 1$. Zuerst werden die rechten Seite der Differentialgleichungen als Funktionen definiert:

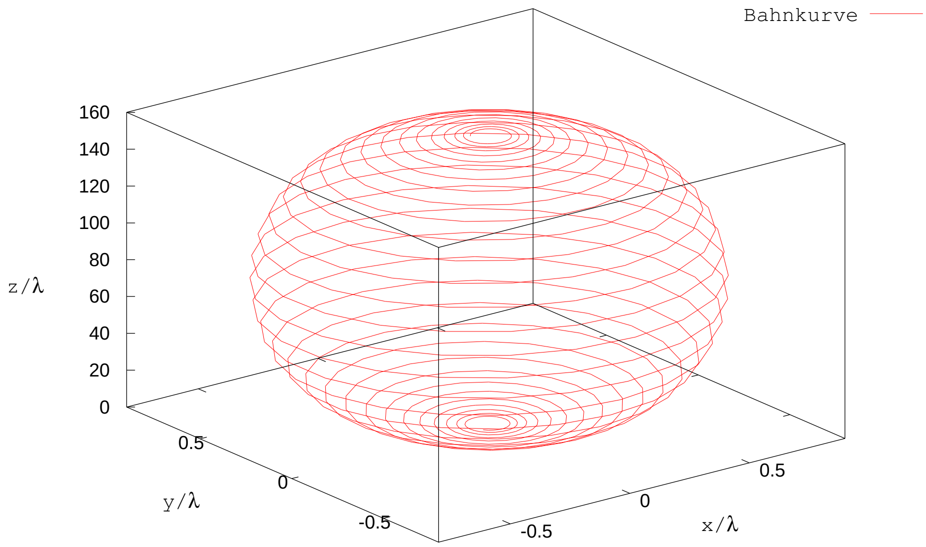
```
function xdot=f(x,t)
a0=5.0;delta=1;xi=2*pi*10;
ba=a0*exp(-(t/xi)**2);
si=sin(t);co=cos(t);
xdot(1)=ba*si;
xdot(2)=-ba*co*delta;
xdot(3)=0.5*(xdot(1)*xdot(1)+xdot(2)*xdot(2));
endfunction
```

Das folgende Programm ruft diese Funktion bei der Lösung des Differentialgleichungssystems auf:

```
x0=[0;0;0];
t=linspace(-100,100,700)';
x=lsode("f",x0,t);
plot3(x(:,1)/(2*pi),x(:,2)/(2*pi),x(:,3)/(2*pi),'-r')
```

Die Bahnkurve im Raum ist in der folgenden Figur geplotted. Anfänglich ruht das Teilchen im

Ursprung des Koordinatensystems. Nachdem die gepulste Welle am Teilchen vorbeigestrichen ist kommt dieses bei $\boldsymbol{r} \approx (0, 0, 150\lambda)$ wieder zur Ruhe. Für eine Diskussion von verwandten Lösungen verweise ich auf Literatur.



11.4.2 Teilchen in elliptisch polarisierten harmonischen Wellenfeldern

Wir wollen nun die Bewegung von Testteilchen in einer in z-Richtung propagierenden elliptisch polarisierten ebenen harmonischen Welle mit Vektorpotential

$$A_\mu = (0, A_1(k\cdot x), A_2(k\cdot x), 0), \quad (ck^\mu) = (\omega, 0, 0, \omega)^T. \tag{11.61}$$

untersuchen. Man beachte, dass mit unserer Wahl für die Minkowski Metrik die Komponenten A^i von $\boldsymbol{A}$ das umgekehrte Vorzeichen der A_i haben. Das elektrische und magnetische Feld

$$\boldsymbol{E} = \omega \begin{pmatrix} A_1' \\ A_2' \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \frac{\omega}{c} \begin{pmatrix} -A_2' \\ A_1' \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{11.62}$$

sind senkrecht zur Ausbreitungsrichtung und senkrecht zueinander. Das reskalierte Potential $a_\mu = eA_\mu/m$ hat die Form

$$a_\mu(x) = (0, cf_1, cf_2, 0) \tag{11.63}$$

mit dimensionslosen Funktionen $f_1(k\cdot x)$ und $f_2(k\cdot x)$. Für ein Teilchen mit beliebiger Anfangsgeschwindigkeit u_0^μ lautet die allgemeine Lösung (11.55)

$$\begin{aligned}
u^0 &= u_0^0 + \frac{\omega c}{\Omega}\sum \Delta f_p u_0^p + \frac{\omega c}{2\Omega}\sum(\Delta f_p)^2\\
u^1 &= u_0^1 + c\Delta f_1\\
u^2 &= u_0^2 + c\Delta f_2\\
u^3 &= u_0^3 + \frac{\omega c}{\Omega}\sum \Delta f_p u_0^p + \frac{\omega c}{2\Omega}\sum(\Delta f_p)^2,
\end{aligned}\tag{11.64}$$

wobei das Argument der Funktionen f_1, f_2 gleich $\Omega\tau$ ist. Wir erinnern daran, dass die Anfangsgeschwindigkeit und der Wellenzahlvektor die Bewegungskonstante $\Omega = k\cdot u_0$ bestimmen und wir die Abkürzung $\Delta f_p = f_p(\Omega\tau) - f_p(0)$ einführten. Summiert wird jeweils von $p=1$ bis $p=2$. Für eine elliptisch polarisierte harmonische Welle können folgende Funktionen f_p wählen,

$$f_1(x) = \alpha_0\delta\sin x \quad\text{und}\quad f_2(x) = -\alpha_0\tilde{\delta}\cos x \quad\text{mit}\quad \tilde{\delta} = \sqrt{1-\delta^2}\,. \tag{11.65}$$

Ein anfänglich ruhendes Teilchen

Für eine anfängliche ruhendes Teilchen ist $u_0^\mu = (c,0,0,0)^T$ und entsprechend $\Omega = \omega$ in der Lösung (11.64) der Bewegungsgleichung. Deshalb hat die Lösung die Form

$$\frac{u^\mu}{c} = \left(1+\frac{1}{2}(\Delta f_1)^2 + \frac{1}{2}(\Delta f_2)^2, \Delta f_1, \Delta f_2, \frac{1}{2}(\Delta f_1)^2 + \frac{1}{2}(\Delta f_2)^2\right) \tag{11.66}$$

mit $\Delta f_p = f_p(\omega\tau) - f_p(0)$. Für die harmonischen Funktionen in (11.65) können wir die 4-er Geschwindigkeit (11.66) leicht bezüglich der Eigenzeit τ integrieren um die Weltlinien zu bestimmen. Für ein anfänglich am Ursprung ruhendes Teilchen ist $x(0) = (0,0,0,0)^T$ und wir finden

$$\begin{aligned}
\frac{x^1}{\lambdabar} &= \alpha_0\delta(1-\cos\omega\tau)\\
\frac{x^2}{\lambdabar} &= \alpha_0\tilde{\delta}(\omega\tau - \sin\omega\tau)\\
\frac{x^3}{\lambdabar} &= \frac{\alpha_0^2}{8}\Big(\delta^2(2\omega\tau - \sin 2\omega\tau) + \tilde{\delta}^2(6\omega\tau + \sin 2\omega\tau - 8\sin\omega\tau)\Big)\\
x^0 &= c\tau + x^3\,.
\end{aligned}\tag{11.67}$$

Linear polarisierte Welle: Für $\delta = 1$ und $\tilde{\delta} = 0$ ist die ebene Welle linear polarisiert. Die Weltlinie hat die Form

$$x^0 = c\tau + x^3,\quad \frac{x^1}{\lambdabar} = \alpha_0(1-\cos\omega\tau),\quad \frac{x^3}{\lambdabar} = \frac{\alpha_0^2}{8}(2\omega\tau - \sin 2\omega\tau) \tag{11.68}$$

mit $x^2 = 0$. Das Teilchen bewegt sich in der durch $\boldsymbol{k}$ und $\boldsymbol{E}$ definierten Ebene mit einem Drift in die Richtung von $\boldsymbol{k}$. Der relativistische Faktor $\gamma = 1 + \alpha_0^2/2 \cdot \sin^2 \omega\tau$ ist gleich Eins für $\omega\tau = n\pi$. Bei diesen Zeiten kommt das Teilchen zur Ruhe. Eine typische Bahn im Raum ist in Fig. 11.2 geplotted.

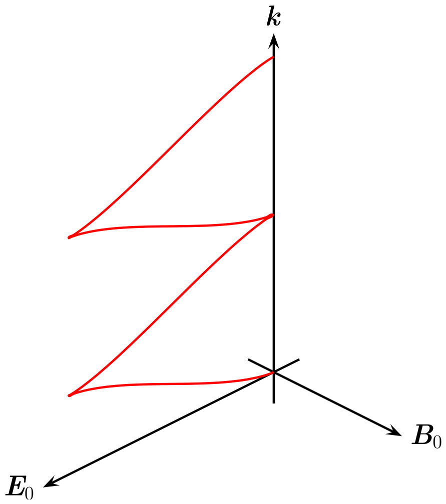


Abbildung 11.2: *Bahn eines Teilchens in einer linear polarisierten Welle. Gezeigt sind zwei Zyklen eines anfänglich im Ursprung ruhenden Teilchens. An den Knicken ruht das Teilchen.*

Zirkular polarisierte Welle: Für $\tilde{\delta} = \delta$, also für zirkular polarisiertes Licht, vereinfacht sich der Ausdruck (11.67) für die Weltlinie eines Teilchens zu

$$x^0 = c\tau + x^3, \quad \frac{x^1}{\lambdabar} = b_0(1 - \cos\omega\tau), \quad \frac{x^2}{\lambdabar} = b_0(\omega\tau - \sin\omega\tau), \quad x^3 = b_0 x^2 \,. \tag{11.69}$$

wobei $b_0 = \alpha_0/\sqrt{2}$ ist. Die Trajektorien zeigen Spitzen für $\omega\tau = 2\pi n$, siehe Fig. 11.3.

Ein im zeitlichen Mittel ruhendes Teilchen

Ausgangspunkt ist die Lösung (11.64), worin wir die Anfangsgeschwindigkeit derart wählen, dass das Teilchen im zeitlichen Mittel ruht. Zuerst wählen wir $u_0^p = -c\langle\Delta f_p\rangle$, so dass der Drift in die 1− und 2-Richtungen verschwindet. Danach wählen wir

$$u_0^3 = \frac{\omega v}{\Omega}\sum_p \langle\Delta f_p\rangle^2 - \frac{\omega c}{2\Omega}\sum_p \langle\Delta f_p^2\rangle \,, \tag{11.70}$$

damit der Drift in die 3-Richtung verschwindet. Die Bedingung $k \cdot u_0 = \omega(u_0^0 - u_0^3)/c = \Omega$ legt dann die Anfangsbedingung für u^0 fest. Führen wir noch die Funktionen

$$g_p = \Delta f_p - \langle\Delta f_p\rangle \tag{11.71}$$

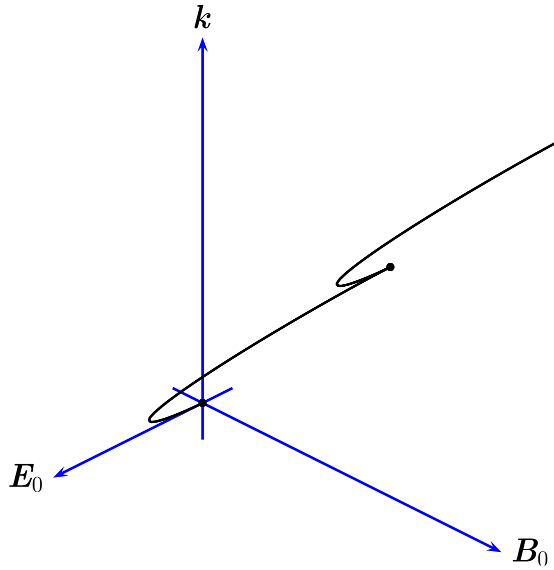


Abbildung 11.3: *Die Bewegung eines zur Zeit $t = 0$ ruhenden Teilchens in einer zirkular polarisierten Welle.*

ein, dann lautet die Lösung für ein im Zeitmittel ruhendes Teilchen

$$\left(\frac{u^\mu}{c}\right) = \left(\frac{\Omega}{\omega} + \frac{\omega}{2\Omega}\sum\left(g_p^2 - \langle g_p^2\rangle\right), g_1, g_2, \frac{\omega}{2\Omega}\sum\left(g_p^2 - \langle g_p^2\rangle\right)\right). \tag{11.72}$$

Der zeitabhängige relativistische γ-Faktor ist gegeben durch $\gamma = u^0/c$. Interessanter ist der zeitlich gemittelte γ-Faktor

$$\bar\gamma = \langle u^0/c\rangle = \Omega/\omega\,.$$

Die explizite Formel für den gemittelten Faktor $\bar\gamma$ folgt dann aus $u \cdot u = c^2$,

$$\bar\gamma^2 = \frac{\Omega^2}{\omega^2} = 1 + \sum_p \langle g_p^2\rangle \overset{(11.65)}{\longrightarrow} 1 + \frac{\alpha_0^2}{2}\,. \tag{11.73}$$

Setzen wir die harmonischen Funktionen f_p in (11.65) in das Resultat (11.72) ein, dann ergibt die Integration bezüglich der Eigenzeit folgende Trajektorie für ein Teilchen mit $x(0) = 0$,

$$\frac{x}{\lambdabar} = \left(\bar\gamma\omega\tau + \frac{x^3}{\lambdabar}, \frac{\alpha_0\delta}{\bar\gamma}(1-\cos\bar\gamma\omega\tau), -\frac{\alpha_0\tilde\delta}{\bar\gamma}\sin\bar\gamma\omega\tau, \frac{\alpha_0^2}{8\bar\gamma^2}\left(\tilde\delta^2 - \delta^2\right)\sin 2\bar\gamma\omega\tau\right). \tag{11.74}$$

Linear polarisierte Welle: Für eine linear polarisierte Welle mit $\tilde\delta = 0$ vereinfacht sich die Weltlinie für ein im Zeitmittel ruhendes Teilchen zu

$$x^0 = \bar\gamma c\tau + x^3, \quad \frac{x^1}{\lambdabar} = \frac{\alpha_0}{\bar\gamma}(1-\cos\bar\gamma\omega\tau), \quad \frac{x^3}{\lambdabar} = -\frac{\alpha_0^2}{8\bar\gamma^2}\sin 2\bar\gamma\omega\tau\,. \tag{11.75}$$

Die Anfangsgeschwindigkeit ist in die entgegengesetzte Richtung zu $\boldsymbol{k}$ und die Bahn beschreibt die den Laserphysikern wohlbekannt 8 in der von $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{k}$ aufgespannte Ebene, siehe Fig. 11.4. Die Geschwindigkeit ist maximal für $\sin(\bar{\gamma}\omega\tau) = \pm 1$. Dann schneiden sich die Bahnen der Acht.

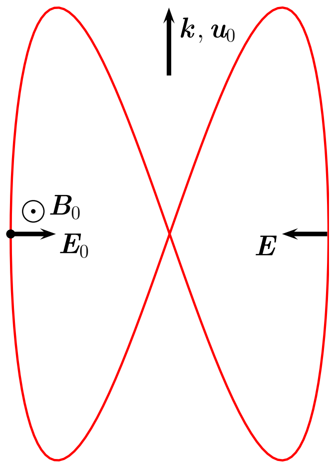


Abbildung 11.4: *Bewegung eines Teilchens in einer linear polarisierten Welle wenn das Teilchen im zeitlichen Mittel ruht.*

An dieser Stelle verschwindet das elektromagnetische Feld.
Zirkular polarisierte Welle: Für $\delta = \tilde{\delta}$ erhalten wir $(b_0 = \alpha_0/\sqrt{2})$

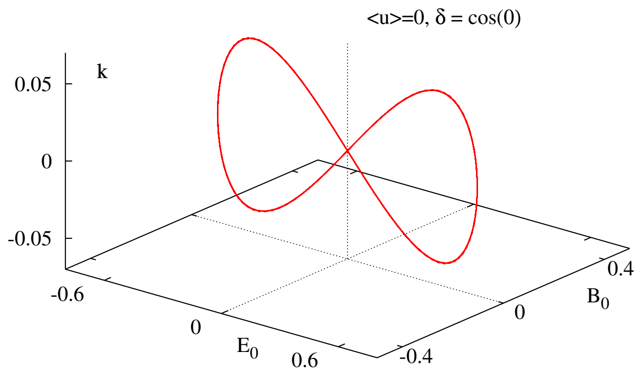
$$\frac{x^1}{\bar{\lambda}} = -\frac{b_0}{\bar{\gamma}}\cos\bar{\gamma}\omega\tau, \qquad \frac{x^2}{\bar{\lambda}} = -\frac{b_0}{\bar{\gamma}}\sin\bar{\gamma}\omega\tau, \qquad \frac{x^3}{\bar{\lambda}} = 0, \quad t = \bar{\gamma}\tau\,. \tag{11.76}$$

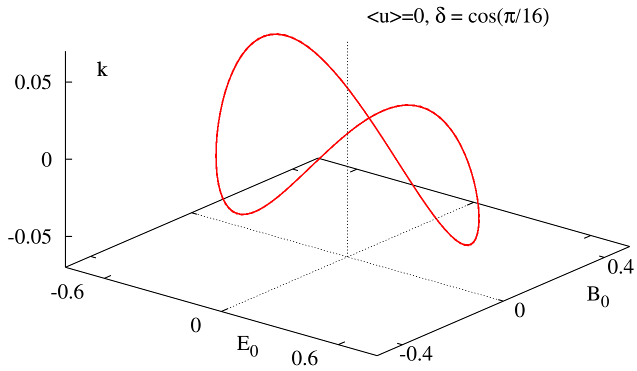
mit dem relativistischen Parameter $\bar{\gamma} = 1 + b_0^2$. Für feste Zeit beschreibt die Weltlinie einen Kreis in der Ebene senkrecht zu $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$.

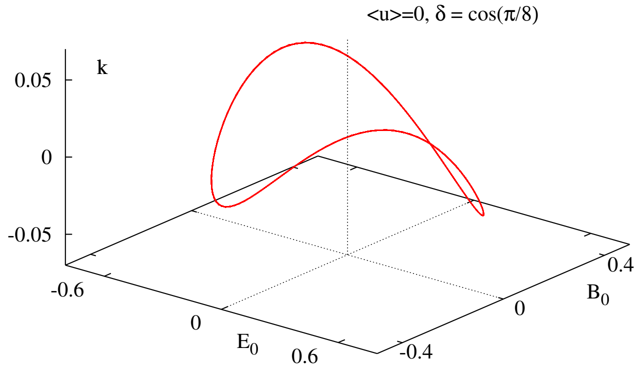
Die folgenden Figuren zeigen die Bahnkurven von relativistischen Teilchen mit mittlerer Geschwindigkeit $\langle \boldsymbol{u} \rangle = 0$. In allen Plots wählten wir die dimensionslose Amplitude $\alpha_0 = 1$, so dass

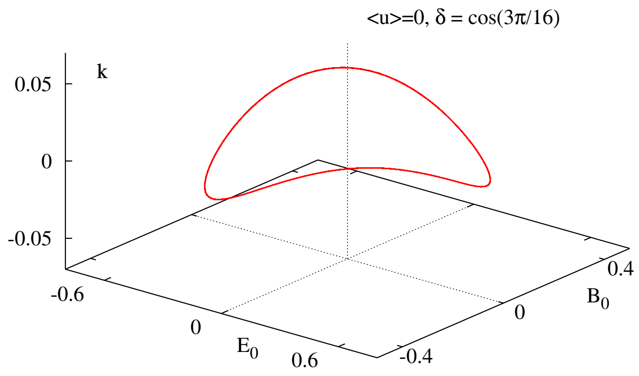
$$\bar{\gamma} = 1 + \frac{\alpha_0^2}{2} = \frac{3}{2}\,. \tag{11.77}$$

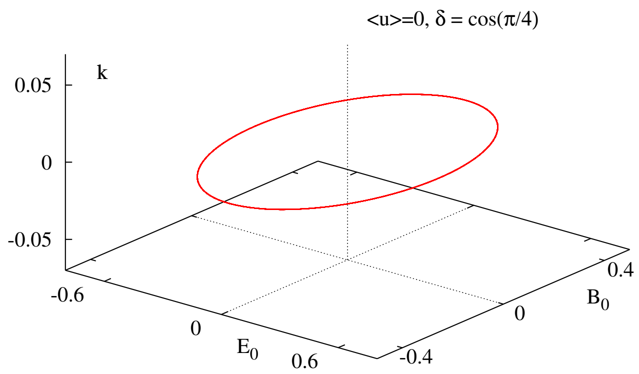
Der Elliptizitätsparameter δ hat die Werte 0, $\pi/16$, $\pi/8$, $3\pi/16$ und $\pi/4$.


<u>=0, δ = cos(0)
k
0.05
0
-0.05
-0.6
0
E0
0.6
-0.4
0
B0
0.4


<u>=0, δ = cos(π/16)
k
0.05
0
-0.05
-0.6
0
E0
0.6
-0.4
0
B0
0.4


<u>=0, δ = cos(π/8)
k
0.05
0
-0.05
-0.6
0
E0
0.6
-0.4
0
B0
0.4


<u>=0, δ = cos(3π/16)
k
0.05
0
-0.05
-0.6
0
E0
0.6
-0.4
0
B0
0.4


<u>=0, δ = cos(π/4)
k
0.05
0
-0.05
-0.6
0
E0
0.6
-0.4
0
B0
0.4