

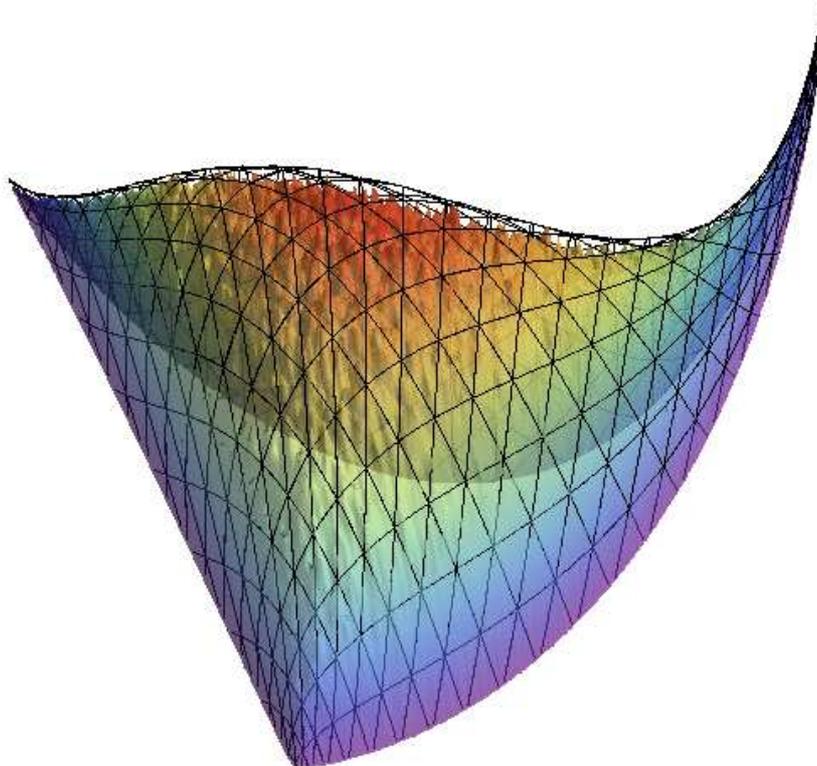
Friedrich-Schiller-Universität Jena
Physikalisch-Astronomische Fakultät
Theoretisch-Physikalisches Institut



seit 1558

Effektive Polyakov-Loop-Modelle für $SU(N)$ - und G_2 - Eichtheorien

Diplomarbeit



vorgelegt von Björn Wellegehausen
Jena, 2008

Das Deckblatt zeigt das reduzierte Haarmaß der Gruppe G_2 über dem Fundamentalbereich. Die Verteilung wurde von dem in dieser Arbeit vorgestellten Algorithmus zur Simulation der G_2 -Eichtheorie erzeugt. Das Gitter zeigt zum Vergleich die analytische Verteilung.

Friedrich-Schiller-Universität Jena
Physikalisch-Astronomische Fakultät
Theoretisch-Physikalisches Institut



seit 1558

Effektive Polyakov-Loop-Modelle für $SU(N)$ - und G_2 -Eichtheorien

Diplomarbeit

zur Erlangung des
akademischen Grades eines
Diplom-Physikers (Dipl.-Phys.)

vorgelegt von Björn Wellegehausen,
geboren am 03.07.1983 in Großburgwedel

Jena, 30. April 2009

1. Gutachter: Prof. Dr. phil. habil. A. Wipf

2. Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. H. Gies

Tag der Verleihung des Diploms:

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	9
2	Yang-Mills-Theorie	13
2.1	Yang-Mills-Theorie im Kontinuum	13
2.1.1	Quantisierung	14
2.1.2	Euklidische Theorie und Zustandssumme	15
2.1.3	Endliche Temperatur und statistische Systeme	16
2.1.4	Randbedingungen und Übergangsfunktion	16
2.2	Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter	17
2.2.1	Der Paralleltransport	18
2.2.2	Die Wilson-Wirkung	19
2.2.3	Kontinuumslimits	20
2.2.4	Monte-Carlo-Simulationen	21
2.3	Zusammenfassung	23
3	Grundlagen der Gruppentheorie	25
3.1	Lie-Gruppen und Lie-Algebren	25
3.2	Darstellungen und Charaktere	26
3.3	Cartan-Unteralgebra	27
3.4	Wurzeln und Gewichte	27
3.5	Weyls Charakter- und Dimensionsformel	29
3.6	Integration über Gruppen	29
3.7	Allgemeine Eigenschaften der Gruppen $SU(N)$	30
3.7.1	Leiteroperatoren und Generatoren für $SU(N)$	30
3.7.2	fundamentale Charaktere der Gruppe $SU(N)$	31
3.7.3	Das reduzierte Haarmaß	31
3.7.4	Zentrum	32
3.8	Eigenschaften $SU(3)$	32
3.9	Die exzeptionelle Gruppe G_2	33
3.9.1	G_2 -Lie-Algebra	33
3.9.2	Darstellungen, Charaktere und Haarmaß	34
3.9.3	Komplexe Darstellung	34
3.9.4	Reelle Darstellung	36
4	Confinement	39
4.1	Was ist Confinement?	39
4.2	Das statische Quark-Antiquark-Potential	40
4.3	Das statische Quark-Antiquark-Potential auf dem Gitter	42
4.4	Ordnungsparameter für Confinement-Deconfinement	
	Phasenübergänge	43
4.4.1	Der Polyakov-Loop	44
4.4.2	Confinement und Zentrumssymmetrie	45

5	Effektive Polyakov-Loop-Modelle	47
5.1	Starke Kopplungsentwicklung	47
5.2	Entwicklung für $SU(3)$	50
5.3	Entwicklung für $SU(4)$	51
6	Modell 1: $SU(3)$-Yang-Mills-Theorie	53
6.1	Der rotierte Polyakov-Loop	53
6.2	Das $6^3 \times 2$ -Gitter	55
6.3	Das $12^3 \times 2$ -Gitter	57
6.4	Das $16^3 \times 4$ -Gitter	59
6.5	Zusammenfassung	59
7	Modell 2: Erweiterte $SU(3)$-Yang-Mills-Theorie	61
7.1	Teilchen in der adjungierten Darstellung	61
7.2	Die Antizentrumsphase	61
7.3	Simulation der erweiterten Yang-Mills-Theorie	62
7.4	Der Deconfinement-Antizentrums-Übergang	64
7.5	Der Antizentrums-Confinement-Übergang	64
7.6	Zusammenfassung	64
8	Schwinger-Dyson-Methode	67
8.1	Invers Monte-Carlo	67
8.2	Schwinger-Dyson-Gleichungen	68
8.2.1	SDG für $SU(N)$	72
8.2.2	SDG für G_2	75
8.2.3	Implementierung der SDG	76
9	Die Dämon-Methode	77
9.1	Statistische Physik	77
9.1.1	Die mikrokanonische Verteilung	77
9.1.2	Der Übergang zur kanonischen Verteilung	78
9.2	Messung von Temperatur und die Dämon-Methode	79
9.2.1	Verallgemeinerung auf mehrere Wärmebäder	81
9.3	Der mikrokanonische Dämon	82
9.4	Der kanonische Dämon	83
10	Untersuchung der Dämon-Methode an einem 3-Kopplungs Modell	85
10.1	Das effektive Modell	85
10.2	Der mikrokanonische Dämon	89
10.2.1	Die Parameter und die <i>einfachste Methode</i>	89
10.2.2	Verbesserung des mikrokanonischen Dämons	93
10.2.3	Thermalisierungseffekte	93
10.2.4	Thermalisierung im Yang-Mills-Ensemble	97
10.3	Der kanonische Dämon	99
10.3.1	Thermalisierungseffekte und mikrokanonische Statistik	99
10.3.2	Entwicklung des Polyakov-Loops	103
10.4	Zusammenfassung	104
11	Vergleich von SDG- und Dämonmethode	105
11.1	Der Confinement-Deconfinement-Übergang	105

11.1.1	Das $6^3 \times 2$ -Gitter	105
11.1.2	Das $12^3 \times 2$ -Gitter	109
11.1.3	Das $16^3 \times 4$ -Gitter	112
11.1.4	Polyakov-Loop-Histogramme	115
11.2	Die Antizentrumsphase	116
11.2.1	nicht-zentrumsinvariante Wirkungen	120
11.2.2	Polyakov-Loop-Histogramme	121
11.3	$SU(N)$ -Yang-Mills	122
11.3.1	Effektive Wirkungen	122
11.3.2	$SU(4)$ -Phasenübergang	122
11.4	Zusammenfassung	124
12	Yang-Mills-Theorie mit Eichgruppe G_2	125
12.1	Theorie	125
12.1.1	Confinement in G_2 -Eichtheorie	125
12.1.2	Darstellungen von G_2 unter $SU(3)$ -Transformationen	126
12.2	Ein Algorithmus zur Simulation von Eichtheorien	128
12.3	Die Berechnung der Exponentialabbildung	131
12.4	Simulationsergebnisse	135
12.4.1	Das $12^3 \times 2$ -Gitter	136
12.4.2	Das $16^3 \times 4$ -Gitter	139
12.4.3	Das $16^3 \times 6$ -Gitter	140
12.4.4	Untersuchung der nicht exakten $\mathcal{Z}(3)$ -Zentrumssymmetrie	143
12.5	Das Quark-Antiquark Potential	148
12.5.1	<i>Casimir scaling</i>	148
12.5.2	<i>Smearing</i>	148
12.5.3	Simulationsergebnisse	149
12.6	Zusammenfassung	155
13	Effektive Polyakov-Loop-Modelle für G_2 Eichtheorie	157
13.1	Starke Kopplungs-Entwicklung für G_2	157
13.2	Phasendiagramm der effektiven Wirkung	158
13.2.1	Klassische Analyse	158
13.2.2	Monte-Carlo-Simulation	160
13.3	Ergebnisse der Dämon-Methode für die effektive Wirkung	162
13.3.1	Das $12^3 \times 2$ -Gitter	162
13.3.2	Das $16^3 \times 4$ -Gitter	163
13.3.3	Das $16^3 \times 6$ -Gitter	163
13.4	Ergebnisse der SDG für die effektive Wirkung	164
13.4.1	Das $12^3 \times 2$ -Gitter	165
13.4.2	Das $16^3 \times 4$ -Gitter	165
13.4.3	Das $16^3 \times 6$ -Gitter	165
13.5	Zusammenfassung	167
14	Yang-Mills-Theorie mit Eichgruppe G_2 und Higgsfeld	169
14.1	Theorie	169
14.1.1	Higgsmechanismus	169
14.1.2	Phänomenologische Beschreibung Higgs/ G_2	172
14.1.3	Der Lagrangian des Eich-Higgsmodells auf dem Gitter	173
14.2	Simulation des Eich-Higgs-Modells	175

14.2.1	Ergebnisse	176
14.3	Zusammenfassung	181
15	Zusammenfassung	183
15.1	Effektive Polyakov-Loop-Modelle und <i>inverse Monte-Carlo-Methoden</i>	183
15.2	$SU(N)$ -Eichtheorie	184
15.3	G_2 -Eichtheorie	184
15.4	Ausblick	186
A	Anhang	187
A.1	Konventionen	187
A.2	Zerlegung der reellen Darstellung der Gruppe G_2	188
A.3	mikrokanonische Monte-Carlo-Simulationen	190
A.4	Test des IHMC-Algorithmus für G_2 -Eichtheorie	191
A.4.1	Systematische Fehler	191

1 Einleitung

Vor etwas über einhundert Jahren dachten viele Physiker, die Beschreibung der Natur durch die Physik sei vollständig und abgeschlossen. Die Grundlagen waren damals die *Newtonsche Mechanik* [1] und *Maxwells klassische Feldtheorie* [2] zur Beschreibung der elektromagnetischen Wechselwirkung, die scheinbar widerspruchsfrei nebeneinander existieren konnten. Alle zu diesem Zeitpunkt bekannten Phänomene konnten durch diese beiden Theorien erklärt, wenn auch nicht verstanden werden, und physikalische Experimente zielten auf eine immer genauere Bestätigung eines deterministischen *Weltbildes* ab. Raum und Zeit waren zwei grundsätzlich verschiedene Dinge und bildeten einen konstanten, nicht zu beeinflussenden Hintergrund für die existierenden Theorien. Mit der Entdeckung von Zusammenhängen und Phänomenen wie z.B. dem Planck'schen Strahlungsgesetz [3] und dem Photoeffekt [4] und der Betrachtung makroskopischer und mikroskopischer Skalen kamen Zweifel an diesem Weltbild auf. Einstein konnte durch seine Spezielle Relativitätstheorie und später die Allgemeine Relativitätstheorie [5, 6] zeigen, dass Raum und Zeit kein starres Gebilde sind, sondern durch die Anwesenheit von Energie und Materie selbst zu dynamischen Objekten werden. Er vereinigte beide zu einer 4-dimensionalen *Raumzeit* und ermöglichte durch seine Theorie eine neue und tiefere Beschreibung des Makrokosmos. Auf der anderen Seite entwickelte sich die Quantenmechanik [7, 8, 9], verknüpft mit Namen wie Schrödinger, Born, Heisenberg, Bohr und Anderen, zu einem leistungsfähigen Instrument für eine jedoch nicht mehr deterministische Beschreibung des Mikrokosmos. Beide Theorien sind durch vielfältige Experimente bestätigt, und dennoch stehen sie im Widerspruch zueinander. In der Allgemeinen Relativitätstheorie kann der Zustand eines Systems exakt angegeben werden, die Quantenmechanik zeichnet weiterhin die Zeit gegenüber dem Raum aus und ist deshalb nicht lorentzinvariant.

Aber gerade dieser scheinbare Widerspruch war es, der in den folgenden Jahren eine rasante Entwicklung in der Physik auslöste, die bis heute anhält und zum erfolgreichsten und am besten überprüften Modell der Wissenschaft, dem *Standardmodell der Elementarteilchen* geführt hat. Nach dem heutigen Stand der Wissenschaft gibt es 4 fundamentale Wechselwirkungen, die *elektrische*, die *schwache*, die *starke Wechselwirkung* sowie die *Gravitation*, die mit Ausnahme der zuletzt genannten alle im Standardmodell vereinigt werden. Das Prinzip der Vereinigung bzw. Vereinheitlichung war bei allen Entwicklungen von physikalischen Theorien eine treibende Kraft. Zuerst gelang dies Maxwell, dann Einstein mit seiner Vereinigung von Raum und Zeit. Dirac postulierte eine lorentzinvariante Beschreibung des Elektrons [10], also eine relativistische Quantenfeldtheorie und Feynman, Schwinger und Tomonaga erhielten für ihre *Quantenelektrodynamik* [11, 12, 13], die durch eine Quantisierung der Elektrodynamik Vorhersagen in bislang nicht gekannter Perfektion ermöglicht, den Nobelpreis. Spätestens nach der Entdeckung der schwachen Wechselwirkung, die sich insbesondere durch Phänomene wie den β -Zerfall bemerkbar macht, sowie der starken Wechselwirkung durch die Entdeckung des Neutrons 1932 durch Chadwick [14], wurde und wird immer noch nach einer einheitlichen Theorie zur Beschreibung aller 4 Wechselwirkungen gesucht.

Eine wichtige Erkenntnis ist dabei, dass alle diese Theorien auf Symmetrien beruhen und

1 Einleitung

Freiheitsgrade besitzen, die die beschriebene Physik nicht ändern, die sogenannte *Eichfreiheit*, die bereits aus der klassischen Elektrodynamik bekannt war. Weiter wurde entdeckt, dass die Menge der Eichtransformationen eine Gruppe bildet, die *Eichgruppe*. Die *Quantenelektrodynamik* ist eine $U(1)$ -Eichtheorie, basierend auf der abelschen Eichgruppe $U(1)$. Dieses Prinzip wurde von Yang und Mills 1954 in einer Arbeit über den Isospin [15], eine mit einer inneren Symmetrie der Theorie verbundenen Quantenzahl von Elementarteilchen, weiter verfolgt, in dem sie den Isospin mit Hilfe einer $SU(2)$ -Eichtheorie beschrieben. Die $SU(2)$ ist eine nichtabelsche Gruppe, und seitdem werden nichtabelsche Eichtheorien auch Yang-Mills-Theorien genannt. Die erste große Vereinheitlichung gelang Glashow, Salam und Weinberg [16, 17, 18] durch Zusammenführen der Elektrodynamik mit der schwachen Wechselwirkung zur sogenannten *elektroschwachen* Wechselwirkung. Sie beruht auf der Eichgruppe $SU(2) \times U(1)$. Den endgültigen Beweis, dass das Prinzip der Eichfreiheit ein fundamentales physikalisches Phänomen zu sein scheint, lieferten dann Fritsch, Gell-Mann und Leutwyler [19, 20], indem sie die starke Wechselwirkung durch eine $SU(3)$ -Eichtheorie erklären konnten. Im Standardmodell, welches die Eichgruppe $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ besitzt, werden diese drei Wechselwirkungen gemeinsam beschrieben. Lediglich die Gravitation lässt sich nicht in derselben Weise wie die übrigen Wechselwirkungen in dieses Modell einbetten. Dieses Problem ist weiterhin ein aktuelles Forschungsgebiet und wird durch Ansätze wie beispielsweise die *String Theorie* [21, 22] zu lösen versucht.

Die in der Natur beobachteten Kräfte zwischen Teilchen lassen sich durch diese 4 fundamentalen Wechselwirkungen beschreiben. Die Vermittlung der Kraft wird dabei durch Austauschteilchen (Eichbosonen) beschrieben. In der Elektrodynamik ist dieses Eichboson das Photon, in der schwachen Wechselwirkung sind es W- und Z-Bosonen, in der starken Wechselwirkung die Gluonen und in der Gravitation das bislang noch nicht entdeckte Graviton. Diese Eichbosonen wechselwirken mit fundamentalen fermionischen Elementarteilchen, den Quarks und Leptonen, die die Bausteine der Materie bilden und ihre Masse über ein in Experimenten an Teilchenbeschleunigern bislang noch nicht entdecktes Higgs-Teilchen erhalten [23].

Auch wenn das Standardmodell lange bekannt ist, so ist es dennoch nicht in allen Aspekten vollständig verstanden. Die Quarks der *Quantenchromodynamik* tragen, genau wie die Gluonen auch, eine Farbladung. Jedoch wurden in der Natur noch keine freien einzelnen Quarks oder Gluonen beobachtet, die Farbladung wird abgeschirmt. Dieses Verhalten, was charakteristisch für nichtabelsche Eichtheorien zu sein scheint, wird als *Confinement* bezeichnet und ist ein aktuelles Forschungsgebiet. Es gilt die Frage zu klären, welcher Mechanismus hinter diesem Farbeinschluss in Eichtheorien steckt. Bei Bedingungen wie sie kurze Zeit nach dem Urknall in unserem Universum herrschten, also bei hohen Temperaturen und Drücken, konnten Quarks und Gluonen auch frei existieren, das sogenannte Quark-Gluon-Plasma. Es muss also irgendwann einen Übergang von dieser *Deconfinement*-Phase in eine *Confinement*-Phase gegeben haben. In der Gluodynamik, dem Teil der Quantenchromodynamik welcher nur die Wechselwirkung der Gluonen untereinander beschreibt, gibt es bei endlicher Temperatur einen solchen Confinement-Deconfinement-Phasenübergang.

Die analytische Untersuchung der nichtabelschen Eichtheorien ist kompliziert. Gerade der interessante Aspekt des Confinement ist aufgrund der starken Kopplung der Theorie bei großen Abständen durch störungstheoretische Ansätze nicht zugänglich. Wilson [24] schlug 1974 eine Eichtheorie auf einem diskreten Raumzeit-Gitter vor, die im Kontinuumslimes mit der Yang-Mills-Theorie übereinstimmt. Seitdem ist es möglich, mit Hilfe

von Computern und Monte-Carlo-Simulationen auch nichtstörungstheoretische Phänomene von Eichtheorien zu untersuchen.

Aber selbst die nichtstörungstheoretische Untersuchung von Gittereichtheorien liefert kein eindeutiges Bild des Mechanismus, der hinter dem Confinement steht. Es zeigt sich, dass wieder Symmetrien, die $Z(N)$ -Zentrumssymmetrie und der Polyakov-Loop, eine Observable aus Eichtheorien, die in Zusammenhang mit der freien Energie von Quarks steht, eine wichtige Rolle spielen. Eine weitere Möglichkeit zur Untersuchung des Confinement stellen somit effektive Theorien dar, die als Freiheitsgrade nur noch den Polyakov-Loop enthalten und deshalb sehr viel einfacher zu verstehen sind als die volle Yang-Mills-Theorie. Nach einer Vermutung von Svetitsky und Yaffe [25] bilden Spinmodelle in D Dimensionen mit Zentrum $Z(N)$ als *globaler Symmetrie* eine solche effektive Theorie zur Beschreibung von $SU(N)$ Eichtheorien in $D+1$ Dimensionen. Als Modelle mit diskreten Einstellmöglichkeiten des Spins sind hier das Ising-Modell [26] und Pottsmodelle zu nennen, eine Verallgemeinerung bilden die angesprochenen Polyakov-Loop-Modelle. Für die Gluodynamik konnte gezeigt werden, dass sie bei endlicher Temperatur einen 1. Ordnungs-Phasenübergang besitzt [27]. Die Reproduktion dieser Phasenstruktur stellt deshalb eine Forderung an effektive Modelle dar, die für die $SU(2)$ -Eichtheorie gezeigt werden konnte [28].

In einem Teil dieser Arbeit soll es deshalb darum gehen, effektive Wirkungen für eine $SU(N)$ Eichtheorie zu finden, an die als Erweiterung auch eine Ladung in Form eines effektiven Potentials gekoppelt wird. Da ein analytischer Übergang von der Eichtheorie zur effektiven Beschreibung nicht immer durchführbar ist, sollen hier zwei numerische Methoden (*inverse Monte-Carlo-Methoden*) untersucht werden, mit deren Hilfe es möglich ist eine effektive Wirkung zu konstruieren. Dies sind zum einen *Schwinger-Dyson-Gleichungen*, die auf Pfadintegralidentitäten und Gruppeneigenschaften beruhen und zum anderen ein rein statistischer Zugang mit der *Dämon-Methode* [29].

Aber auch in Eichtheorien mit einem trivialen Zentrum kann es Confinement geben, wie Arbeiten von [30, 31] zeigen. Die Zentrumssymmetrie kann deshalb nicht die einzige Erklärung für das Phänomen des Confinements sein, es muss einen anderen Confinement-Mechanismus geben. Eine mögliche Erklärung bieten hier *center vortices* und eine *domain structure* des Yang-Mills-Vakuums [32], die zu einem bestimmten Verhalten, dem *Casimir scaling* der *string tension* führen, was in Simulationen überprüft werden kann [33].

In einem zweiten Teil dieser Arbeit geht es deshalb um eine solche Eichtheorie mit trivialem Zentrum, die G_2 -Yang-Mills-Theorie. Auch hierfür sollen effektive Wirkungen gefunden werden. Des Weiteren soll ein Higgsteilchen an die Theorie gekoppelt werden, da es hier interessante Zusammenhänge zu $SU(3)$ -Eichtheorien und der *Quantenchromodynamik* gibt.

Im Einzelnen ist die Arbeit wie folgt strukturiert:

In den Kapiteln 2 und 3 werden physikalische Grundlagen und mathematische Methoden zur Behandlung von Eichtheorien im Kontinuum und auf dem Gitter zusammengestellt. Insbesondere sollen diese Kapitel einen Überblick über die in der weiteren Arbeit benötigten Aspekte der Gruppentheorie geben. Außerdem wird gezeigt, wie das Pfadintegral der Kontinuumstheorie zu einer euklidischen Zustandssumme auf dem Gitter wird und wie mit Hilfe von Monte-Carlo-Methoden Erwartungswerte der Theorie berechnet werden können. Kapitel 4 gibt einen Überblick über Confinement, Confinement-Mechanismen sowie

1 Einleitung

Ordnungsparameter für einen Confinement-Deconfinement-Phasenübergang. Im Anschluss wird in Kapitel 5 gezeigt wie es analytisch möglich ist, mit Hilfe einer Entwicklung der Yang-Mills-Theorie mit beliebiger Eichgruppe Beiträge zu einer effektiven Theorie, formuliert in Polyakov-Loops, zu bekommen.

Die Kapitel 6 und 7 beschäftigen sich mit der Simulation von $SU(3)$ -Eichtheorien. Hier werden im Wesentlichen Ergebnisse von Monte-Carlo-Simulationen gezeigt. Im Anschluss werden in den Kapiteln 8 und 9 die theoretischen Grundlagen zu *inversen Monte-Carlo-Methoden (IMC)* gelegt und die *Schwinger-Dyson-Gleichungen* sowie *Dämon-Methoden* abgeleitet. Kapitel 10 widmet sich ausführlich der Dämon-Methode. Hier wird anhand eines einfachen Beispiels erarbeitet, wie *Dämon-Methoden* anzuwenden sind. Im Kapitel 11 werden dann beide *IMC-Methoden*, *Schwinger-Dyson-Gleichungen* und *Dämon*, miteinander verglichen und auf die zuvor in dieser Arbeit besprochenen Theorien angewendet. Insbesondere soll hier der Confinement-Deconfinement-Übergang reproduziert werden.

Kapitel 12 beschäftigt sich dann mit der G_2 -Eichtheorie. Hier wird zunächst ein Bild des Confinement in Eichtheorien mit trivialem Zentrum gegeben und im Anschluss ein Monte-Carlo-Algorithmus, aufbauend auf einem *Hybrid-Monte-Carlo*, zur Simulation dieser Eichtheorie entwickelt. Der Rest des Kapitels zeigt Simulationsergebnisse für verschiedene Observable wie den Polyakov-Loop und Quark-Antiquark-Potentiale. In diesem Zusammenhang wird auch *Casimir scaling* untersucht. Im Kapitel 13 werden dann mit Hilfe der *Dämon-Methode* und *Schwinger-Dyson-Gleichungen* effektive Wirkungen für G_2 -Yang-Mills vorgestellt und getestet. Im letzten Kapitel (14) dieser Arbeit wird schließlich ein G_2 -Higgsmodell besprochen, mit dem es möglich ist zwischen G_2 und $SU(3)$ -Yang-Mills zu interpolieren.

Kapitel 15 gibt eine Zusammenfassung der Ergebnisse und einen Ausblick auf mögliche zukünftige Untersuchungen, die im Rahmen dieser Arbeit nicht mehr durchgeführt werden konnten.

2 Yang-Mills-Theorie

Nichtabelsche Eichtheorien wurden, wie in der Einleitung bereits erwähnt, zuerst von Yang und Mills [15] in einer Arbeit über den Isospin beschrieben und werden seitdem Yang-Mills-Theorien genannt. Sie sind ein wesentlicher Bestandteil des Standardmodells der Elementarteilchen, in dem Kräfte zwischen Elementarteilchen durch den Austausch von Eichbosonen (\mathfrak{A}_μ) beschrieben werden. Die Dynamik dieser Bosonen wird durch die Yang-Mills-Wirkung S_{YM} beschrieben und die der Fermionen (Ψ) über einen Dirac-Term. Vernachlässigt man die Dynamik der Fermionen, also im Falle der Quantenchromodynamik (QCD) die Dynamik der Quarks, erhält man eine Theorie, die nur noch dynamische Eichbosonen, für die QCD sind dies die 8 Gluonen, enthält. Deshalb nennt man diese Theorie auch Gluodynamik.

In diesem Kapitel wird beschrieben, worum es sich bei einer Yang-Mills-Theorie handelt. Dazu wird zuerst eine Formulierung im Kontinuum angegeben und später der Übergang zu einer Gittereichtheorie vollzogen. Als Referenzen wurden in diesem Kapitel verwendet [34, 35, 36, 37].

2.1 Yang-Mills-Theorie im Kontinuum

Yang-Mills-Theorien sind eine nichtabelsche Verallgemeinerung der Elektrodynamik ohne äußere Felder. Um zu verdeutlichen was Eichtheorie überhaupt bedeutet wird jedoch zunächst die Lagrangedichte \mathcal{L} mit Materie (Dirac-Term) betrachtet (Signatur der Metrik $(-+++)$).

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \text{tr} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) + \bar{\Psi} (\not{D} - m) \Psi \quad (2.1)$$

mit der kovarianten Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu + ig\mathfrak{A}_\mu \quad \text{und} \quad \not{D} = \gamma^\mu D_\mu \quad (2.2)$$

Die Feldstärke $F_{\mu\nu}$ ist gegeben durch den Kommutator der kovarianten Ableitungen in Richtung μ und ν , also

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{ig} [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu \mathfrak{A}_\nu - \partial_\nu \mathfrak{A}_\mu + ig [\mathfrak{A}_\mu, \mathfrak{A}_\nu] \quad (2.3)$$

Die γ -Matrizen erfüllen die Clifford-Algebra

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \quad , \quad \eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \quad (2.4)$$

Die Eichkopplung g beschreibt die Stärke der Kopplung der Gluonen in der Theorie, in der Elektrodynamik entspricht sie der Elementarladung e . Im Falle der Elektrodynamik

2 Yang-Mills-Theorie

verschwindet der Kommutator zwischen \mathfrak{A}_μ und \mathfrak{A}_ν , es handelt sich um eine abelsche Eichtheorie mit Eichgruppe $U(1)$. Für beliebige Eichgruppen G ist dies jedoch nicht der Fall. Die Lagrangedichte ist invariant unter der folgenden Transformation (Eichtransformation) mit $\Omega(x) \in G$

$$\Psi \rightarrow \Psi'(x) = \Omega(x)\Psi(x) \quad (2.5)$$

$$\bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi}'(x) = \bar{\Psi}(x)\Omega^\dagger(x) \quad (2.6)$$

$$\mathfrak{A}_\mu(x) \rightarrow \mathfrak{A}'_\mu(x) = \Omega(x)\mathfrak{A}_\mu(x)\Omega^\dagger(x) + \frac{1}{ig}\Omega(x)\partial_\mu\Omega^\dagger(x) \quad (2.7)$$

Schreibt man $\Omega(x) = \exp(-ig\chi(x)) \in G$ mit $\chi(x) \in \mathfrak{g}$ aus der Algebra zu G , so ergibt sich unter Benutzung der später noch einmal genauer definierten Linksableitung eines Gruppenelementes für die letzte Gleichung

$$\mathfrak{A}_\mu(x) \rightarrow \mathfrak{A}'_\mu(x) = \Omega(x) \{ \mathfrak{A}_\mu(x) - \partial_\mu\chi(x) \} \Omega^\dagger(x) \quad (2.8)$$

Dies ist die Verallgemeinerung der aus der Elektrodynamik bekannten Eichfreiheit des Vektorpotentials. Wenn die Eichtransformationen Ω Elemente der Eichgruppe G sind, so muss das Eichfeld χ und damit auch das Vektorpotential aus der Algebra \mathfrak{g} , also dem Tangentialraum an das e -Element der Gruppe G , sein. Um die Invarianz der Wirkung unter diesen Eichtransformationen zu garantieren, muss für die kovariante Ableitung folgendes Transformationsverhalten gefordert werden

$$D_\mu \rightarrow D'_\mu(x) = \Omega(x)D_\mu(x)\Omega^\dagger(x) \quad (2.9)$$

Aufgrund der Invarianz der Wirkung unter lokalen Eichtransformationen werden Theorien dieser Art auch als Eichtheorien bezeichnet. Das Feld Ψ beschreibt hierbei die Fermionen (Materiefeld) der Theorie und das Feld \mathfrak{A}_μ die Eichbosonen (Austauschteilchen der Kräfte). Ein Ausschreiben der Lagrangefunktion zeigt, dass im nichtabelschen Fall Terme mit Potenzen größer 2 im Eichfeld auftreten. Dies sorgt für eine Selbstwechselwirkung zwischen den Eichbosonen, die im abelschen Fall nicht gegeben ist (die Photonen der Elektrodynamik wechselwirken z.B. nicht miteinander, sondern nur mit dem Materiefeld). Den Übergang zu einer reinen Eichtheorie (Yang-Mills-Theorie) erhält man hieraus in dem man die Masse der Fermionen so groß wählt, dass keine fermionischen Zustände mehr angeregt werden können und der Dirac-Term damit in der Dynamik vernachlässigt werden kann.

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = \frac{1}{4} \text{tr} (F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \quad (2.10)$$

2.1.1 Quantisierung

Die Quantisierung von Observablen in der Eichtheorie erfolgt hier durch die Pfadintegralmethode. Das Pfadintegral ist gegeben durch

$$Z = \int \mathcal{D}\mathfrak{A} e^{iS_{\text{YM}}[\mathfrak{A}]} \quad (2.11)$$

mit der Wirkung

$$S_{\text{YM}}[\mathfrak{A}] = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{YM}}[\mathfrak{A}] \quad (2.12)$$

Es ist also ein Funktionalintegral über die unbeschränkten Elemente \mathfrak{A} der Algebra \mathfrak{g} . Zeitgeordnete Erwartungswerte von Observablen \mathcal{O} lassen sich demnach wie folgt berechnen

$$\langle T\mathcal{O} \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\mathfrak{A} \mathcal{O}(\mathfrak{A}) e^{iS_{\text{YM}}[\mathfrak{A}]} \quad (2.13)$$

2.1.2 Euklidische Theorie und Zustandssumme

In dieser Arbeit soll die Yang-Mills-Theorie mit Hilfe des Computers auf einem Raumzeitgitter betrachtet werden. Zur Berechnung von Erwartungswerten dienen Monte-Carlo-Methoden, die jedoch erfordern, dass der Integrand an einer Stelle des Phasenraums lokalisiert ist. Dies ist in einer Theorie in Minkowski-Raumzeit jedoch nicht gegeben, da der 'Boltzmannfaktor' $e^{iS[\mathfrak{A}]}$ stark oszilliert. Damit eignet sich diese Formulierung der Theorie nicht für numerische Simulationen und es muss vorher zu einer euklidischen Raumzeit mit Signatur $(+ + + +)$ der Metrik übergegangen werden. Dies geschieht durch eine Wick-Rotation, die eine Fortsetzung der Raumzeit in die komplexe Ebene darstellt. Mit der Transformation $t \rightarrow i\tau$ erreicht man die gewünschte Signatur der Metrik. Für die Lagrangefunktion und die Wirkung ergibt sich damit

$$\begin{aligned} dt &\rightarrow i d\tau \\ \partial_t &\rightarrow -i \partial_\tau \\ \mathfrak{A}_0 &\rightarrow -i \mathfrak{A}_0 \\ iS_{\text{YM}}[\mathfrak{A}] &\rightarrow -S_{\text{E}}[\mathfrak{A}] = -\frac{1}{4} \int d\tau \int d^3x \text{tr} (F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Die letzte Beziehung gilt, weil

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} &= 2F_{0i} F^{0i} + F_{ik} F^{ik} \\ &= -2F_{0i} F_{0i} + F_{ik} F_{ik} \stackrel{t \rightarrow i\tau}{=} 2F_{0i} F_{0i} + F_{ik} F_{ik} = F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Damit ergibt sich als euklidisches Pfadintegral

$$Z_{\text{E}} = \int \mathcal{D}\mathfrak{A} e^{-S_{\text{E}}[\mathfrak{A}]} \quad (2.16)$$

Nun ist der Boltzmannfaktor reell, lokalisiert um das klassische Minimum der Wirkung und damit zugänglich für numerische Simulationen. Es muss im Folgenden nur noch die Raumzeit diskretisiert und eine Wirkung gefunden werden, die im Kontinuumslimit, also einer immer feiner werdenden Diskretisierung, gegen die Kontinuumswirkung geht. Zuvor soll jedoch eine Verbindung zu statistischen Systemen und dem Begriff der Temperatur hergestellt werden.

2.1.3 Endliche Temperatur und statistische Systeme

Die Yang-Mills-Theorie soll in dieser Arbeit auf dem Gitter bei endlicher Temperatur simuliert werden. Wie ist jedoch Gl. (2.16) mit einer Temperatur in Verbindung zu bringen? Dazu wird ein statistisches System mit Hamiltonoperator H betrachtet. Die Zustandssumme im kanonischen Ensemble ist im thermodynamischen Gleichgewicht definiert durch

$$Z = \text{tr} \exp(-\beta_T H) = \int \langle q | \exp(-\beta_T H) | q \rangle dq \quad (2.17)$$

mit der inversen Temperatur $\beta_T = \frac{1}{T}$. Diese Spur läßt sich ausrechnen, wenn man dazu Übergangsamplituden zwischen zwei Zuständen betrachtet die durch das Pfadintegral gegeben sind

$$\langle p(t) | \exp(-iHt) | q(0) \rangle = \int_{q'(0)=q(0)}^{q'(t)=p(t)} \mathcal{D}q' \exp(iS[q']) \quad (2.18)$$

Dies ist ein Integral über alle Wege mit Anfangspunkt $q(0)$ zum Zeitpunkt $t_1 = 0$ und Endpunkt $p(t)$ zum Zeitpunkt $t_2 = t$. Wick-Rotation führt zu

$$\langle p(\tau) | \exp(-H\tau) | q(0) \rangle = \int_{q'(0)=q(0)}^{q'(\tau)=p(\tau)} \mathcal{D}q' \exp(-S_E[q']) \quad (2.19)$$

Das gewünschte Ergebnis erhält man nun für $q(0) = p(\tau) = q$ und $\tau = \beta_T$ und es folgt für die Zustandssumme

$$Z = \int dq \oint_{q'=q(0)=q(\beta_T)} \mathcal{D}q' \exp(-S_E[q']) \quad (2.20)$$

Die Zustandssumme ist also ein Integral über alle in Zeitrichtung periodischen Wege. Damit übersetzen sich endliche Temperaturen in periodische Randbedingungen (für Bosonen, für Fermionen erhält man antiperiodische Randbedingungen) in euklidischer Zeitrichtung und es gilt $\frac{1}{T} = \beta_T = \tau$. Für die Yang-Mills-Theorie bedeutet dies Periodizität der Eichfelder

$$\mathfrak{A}_\mu(x, \tau) = \mathfrak{A}_\mu(x, \tau + \beta_T) \quad (2.21)$$

Diese Beziehung gilt jedoch nur bis auf Eichtransformationen. Da bei der Forderung von periodischen Randbedingungen sich jedoch auch Bedingungen an die Eichtransformationen ergeben, werden diese Übergangsfunktionen im nächsten Abschnitt genauer betrachtet.

2.1.4 Randbedingungen und Übergangsfunktion

Unter der Forderung von periodischen Randbedingungen in Richtung ν ergibt sich folgendes Transformationsverhalten der Eichfelder

$$\mathfrak{A}_\mu(x + L_\nu e_\nu) = \Omega_\nu(x) (\mathfrak{A}_\mu(x) + \partial_\mu) \Omega_\nu^\dagger(x) \quad (2.22)$$

mit der Übergangsfunktion $\Omega_\nu(x)$. Zweimaliges Anwenden ergibt

$$\begin{aligned}
 & \mathfrak{A}_\mu(x + L_\nu e_\nu + L_\rho e_\rho) \\
 &= \Omega_\nu(x + L_\rho e_\rho)(\mathfrak{A}_\mu(x + L_\rho e_\rho) + \partial_\mu)\Omega_\nu^\dagger(x + L_\rho e_\rho) \\
 &= \Omega_\nu(x + L_\rho e_\rho)(\Omega_\rho(x)(\mathfrak{A}_\mu(x) + \partial_\mu)\Omega_\rho^\dagger(x) + \partial_\mu)\Omega_\nu^\dagger(x + L_\rho e_\rho)
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Vertauscht man die Richtungen erhält man folgende Bedingung für die Übergangsfunktionen

$$\Omega_\nu(x + L_\rho e_\rho)\Omega_\rho(x) = \Omega_\rho(x + L_\nu e_\nu)\Omega_\nu(x)z_{\nu\rho} \tag{2.24}$$

wobei der Twist-Tensor $z_{\nu\rho} \in \mathcal{Z}(G)$ im Zentrum der Eichgruppe liegen muss, also mit allen Elementen aus G vertauschen muss. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit spielt er in der Definition des Polyakov-Loops eine zentrale Rolle.

2.2 Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter

Eine vollständig analytische Behandlung der Yang-Mills-Theorie ist nicht möglich. Mit Hilfe von Störungstheorie ist man zwar in der Lage, analytische Ergebnisse im Falle kleiner Eichkopplung g zu erhalten, in dieser Arbeit sollen jedoch die Eigenschaften von Eichtheorien und effektiven Modellen auch im Bereich der starken Kopplung und insbesondere am Confinement-Deconfinement-Übergang der Theorie untersucht werden. Eine Möglichkeit hierzu bietet die Formulierung der Theorie auf einem diskreten hyperkubischen Raumzeit-Gitter in Verbindung mit Monte-Carlo-Simulationen. Dies wurde zuerst von Wilson in [24] vorgeschlagen und deshalb heißt die Gitterwirkung, die der Yang-Mills-Wirkung im Kontinuum entspricht, Wilson-Wirkung. Die Einführung eines Gitters stellt gleichzeitig eine Regularisierung der Theorie dar, weil durch die Diskretisierung der Raumzeit keine beliebig hohen Impulsmoden angeregt werden (UV-cut-off), die zu Divergenzen in der Theorie führen können. Man spricht hierbei auch von Gitterregularisierung. Ein Problem bei der Behandlung von Eichtheorien mit einem Computer besteht in der Eichfreiheit. Die Eichbosonen sind wie gezeigt Elemente der Liealgebra und damit unbeschränkt. Durch Umeichung können somit beliebig große Werte der Felder erzeugt werden, die auf einem Computer nicht darstellbar sind. Eine Möglichkeit wäre das Arbeiten in einer speziellen Eichung, also das Einfügen eines eichfixierenden Terms in die Wirkung, eine andere Möglichkeit stellt ein Variablenwechsel von den unbeschränkten Eichfeldern $\mathfrak{A}_{x,\mu}$ zu den sogenannten Link-Variablen $U_{x,\mu}$ dar, die beschränkt sind. Im Folgenden wird letztere Methode vorgestellt.

Auf einem Computer ist es nur möglich, endliche Raumzeitvolumina zu betrachten.

$$V = L_t \times L_s^3 \tag{2.25}$$

L_t ist die Ausdehnung der Raumzeit in Zeitrichtung, L_s die Ausdehnung in Raumrichtung. Weiterhin sind nur diskrete Werte möglich, was die Einführung eines minimalen Abstandes notwendig macht. Die Raumzeit wird diskretisiert.

$$L_t = a_t N_t \quad \text{und} \quad L_s = a_s N_s \tag{2.26}$$

2 Yang-Mills-Theorie

Die ganzen Zahlen N_t und N_s sind dimensionslos. Das Raumzeitgitter Γ wird durch folgende Menge an Vektoren aufgespannt

$$\Gamma = \left\{ x \left| x = ia_t e_0 + \sum_{\mu=1}^D j_\mu a_s e_\mu \quad \text{mit} \quad 0 < i < N_t, 0 < j_\mu < N_s \right. \right\} \quad (2.27)$$

$D = 3$ ist die Anzahl der räumlichen Dimensionen des Gitters. Im weiteren Verlauf wird $a_s = a_t = a$ gesetzt. Auf einem Gitter können Ableitungen nicht in derselben Art definiert werden wie im Kontinuum, weil es keine beliebig kleinen Abstände gibt. Deshalb werden Variablen (Paralleltransporter) eingeführt, die die kovariante Ableitung der Yang-Mills-Wirkung ersetzen und auch auf einem Gitter sinnvoll definiert werden können.

2.2.1 Der Paralleltransport

Zunächst wird gezeigt, wie sich Felder auf einem Gitter an verschiedenen Raumpunkten miteinander vergleichen lassen. Die Gleichung kovarianter Konstanz für ein Skalarfeld besagt

$$D_\mu \phi(x) = (\partial_\mu + ig\mathfrak{A}_\mu) \phi(x) = 0 \quad (2.28)$$

Vertauschbarkeit der 2. Ableitungen (Integrabilitätsbedingung) liefert

$$[\partial_\mu, \partial_\nu] \phi(x) = -igF_{\mu\nu} \phi(x) = 0 \quad (2.29)$$

Der Paralleltransport findet entlang eines Weges \mathcal{C} statt. Dieser Weg wird parametrisiert durch

$$x(0) = x \quad \text{und} \quad x(1) = y \quad (2.30)$$

und aus (2.28) ergibt sich folgende Differentialgleichung

$$\dot{x}_\mu(s) D_\mu \phi(x(s)) = \frac{d\phi(x(s))}{ds} + ig\mathfrak{A}_\mu(x(s)) \dot{x}_\mu(s) \phi(x(s)) = 0 \quad (2.31)$$

Diese Gleichung hat die Lösung

$$\begin{aligned} \phi(y) &= \mathcal{P} \exp \left(ig \int_0^1 ds \mathfrak{A}_\mu(x(s)) \dot{x}_\mu(s) \right) \phi(x) \\ &= \mathcal{P} \exp \left(ig \int_{\mathcal{C}} dx_\mu \mathfrak{A}_\mu(x) \right) \phi(x) \end{aligned} \quad (2.32)$$

wobei

$$\mathcal{U}(\mathcal{C}) = \mathcal{P} \exp \left(ig \int_{\mathcal{C}} dx_\mu \mathfrak{A}_\mu(x) \right) \quad (2.33)$$

der Paralleltransporter entlang des Weges \mathcal{C} ist. Das Symbol \mathcal{P} bedeutet, dass das pfadgeordnete Produkt dieses Ausdrucks genommen werden soll. Diese Ordnungsvorschrift ist notwendig, da Algebra-Elemente $\mathfrak{A}_\mu(x)$ an verschiedenen Orten nicht miteinander kommutieren. Die Größe $\mathcal{U}(\mathcal{C})$ ist ein Element der Eichgruppe G und damit eine kompakte Variable. Der Paralleltransporter zwischen zwei benachbarten Gitterpunkten ergibt sich damit zu (a bezeichnet den Gitterabstand und e_μ einen Einheitsvektor in Richtung μ)

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{x,\mu} &= \mathcal{P} \exp \left(ig \int_x^{x+ae_\mu} dx_\mu \mathfrak{A}_\mu(x) \right) \\ &= \exp (iga\mathfrak{A}_\mu(x)) \approx 1 + iga\mathfrak{A}_\mu(x) \end{aligned} \quad (2.34)$$

Die Theorie soll in diesen (im folgenden Linkvariablen genannten) Paralleltransportern $\mathcal{U}_{x,\mu}$ zwischen zwei benachbarten Gitterpunkten formuliert werden. Dabei ist zunächst festzustellen, dass

$$\mathcal{D}\mathfrak{A}_\mu \sim \mathcal{D}\mathcal{U}_\mu \quad (2.35)$$

Das Integrationsmaß ändert sich bei dieser Transformation also nur um eine irrelevante Konstante.

2.2.2 Die Wilson-Wirkung

Jetzt muss noch eine Gitterwirkung gefunden werden, die im Kontinuumslimit, also für $a \rightarrow 0$ in die Yang-Mills-Wirkung übergeht. Dazu werden zunächst Plakettevariablen $\mathcal{U}_{x,\mu\nu}$ definiert, die den Paralleltransport um die kleinste Fläche (die Plakette) auf dem Gitter beschreiben.

$$\mathcal{U}_{x,\mu\nu} = \mathcal{U}_{x,\mu} \mathcal{U}_{x+e_\mu,\nu} \mathcal{U}_{x+e_\mu+e_\nu,\mu}^\dagger \mathcal{U}_{x+e_\nu,\mu}^\dagger \quad (2.36)$$

Unter Benutzung von Gl. (2.34) und der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel findet man nach kurzer Rechnung

$$\mathcal{U}_{x,\mu\nu} = \exp (iga^2 F_{\mu\nu} + O(a^3)) \quad (2.37)$$

Damit ergibt sich weiter

$$\mathcal{U}_{x,\mu\nu} + \mathcal{U}_{x,\mu\nu}^\dagger \approx 2 - g^2 a^4 F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + O(a^5) \quad (2.38)$$

was folgende Gitterwirkung motiviert

$$\begin{aligned} S_W &= \frac{2}{g^2 a^4} \sum_{x,\mu\nu} \text{tr} \left(\mathbb{1} - \frac{1}{2} (\mathcal{U}_{x,\mu\nu} + \mathcal{U}_{x,\mu\nu}^\dagger) \right) \\ &= \beta \sum_{x,\mu\nu} \left(1 - \frac{1}{N_c} \Re \text{tr} (\mathcal{U}_{x,\mu\nu}) \right) \end{aligned} \quad (2.39)$$

2 Yang-Mills-Theorie

mit $\beta = \frac{2N_c}{g^2 a^4}$ und N_c der Dimension der Darstellung von $\mathcal{U}_{x,\mu}$. Dies ist die nach Wilson benannte Wilson-Wirkung, die im Kontinuumslimit gegen die Yang-Mills-Wirkung geht. Sie ist nicht die einzige Wirkung mit dieser Eigenschaft, aber die einfachste. Es existieren verbesserte Wirkungen, die Beiträge von größeren Plaketten (Wilson-Loops) auf dem Gitter enthalten [38].

Wie bereits gezeigt ergeben sich endliche Temperaturen durch Periodizität in euklidischer Zeitrichtung. Zusätzlich wird zur Vereinfachung ebenfalls Periodizität in den Raumrichtungen gefordert, so dass sich ergibt

$$\mathcal{U}_{\{x_1, \dots, (N_\nu+1)a, \dots, x_N\}, \mu} = \mathcal{U}_{\{x_1, \dots, 1, \dots, x_N\}, \mu} \quad (2.40)$$

Um Randeffekte zu vermeiden wird das räumliche Gitter (Anzahl der Gitterpunkte N_s) größer als das zeitliche (Anzahl der Gitterpunkte N_t) gewählt. Erfahrungen haben gezeigt, dass für $N_s \geq 4N_t$ *finite-size*-Effekte minimiert werden.

2.2.3 Kontinuumslimites

In diesem Abschnitt soll beschrieben werden, wie auf dem Gitter berechnete Zahlen mit Werten von Observablen in der Kontinuumsstheorie zusammenhängen. Dazu werden nur in diesem Teil Gittergrößen mit einem $\hat{}$ versehen. Die Temperatur des Systems ist einerseits gegeben durch

$$T = \frac{1}{aN_t} \quad (2.41)$$

Durch Gl. (2.41) wird die Temperatur jedoch nicht festgelegt, weil der Gitterabstand a kein freier Parameter der Theorie ist. Um die Temperatur festzulegen muss eine physikalische Längenskala bestimmt werden. Der Gitterabstand ist die einzige dimensionsbehaftete Größe auf dem Gitter, alle anderen Größen werden also in Einheiten dieses Gitterabstandes gemessen. Eine solche Längenskala kann aus der Betrachtung von dimensionslosen Größen und durch Vergleich mit Experimenten gewonnen werden. Eine im Experiment messbare Observable ist beispielsweise die Kraft zwischen zwei Quarks. Sie ergibt sich aus der Ableitung des Potentials V zwischen zwei Ladungen, welches eine auf dem Gitter gut zu bestimmende Observable ist. In Gittereinheiten hat das Potential die Einheit

$$[V] = [a^{-1}] \quad (2.42)$$

Eine dimensionslose Größe ergibt sich dabei durch den Ausdruck

$$\hat{r}^2 \frac{d\hat{V}}{d\hat{r}} \Big|_{\hat{r}=r_0/a} = r^2 \frac{dV}{dr} \Big|_{r=r_0} = 1.65 \quad (\text{QCD, } r_0 = 0.5\text{fm}) \quad (2.43)$$

r_0 ist eine typische Skala der Theorie (Sommer-Skala [39]).

Um die Temperatur auf dem Gitter einstellen zu können kann eine aus Renormierungsgleichungen und Störungstheorie erhaltene Beziehung zwischen dem Gitterabstand und der sogenannten 'nackten' Kopplung g verwendet werden [40].

$$a(g) \propto e^{-1/g^2} \propto e^{-\beta} \quad (2.44)$$

Mit größer werdender Kopplung β wird also der Gitterabstand kleiner und damit bei festgehaltener Anzahl von Gitterpunkten in Zeitrichtung die Temperatur größer. Ohne einen aus Experimenten erhaltenen Wert für z.B. die Temperatur des Phasenübergangs bleibt die Temperatur also nur bis auf einen Faktor bestimmt. In der Gl. (2.44) ist auch eine Eigenschaft von Eichtheorien, die asymptotische Freiheit, zu erkennen. Für verschwindenden Abstand $r = \hat{r}a$ geht die Kopplung der Theorie gegen 0.

Der Prozess $a \rightarrow 0$ wird als *Kontinuumsliches* bezeichnet. Für Massen auf dem Gitter gilt z.B.

$$m = \frac{\hat{m}}{a} \quad (2.45)$$

Damit die physikalische Masse m im Kontinuum einen endlichen Wert behält, muss im Kontinuumsliches die Gittermasse \hat{m} also ebenfalls gegen 0 gehen.

Weiter muss der sogenannte *Thermodynamische Limes* durchgeführt werden ($\hat{V} \rightarrow \infty$). Um eine endliche Temperatur zu erreichen, muss die Ausdehnung des Gitter in Zeitrichtung immer kleiner sein als in Raumrichtung.

2.2.4 Monte-Carlo-Simulationen

Ziel von numerischen Simulationen ist es Erwartungswerte zu berechnen, die allgemein die Form

$$\langle \mathcal{O} \rangle_\rho = \int \mathcal{D}x \mathcal{O}(x) \rho(x) \quad (2.46)$$

haben, wobei $\rho(x)$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, also z.B. den Boltzmannfaktor der Zustandssumme darstellt. Hierbei handelt es sich um hochdimensionale Integrale. Für ein typisches Gitter mit einer Größe von $16^3 \times 4$ Gitterpunkten hat dieses Integral für $SU(3)$ -Yang-Mills z.B. die Dimension Gittervolumen \times Anzahl der Raumzeitdimensionen $\times 8 = 524288$. Dies ist mit einfachen Integrationsverfahren wie der Diskretisierung des Integrationsgebietes nicht in angemessener Zeit zu schaffen. Deshalb mussten andere Methoden für Integrale dieser Art geschaffen werden. Die übliche Methode die sich durchgesetzt hat, ist die sogenannte *Monte-Carlo-Integration*, die hier kurz beschrieben werden soll.

Eine **Konfiguration** $\mathcal{C}(x)$ bezeichnet den aktuellen Wert der Variablen x . Wenn die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\rho(x)$ lokalisiert ist (dies wird als *Importance Sampling* bezeichnet) und es einen Algorithmus gibt, der eine Folge von Konfigurationen $\mathcal{C}_i(x)$ erzeugt die nach $\rho(x)$ verteilt sind, dann berechnet sich der Erwartungswert der Observablen \mathcal{O} wie folgt

$$\langle \mathcal{O} \rangle_\rho = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_i^N \mathcal{O}(\mathcal{C}_i(x)) \quad (2.47)$$

also als Mittelwert der Observable über die erzeugte Folge von Konfigurationen. Ausgehend von einer Startkonfiguration $\mathcal{C}(x)$ gelangt man zu einer neuen Konfiguration $\mathcal{C}'(x)$ mit der Wahrscheinlichkeit $W(\mathcal{C}(x), \mathcal{C}'(x))$. Damit die Verteilung $\rho(x)$ erzeugt wird müssen folgende zwei Bedingungen erfüllt sein:

Ergodizität Ergodizität bedeutet, dass es von jeder Konfiguration $\mathcal{C}(x)$ ausgehend möglich sein muss eine Konfiguration $\mathcal{C}'(x)$ in endlich vielen Schritten zu erreichen. Der Algorithmus zur Erzeugung der Verteilung muss also den gesamten Phasenraum der Theorie durchlaufen können.

Detailliertes Gleichgewicht In Worten ausgedrückt bedeutet dies, dass die Wahrscheinlichkeit eine Konfiguration $\mathcal{C}(x)$ anzunehmen multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit zu einer Konfiguration $\mathcal{C}'(x)$ überzugehen gleich der Wahrscheinlichkeit sein muss, an einer Konfiguration $\mathcal{C}'(x)$ zu sein und von dieser überzugehen zu $\mathcal{C}(x)$. In einer Formel ausgedrückt sieht dies wie folgt aus

$$\rho(\mathcal{C}(x))W(\mathcal{C}(x),\mathcal{C}'(x)) = \rho(\mathcal{C}'(x))W(\mathcal{C}'(x),\mathcal{C}(x)) \quad (2.48)$$

Startet man eine Simulation mit einer beliebigen Verteilung $\rho_0(x)$, so ergibt sich die gesuchte Verteilung $\rho(x)$ als Fixpunkt der Folge von Verteilungen. In Abhängigkeit von der gewählten Startkonfiguration können die ersten durch einen Algorithmus erzeugten Konfigurationen also noch nicht die Gleichgewichtsverteilung $\rho(x)$ wiedergeben. Dieser Prozess des Konvergierens gegen die gewünschte Verteilung wird als **Thermalisierung** bezeichnet. Konfigurationen, die noch nicht thermalisiert sind, dürfen in der Mittelbildung nicht beachtet werden.

In dieser Arbeit wurden verschiedene Algorithmen benutzt, die Konfigurationen erzeugen, die nach einer gegebenen Verteilung verteilt sind. Dies sind insbesondere ein Wärmebadalgorithmus für $SU(N)$ -Yang-Mills und der Metropolis-Algorithmus für die effektive Theorie.

Der Prozess der Mittelbildung wird in dieser Arbeit auch als *messen* bezeichnet. Da nur für unendlich viele erzeugte Konfigurationen die Beziehung (2.47) exakt ist, muss zu jedem *Messwert* ein statistischer Fehler angegeben werden. Eine gängige Art diesen abzuschätzen ist die **Jackknife-Methode**. Hierbei wird der Mittelwert der Observablen auf M Blöcken, die mit $\langle O \rangle_i$ bezeichnet werden, bestimmt. Die Blockgröße sollte größer als die Autokorrelationszeit τ_O der Observablen gewählt werden. Der Jackknife-Fehler ist dann gegeben durch

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^M (\langle O \rangle_i - \langle O \rangle)^2} \quad (2.49)$$

Die Korrelation von Konfigurationen wird über die Autokorrelationsfunktion gemessen

$$\Gamma_O(t) = \int dt' (O(t')O(t+t') - \langle O \rangle^2) \approx \exp\left(-\frac{t}{\tau_O}\right) \quad (2.50)$$

wobei t die Monte-Carlo-Zeit bezeichnet. Die Größe τ_O ist die Autokorrelationszeit der Observablen O .

Eine weitere wichtige Größe insbesondere zur Bestimmung von Phasenübergängen ist die Suszeptibilität einer Observablen. Sie ist definiert durch

$$\Sigma_O = \langle (O - \langle O \rangle)^2 \rangle = \langle O^2 \rangle - \langle O \rangle^2 \quad (2.51)$$

2.3 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde gezeigt, worum es sich bei einer Eichtheorie handelt und wie der Übergang von einer Definition im Kontinuum zu einer mit numerischen Methoden zugänglichen Formulierung auf einem endlichen diskreten Raumzeitgitter zu vollziehen ist. Außerdem wurde mit der Monte-Carlo-Methode gezeigt, wie hochdimensionale Zustandssummen numerisch auszuwerten sind und Observable der Theorie bestimmt werden können. Da viele Aspekte von Eichtheorien mit Eigenschaften der Eichgruppe G in Verbindung stehen und, wie in der Einleitung bereits erwähnt, die Eigenschaften der Gruppe eine wichtige Rolle für effektive Wirkungen spielen, werden im nächsten Kapitel die benötigten Grundlagen der Gruppentheorie zusammengestellt.

3 Grundlagen der Gruppentheorie

Nachdem im vorherigen Kapitel gezeigt wurde, dass in Eichtheorien Gruppen eine wichtige Rolle spielen, sollen hier die wichtigsten Aspekte der mathematischen Beschreibung von Gruppen zusammengefasst werden. Es werden zunächst allgemein die in dieser Arbeit benötigten Eigenschaften von Lie-Gruppen zusammengefasst und anschließend einige spezielle Lie-Gruppen explizit vorgestellt. Die Ausführungen folgen weitgehend dem Buch von Robert N. Cahn [41]. Weitere benutzte Literatur ist [42, 43].

3.1 Lie-Gruppen und Lie-Algebren

Lie-Algebra Eine *Lie-Algebra* \mathfrak{g} ist ein Vektorraum V über einem Körper K mit einer bilinearen Abbildung $[\cdot, \cdot]: V \times V \mapsto V$ die folgende Eigenschaften erfüllt ($x, y, z \in V, \lambda \in K$)

- $[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$ (Linearität)
- $[\lambda x, y] = \lambda [x, y]$ (Linearität)
- $[x, y] = -[y, x]$ (Antisymmetrie)
- $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ (Jacobi-Identität)

Die Abbildung $[\cdot, \cdot]$ heißt *Lie-Produkt* oder *Lie-Klammer*. Im Folgenden bezeichnet \mathfrak{t}_a eine Basis dieses Vektorraums. Dann gilt

$$[\mathfrak{t}_a, \mathfrak{t}_b] = f_{ab}^c \mathfrak{t}_c \quad (3.1)$$

Die f_{ab}^c werden *Strukturkonstanten* genannt und sind vollständig antisymmetrisch. Die Elemente \mathfrak{t}_a ($a = 1 \dots \dim(V)$) sind die *Generatoren* der Lie-Algebra.

Lie-Gruppe Eine *Lie-Gruppe* G ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer differenzierbaren Abbildung (Produkt)

$$G \times G \mapsto G \quad (g, h) \mapsto gh \quad (3.2)$$

mit der G zu einer Gruppe wird (es existiert ein Einselement e und ein inverses g^{-1} mit $gg^{-1} = e$). Es existieren Abbildungen

$$L_g : G \mapsto G \quad L_g(h) = gh \quad (3.3)$$

$$R_g : G \mapsto G \quad R_g(h) = hg \quad (3.4)$$

die *Links-* und *Rechtstranslationen* auf der Gruppe. Da eine Lie-Gruppe auch eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist, existiert an jedem Gruppenelement ein Tangentialraum

3 Grundlagen der Gruppentheorie

T_g mit Vektorfeldern X_g . Die Links- und Rechtstranslationen induzieren dann Abbildungen zwischen den Tangentialräumen

$$L_{g*} : T_h \mapsto T_{gh} \quad (3.5)$$

$$R_{g*} : T_h \mapsto T_{hg} \quad (3.6)$$

Ein Vektorfeld heißt **Linksinvariant** wenn gilt $L_{g*}X_h = X_{gh} \quad \forall g \in G$. Der Zusammenhang zwischen einer Lie-Gruppe und einer Lie-Algebra ist folgender

$$\mathfrak{g} := T_e(G) \quad (3.7)$$

Die Lie-Algebra \mathfrak{g} ist der Tangentialraum an das Einselement e der Lie-Gruppe G

Die Exponentialabbildung Die Exponentialabbildung ist eine Abbildung $\exp : \mathfrak{g} \mapsto G$ definiert durch

$$g = \exp(\mathfrak{a}) \quad g \in G, \mathfrak{a} \in \mathfrak{g} \quad (3.8)$$

Mann kann zeigen, dass für kompakte zusammenhängende Lie-Gruppen jedes $g \in G$ als $g = \exp(\mathfrak{a})$ geschrieben werden kann.

Die Linksableitung Betrachtet man allgemeine Funktionen $f(g)$ auf G , dann ist die Linksableitung dieser Funktion in Richtung des Generators \mathfrak{t}_a definiert durch

$$L_a f(g) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\exp(t\mathfrak{t}_a)g) \quad (3.9)$$

3.2 Darstellungen und Charaktere

Sei V ein Vektorraum und $L(V)$ die Gruppe der linearen und invertierbaren Abbildungen $V \mapsto V$. Eine **Darstellung einer Gruppe** ordnet jedem Gruppenelement g eine lineare Transformation ρ auf einem Vektorraum V zu

$$\rho : G \mapsto L(V) \quad g \mapsto \rho(g) \quad (3.10)$$

mit folgenden Eigenschaften

$$\rho(e) = \mathbf{1}, \quad \rho(g)\rho(h) = \rho(gh) \quad (3.11)$$

Die Dimension einer Darstellung ist die Dimension des Vektorraums V . Genauso lassen sich **Darstellungen der Algebra** definieren

$$\rho : \mathfrak{g} \mapsto L(V) \quad \text{mit Eigenschaft} \quad \rho[x, y] = [\rho(x), \rho(y)] \quad \text{für} \quad x, y \in \mathfrak{g} \quad (3.12)$$

Eine Darstellung erhält also die Gruppenstruktur. Eine spezielle Darstellung ist die **adjungierte Darstellung**. Sie ist definiert als

$$\text{ad}_y(x) = [x, y] \quad (3.13)$$

Die Dimension der Algebra entspricht also der Dimension der adjungierten Darstellung. Eine Darstellung heißt *reduzibel*, falls ein echter invarianter Teilraum von V existiert, ansonsten heißt sie *irreduzibel*. Der **Charakter** einer Darstellung ist $\chi_\rho(g) = \text{tr } \rho(g)$. Bezeichnen μ und ν irreduzible Darstellungen so gilt

$$V_\mu \otimes V_\nu = \sum_\lambda C_{\mu\nu}^\lambda V_\lambda \quad (3.14)$$

Wenn die Darstellung $V_\mu \otimes V_\nu$ vollreduzibel ist, dann sind V_λ irreduzible Darstellungen. Diese Gleichung überträgt sich auf die Charaktere

$$\chi_\mu(g) \cdot \chi_\nu(g) = \sum_\lambda C_{\mu\nu}^\lambda \chi_\lambda(g) \quad (3.15)$$

3.3 Cartan-Unteralgebra

Die *Cartan-Unteralgebra* H ist die maximale abelsche Unteralgebra von \mathfrak{g} , also

$$[h_\alpha, h_\beta] = 0 \quad \text{für } h_\alpha, h_\beta \in H \quad (3.16)$$

Der **Rang** der Algebra ist die Dimension der Cartan-Unteralgebra. Die **Killing Form** ist definiert als $(a, b) = \text{tr } \text{ad}_a \text{ad}_b$.

3.4 Wurzeln und Gewichte

Seien $h \in H$ die Elemente der Cartan-Unteralgebra zu \mathfrak{g} . Die übrigen Generatoren bzw. Linearkombinationen von diesen (Auf- und Absteigeoperatoren) sind dann Eigenvektoren bezüglich ad_h , also

$$\text{ad}_h e_\alpha = [h, e_\alpha] = \alpha(h) e_\alpha \quad (3.17)$$

Die e_α werden **Wurzelvektoren** genannt und α die zugehörigen **Wurzeln**. Sie sind lineare Funktionale über H und ihre Linearkombinationen bilden einen Vektorraum, den dualen Raum zu H , also $\alpha \in H^*$. Einige Eigenschaften der Wurzeln ergeben sich aus der Jacobi-Identität der Lie-Klammer

$$\begin{aligned} [h, [e_\alpha, e_\beta]] &= -[e_\alpha, [e_\beta, h]] - [e_\beta, [h, e_\alpha]] \\ &= (\alpha(h) + \beta(h)) [e_\alpha, e_\beta] \end{aligned} \quad (3.18)$$

Hieraus folgt

- Wenn $\alpha \neq \beta$ und $[e_\alpha, e_\beta] \neq 0$, dann ist $\alpha + \beta$ Wurzel.
- Wenn α Wurzel ist, dann ist 2α keine Wurzel.

3 Grundlagen der Gruppentheorie

- Wenn α Wurzel ist, dann ist auch $-\alpha$ Wurzel.

Im Folgenden bezeichnen H Darstellungen von h (genauso E zu e). Diese Darstellungen wirken auf einen Vektorraum V mit Elementen ϕ^a . Wählt man eine Basis in diesem Vektorraum, in der die H , also die Darstellungen der Cartangeneratoren diagonal sind, dann kann man schreiben

$$H_i \phi^a = \lambda_i^a \phi^a \quad (3.19)$$

Für $h = \sum_i c_i h_i$, also $H = \sum_i c_i H_i$ gilt damit

$$H \phi^a = \left(\sum_i c_i \lambda_i^a \right) \phi^a = M^a(h) \phi^a \quad (3.20)$$

Die Funktionen M^a heißen **Gewichte** und sind wie die Wurzeln ebenfalls Elemente des dualen Raumes zu H ($M^a \in H^*$). Die Gewichte der adjungierten Darstellung sind also die Wurzeln der Algebra. In diesem Raum lässt sich mit Hilfe der Killing-Form ein Skalarprodukt definieren

$$\langle \alpha, \beta \rangle := (h_\alpha, h_\beta) \quad (3.21)$$

Nun wird ein Vektor ϕ^a mit Gewicht M^a betrachtet. Dann gilt

$$HE_\alpha \phi^a = ([H, E_\alpha] + E_\alpha H) \phi^a = (\alpha(h) + M^a(h)) E_\alpha \phi^a \quad (3.22)$$

Anwenden von E_α auf einen Vektor ϕ^a erhöht also das Gewicht um α , was die Bezeichnung Aufsteigeoperator für E_α rechtfertigt. Genauso erniedrigt $E_{-\alpha}$ das Gewicht um $-\alpha(h)$, $E_{-\alpha}$ wirkt also als Absteigeoperator. Hierdurch wird eine Sequenz von Gewichten definiert: $M + p\alpha, \dots, M, \dots, M - m\alpha$. Aus den Beziehungen $(E_{-\alpha})^j \phi_0 = \phi_j$ und $E_{-\alpha} \phi_m = 0$ lässt sich eine Beziehung zwischen M , p und m ableiten

$$m - p = 2 \frac{\langle M, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \quad (3.23)$$

Im Folgenden bezeichnet $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ eine Basis in H_0^* . Damit kann jedes Element des Vektorraumes geschrieben werden als $\rho = \sum_i c_i \alpha_i$. Mit folgender Konvention lässt sich eine Ordnung zwischen Elementen dieses Vektorraums herstellen. ρ ist **positiv**, wenn der erste nichtverschwindende Koeffizient c_i größer als null ist, andernfalls ist ρ **negativ**. Eine **einfache Wurzel** ist eine positive Wurzel, die nicht als Summe von zwei positiven Wurzeln geschrieben werden kann. Einfache Wurzeln haben folgende wichtige Eigenschaften

- Jede positive Wurzel kann als Summe von einfachen Wurzeln geschrieben werden.
- Die einfachen Wurzeln bilden eine Basis in H_0^* .

Die Dimension von H ist dieselbe wie die von H_0^* . Damit ist die Anzahl der einfachen Wurzeln der Rang der Algebra. Alle Eigenschaften einer einfachen Lie-Algebra lassen sich in einer Matrix, der **Cartan-Matrix**, zusammenfassen

$$A_{ij} = 2 \frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} \quad (3.24)$$

Sie hat folgende Eigenschaften

- Die Diagonalelemente sind 2.
- Die Off-Diagonalelemente haben die Werte -1 , -2 oder -3 .
- Wenn $A_{ij} = -2$ oder -3 , dann ist $A_{ji} = -1$.

Genauso wie für die Wurzeln lässt sich auch für Gewichte eine Ordnung einführen. Damit gibt es in jeder irreduziblen Darstellung ein **höchstes Gewicht**, welches mit Λ bezeichnet wird. (Eine endlich-dimensionale irreduzible Darstellung hat immer ein höchstes Gewicht). Jedes Höchstgewicht Λ ist festgelegt durch nicht-negative ganze Zahlen Λ_i in der folgenden Weise

$$\Lambda_i = 2 \frac{\langle \Lambda, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \quad (3.25)$$

Die Λ_i heißen **Dynkin-Koeffizienten**. Damit ist auch jede irreduzible Darstellung durch Angabe dieser Koeffizienten eindeutig bestimmt. Darstellungen mit Dynkin-Koeffizienten $\mu = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ heißen **fundamentale Darstellungen**. Die Charaktere der fundamentalen Darstellungen bilden eine Basis für alle Klassenfunktionen $f(g) = f(hgh^{-1})$.

3.5 Weyls Charakter- und Dimensionsformel

Ziel dieses Abschnittes ist es, die Dimension einer irreduziblen Darstellung zu bestimmen. Dazu wird als erstes die Definition der Weylgruppe benötigt. Die Weylgruppe W ist die Menge aller Reflexionssymmetrien des Gewichtsgitters. Eine solche Reflexion eines Gewichtes M kann geschrieben werden als

$$S_{\alpha_i}(M) = M - 2 \frac{\langle M, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \alpha_i \quad (3.26)$$

Sei $S \in W$ und $\rho = \sum_{\alpha \in \Sigma} \rho_\alpha \alpha$. Dann gilt für den Charakter χ einer Darstellung $(S\chi)(\rho) = \chi(\rho)$. Hieraus lässt sich **Weyl's Charakterformel** herleiten

$$\chi(\rho) = \frac{\sum_{S \in W} (\det S) \exp \langle \Lambda + \delta, S\rho \rangle}{\sum_{S \in W} (\det S) \exp \langle \delta, S\rho \rangle} \quad (3.27)$$

wobei $\delta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \alpha$ die halbe Summe über alle positiven Wurzeln ist. Aus dieser Formel ergibt sich dann **Weyl's Dimensionsformel** ($\dim_\Lambda = \chi(0)$).

$$\dim_\Lambda = \prod_{\alpha > 0} \frac{\langle \alpha, \Lambda + \delta \rangle}{\langle \alpha, \delta \rangle} \quad (3.28)$$

3.6 Integration über Gruppen

Die Berechnung von Zustandssummen in Eichtheorien wird auf dem Gitter zu einer Integration über die Eichgruppe G . Das dabei verwendete Integrationsmaß ist das links- und rechtsinvariante Haar-Maß $d\mu(g)$. Es ist bis auf eine multiplikative Konstante eindeutig und besitzt folgende Eigenschaften

3 Grundlagen der Gruppentheorie

- $d\mu(g) = d\mu(hg) = d\mu(gh)$ für $g, h \in G$ (links-, rechtsinvarianz)
- $\int_G d\mu(g) = 1$ (Normierung)

Für Klassenfunktionen $f(g) = f(hgh^{-1})$ wird das Haar-Maß zum reduzierten Haarmaß. Es definiert ein Skalarprodukt für die Charaktere einer Gruppe. Für irreduzible Darstellungen (μ) und (ν) gilt folgende Orthogonalitätsrelation

$$(\chi_\mu, \chi_\nu) = \int_G d\mu_{red} \chi_\mu \bar{\chi}_\nu = \delta_{\mu\nu} \quad (3.29)$$

3.7 Allgemeine Eigenschaften der Gruppen $SU(N)$

Nachdem grundlegende allgemeine Eigenschaften der Gruppentheorie zusammengestellt wurden, sollen nun für die Gruppe $SU(N)$ einige Eigenschaften spezialisiert werden. Dies sind insbesondere das reduzierte Haarmaß, welches in Zustandssummen der effektiven Theorie als Integrationsmaß benötigt wird sowie Charakter- und Dimensionsformeln für Darstellungen. Der Rang der Gruppe $SU(N)$ ist $r = N - 1$, die Dimension der Algebra $\dim(\mathfrak{su}(N)) = N^2 - 1$.

3.7.1 Leiteroperatoren und Generatoren für $SU(N)$

Die Gruppe $SU(N)$ besitzt $N(N - 1)/2$ Leiteroperatoren. Sie sind in einer speziellen Basis gegeben durch

$$(E_{ij})_{ab} = \delta_{ia} \delta_{jb} \quad \text{für } 1 \leq i < j \leq N \quad (3.30)$$

Eine Wahl der $N - 1$ Cartan-Generatoren ist

$$(\mathfrak{H}_i)_{ab} = \frac{1}{\sqrt{2(i+1)(i+2)}} \delta_{ab} (\theta(i-a) - i\delta_{a,i+1}) \quad \text{mit } \theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases} \quad (3.31)$$

In dieser Basis ergeben sich die $N^2 - 1$ Generatoren zu

$$\mathfrak{T}_{ij} = \frac{1}{2}(E_{ij} + E_{ij}^T) \quad \text{für } 1 \leq i < j \leq N \quad (3.32)$$

$$\mathfrak{T}_{ij} = \frac{1}{2i}(E_{ij} - E_{ij}^T) \quad \text{für } 1 \leq j < i \leq N \quad (3.33)$$

$$\mathfrak{T}_i = \mathfrak{H}_i \quad (3.34)$$

Sie sind normiert durch

$$\text{tr } \mathfrak{T}_a \mathfrak{T}_b = \gamma \delta_{ab} \quad \text{mit } \gamma = \frac{1}{2} \quad (3.35)$$

3.7.2 fundamentale Charaktere der Gruppe $SU(N)$

In Simulationen der effektiven Theorie werden die fundamentalen Charaktere der Gruppe benötigt. Für die Gruppe $SU(N)$ lässt sich Weyls Charakterformel mithilfe einer Van-der-Monde Determinante ausdrücken. Benutzt man die Definition der Determinante

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_N} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^N a_{i,\sigma(i)} \quad (3.36)$$

mit der Permutationsgruppe S_N von N Elementen, so lassen sich die Charaktere schreiben als

$$\chi_{r_1, \dots, r_n}(\mathcal{U}) = \frac{\sum_{\sigma \in S_N} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^N \epsilon_i^{r_{\sigma(i)}}}{\sum_{\sigma \in S_N} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^N \epsilon_i^{N-\sigma(i)}} \quad (3.37)$$

wobei ϵ_i die Eigenwerte der Matrix $\mathcal{U} \in SU(N)$ sind. Die Darstellung wurde hier mit Hilfe der Länge r_i der Zeilen des zugehörigen Young-Tableaus ausgedrückt. Dies soll nun für die Charaktere in fundamentalen Darstellungen spezialisiert werden, da sich daraus alle weiteren Charaktere irreduzibler Darstellungen ergeben. Dazu wird der Zusammenhang zwischen Dynkin-Labels und Young-Tableaus benutzt. Wenn p das Dynkin-Label mit Eintrag 1 an der p -ten Stelle bezeichnet, also $p = \underbrace{(0, \dots, \overbrace{1}^{\text{p-te Stelle}}, \dots, 0)}_r$ und r der Rang der Gruppe ist, dann gilt

$$r_j(p) = \theta(j - p) + n - j \quad (3.38)$$

Nach kurzer Rechnung erhält man damit für die fundamentalen Charaktere der Gruppe $SU(N)$ folgende Formel

$$\chi_p(\mathcal{U}) = \frac{1}{N!(N-p)!} \sum_{\sigma \in S_N} \prod_{i=1}^N \epsilon_i^{\theta(n-\sigma(i)-p)} \quad (3.39)$$

3.7.3 Das reduzierte Haarmaß

Des Weiteren wird zur Berechnung der auftretenden Integrale das reduzierte Haarmaß der Gruppe $SU(N)$ benötigt. Betrachtet man nur Klassenfunktionen f , reicht es diese auf Diagonalelementen der Gruppe zu berechnen, die die Form

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \epsilon_N \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \epsilon_i = \exp(i\phi_i), \quad \phi_N = -(\phi_1 + \dots + \phi_{N-1}) \quad (3.40)$$

3 Grundlagen der Gruppentheorie

besitzen. Das reduzierte Haarmaß ergibt sich dann als Jacobi-Determinante

$$\int_{SU(N)} d\mu_{\text{red}}(\mathcal{U}) f(\mathcal{U}) = \int_{\phi} d\phi_1 \dots d\phi_{N-1} \det \left(\frac{d\chi_p(\mathcal{U})}{d\phi_j} \right) f(\mathcal{U}) \quad (3.41)$$

Dieser Ausdruck lässt sich weiter vereinfachen zu

$$d\mu_{\text{red}}(\mathcal{U}) = \prod_{1 < i < j \leq N} \sin^2 \left(\frac{\phi_i - \phi_j}{2} \right) \prod_{i=1}^{N-1} d\phi_i \quad (3.42)$$

3.7.4 Zentrum

Das Zentrum einer Gruppe ist die Menge aller Gruppenelemente, die mit allen Gruppenelementen kommutiert. Für $SU(N)$ ist das Zentrum $\mathcal{Z}(N) = \{ \exp(i\frac{2\pi k}{N}) \cdot \mathbb{1}_N \mid k = 1 \dots N \}$.

3.8 Eigenschaften $SU(3)$

Die Gruppe $SU(3)$ hat Rang 2, die Dimension der Algebra ist 8. Eine mögliche Wahl der Generatoren sind die Gell-Mann Matrizen

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Die Dimension einer Darstellung $\lambda = (n_1, n_2)$ berechnet sich durch

$$\dim_{\lambda} = (n_1 + 1)(n_2 + 1) \binom{n_1 + n_2 + 2}{2} \quad (3.44)$$

Die fundamentalen Darstellungen sind $(1, 0) = (\mathbf{3})$ und $(0, 1) = (\bar{\mathbf{3}})$. Die Ausreduktion von Tensorprodukten liefert folgende irreduzible Darstellungen

$$(\mathbf{3}) \otimes (\mathbf{3}) = (\mathbf{6}) \oplus (\bar{\mathbf{3}}) \quad (3.45)$$

$$(\mathbf{3}) \otimes (\bar{\mathbf{3}}) = (\mathbf{8}) \oplus (\mathbf{1}) \quad (3.46)$$

$$(\mathbf{3}) \otimes (\mathbf{6}) = (\mathbf{10}) \oplus (\mathbf{8}) \quad (3.47)$$

$$(\mathbf{3}) \otimes (\bar{\mathbf{6}}) = (\bar{\mathbf{15}}) \oplus (\bar{\mathbf{3}}) \quad (3.48)$$

$$(\mathbf{3}) \otimes (\mathbf{8}) = (\mathbf{15}) \oplus (\bar{\mathbf{6}}) \oplus (\mathbf{3}) \quad (3.49)$$

Damit ergibt sich für die Entwicklung von Charakteren nach fundamentalen Charakteren

$$\chi_{(1,1)} = \chi_8 = \chi_3 \bar{\chi}_3 - 1 \quad (3.50)$$

$$\chi_{(2,0)} = \chi_6 = \chi_3^2 - \bar{\chi}_3 \quad (3.51)$$

$$\chi_{(2,1)} = \chi_{15} = \chi_3^2 (\bar{\chi}_3 - 1) - 2\chi_3 + \bar{\chi}_3 \quad (3.52)$$

$$\chi_{(3,0)} = \chi_{10} = \chi_3^3 - 2\chi_3 \bar{\chi}_3 + 1 \quad (3.53)$$

Für Klassenfunktionen reicht es, Diagonalelemente der Gruppe zu betrachten. Eine allgemeine Diagonalmatrix aus $SU(3)$ schreibt sich dann als

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} e^{i\phi_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i(\phi_1+\phi_2)} \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

und es ergibt sich

$$\chi_3(\phi_1, \phi_2) = e^{i\phi_1} + e^{i\phi_2} + e^{-i(\phi_1+\phi_2)} \quad (3.55)$$

3.9 Die exzeptionelle Gruppe G_2

Die Gruppe G_2 ist eine der exzeptionellen Lie-Gruppen und lässt sich als Untergruppe von $SO(7)$ konstruieren. $SO(7)$ hat Rang 3 und 21 Generatoren. Die Untergruppe G_2 enthält diejenigen Matrizen $\Omega \in SO(7)$, für die gilt

- $\det \Omega = 1$
- $\Omega \Omega^T = \mathbb{1}_7$ oder $\Omega \Omega^\dagger = \mathbb{1}_7$ SO(7)-Bedingung
- $T_{abc} = T_{def} \Omega_{da} \Omega_{eb} \Omega_{fc}$ G₂-Bedingung

wobei T ein total antisymmetrischer Tensor ist mit

$$T_{127} = T_{154} = T_{163} = T_{235} = T_{264} = T_{374} = T_{576} = 1 \quad (3.56)$$

Die G_2 -Nebenbedingung zusammen mit Gl. (3.56) stellt 7 nichttriviale Nebenbedingungen an die Elemente aus $\Omega \in SO(7)$, so dass 14 freie Parameter bleiben. Die Gruppe G_2 hat damit 14 Generatoren. Da alle Darstellungen der $SO(7)$ reell sind, gilt dies auch für Darstellungen von G_2 . Das Zentrum von G_2 ist trivial, enthält also nur die Identität.

3.9.1 G_2 -Lie-Algebra

Die Lie-Algebra der Gruppe G_2 hat die Dimension 14. Die Algebra \mathfrak{g}_2 besitzt als Unter algebra eine $\mathfrak{su}(3)$ -Algebra und weiter gilt die Beziehung [44]

$$G_2/SU(3) \sim SO(7)/SO(6) \sim S_6 \quad (3.57)$$

Die Coset-Räume $G_2/SU(3)$ und $SO(7)/SO(6)$ sind also isomorph zu einer 6-Sphäre. Damit lässt sich die Algebra von G_2 als Summe von Vektorräumen schreiben

$$\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{su}(3) \oplus \mathfrak{s} \quad (3.58)$$

mit $\mathfrak{s} = \mathfrak{so}(7)/\mathfrak{so}(6)$ und es gelten folgende Kommutatorrelationen

$$[\mathfrak{su}(3), \mathfrak{su}(3)] \subset \mathfrak{su}(3) \quad [\mathfrak{su}(3), \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s} \quad [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{su}(3) \oplus \mathfrak{s} \quad (3.59)$$

Für eine Matrix $\Omega \in G_2$ gilt damit (etwas formal aufgeschrieben)

$$\Omega = \exp(\mathfrak{g}_2) = \exp(\mathfrak{su}(3) \oplus \mathfrak{s}) = \exp(\mathfrak{s}) \exp(\mathfrak{su}(3)) \cdot = \mathcal{S} \cdot \mathcal{U} \quad (3.60)$$

Jede Matrix aus G_2 lässt sich als Produkt zweier Matrizen $\mathcal{U} \in SU(3)$ und $\mathcal{S} \in S_6$ schreiben.

3.9.2 Darstellungen, Charaktere und Haarmaß

Die fundamentalen Darstellungen von G_2 sind

$$(1, 0) = (7) \quad \text{und} \quad (0, 1) = (14) \quad (3.61)$$

Die Charaktere sind gegeben durch

$$\chi_{(1,0)} = 1 + 2 \cos(\phi_1) + 2 \cos(\phi_2) + 2 \cos(\phi_1 + \phi_2) \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} \chi_{(0,1)} = & 2(1 + \cos(\phi_1) + \cos(\phi_1 - \phi_2) + \cos(\phi_2) + \cos(\phi_1 + \phi_2) \\ & + \cos(2\phi_1 + \phi_2) + \cos(\phi_1 + 2\phi_2)) \end{aligned} \quad (3.63)$$

und das Haarmaß

$$\begin{aligned} d\mu_{\text{red}} = & \left(4\chi_{(1,0)}^3 - \chi_{(1,0)}^2 - 2\chi_{(1,0)} - 10\chi_{(1,0)}\chi_{(0,1)} + 7 - 10\chi_{(0,1)} - \chi_{(0,1)}^2 \right) \\ & \cdot \left(7 - \chi_{(1,0)}^2 - 2\chi_{(1,0)} + 4\chi_{(0,1)} \right) d\phi_1 d\phi_2 \end{aligned} \quad (3.64)$$

3.9.3 Komplexe Darstellung

Die komplexe Darstellung der Generatoren von G_2 eignet sich gut zum Rechnen, wird jedoch nicht in Simulationen verwendet. Sie ist unitär äquivalent zu einer reellen Darstellung. Damit bleiben also alle Charaktere reell.

Generatoren

Die 14 Generatoren sind gegeben durch [30]

$$\mathfrak{T}_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_i^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } i = 1 \dots 8 \quad (3.65)$$

wobei λ_i Gell-Mann-Matrizen sind und

$$\mathfrak{T}_{8+i} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{d}_i & \mathfrak{t}_i \\ -\mathfrak{d}_i^* & 0 & \mathfrak{t}_i^* \\ \mathfrak{t}_i^\dagger & \mathfrak{t}_i^\top & 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } i = 1 \dots 6 \quad (3.66)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mathfrak{d}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mathfrak{d}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathfrak{d}_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mathfrak{d}_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \mathfrak{d}_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.67)$$

und

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}_1 &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} & \mathfrak{t}_2 &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix} & \mathfrak{t}_3 &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathfrak{t}_4 &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} & \mathfrak{t}_5 &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \mathfrak{t}_6 &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.68)$$

Die Generatoren sind normiert auf

$$\text{tr}(\mathfrak{T}_a \mathfrak{T}_b) = 2 \quad (3.69)$$

Die ersten 8 Generatoren bilden eine Basis für eine 7-dimensionale reduzible Darstellung der $\mathfrak{su}(3)$.

Zerlegung

Nach [45] ist die Zerlegung $\Omega = \mathcal{S} \cdot \mathcal{U}$ explizit gegeben durch

$$\mathcal{S}(K) = \begin{pmatrix} C(K) & D(K)^* & \mu(K)K \\ D(K) & C(K)^* & \mu(K)K^* \\ -\mu(K)K^\dagger & -\mu(K)K^\top & \frac{1-K^2}{1+K^2} \end{pmatrix} \quad (3.70)$$

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} U & 0 & 0 \\ 0 & U^* & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } U \in SU(3) \quad (3.71)$$

K ist ein komplexer 3-Vektor und die 3×3 -Matrizen C und D sind gegeben durch

$$C(K)_{ij} = \frac{1}{\Delta} \left\{ \delta_{ij} - \frac{K_i K_j^*}{\Delta(1+\Delta)} \right\}, \quad D(K)_{ij} = -\frac{W_{ij}}{\Delta} - \frac{K_i^* K_j^*}{\Delta^2} \quad (3.72)$$

und

$$W_{ij} = \epsilon_{ijk} K_k, \quad \Delta = \sqrt{1+K^2} \quad (3.73)$$

Außerdem gilt

$$\mu(K) = \frac{\sqrt{2}}{1+K^2} \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{T}_{11} &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mathfrak{T}_{12} &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \mathfrak{T}_{13} &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mathfrak{T}_{14} &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

Sie sind normiert durch

$$\operatorname{tr}(\mathfrak{T}_a \mathfrak{T}_b) = -\frac{1}{2} \delta_{ab} \tag{3.76}$$

Zerlegung

Wie die Zerlegung $\Omega = \mathcal{S} \cdot \mathcal{U}$ für die reelle Darstellung durchzuführen ist, ist im Anhang (A.2) im Detail beschrieben.

Nachdem in diesem Kapitel die benötigten Aspekte der Gruppentheorie zusammengestellt und einige Lie-Gruppen explizit vorgestellt wurden wird im nächsten Kapitel gezeigt, wie sich Eigenschaften von Teilchen mit Hilfe von Gruppentheorie beschreiben lassen.

3 Grundlagen der Gruppentheorie

4 Confinement

Wie in der Einleitung bereits gesagt, sollen in dieser Arbeit effektive Wirkungen für Eichtheorien gefunden werden, die als dynamische Variablen den Polyakov-Loop enthalten. Ziel dieser effektiven Wirkungen soll es sein, verschiedene Aspekte von Eichtheorien besser zu verstehen. Hierzu gehört insbesondere die Eigenschaft, dass nichtabelsche $SU(N)$ -Eichtheorien bei endlicher Temperatur einen Phasenübergang zwischen einer Tief- und einer Hochtemperaturphase zeigen, den Confinement-Deconfinement-Phasenübergang. In diesem Kapitel sollen der Begriff des Confinement erläutert und verschiedene Observable in Gittereichtheorien betrachtet werden, die Confinement charakterisieren bzw. einen Ordnungsparameter für einen solchen Phasenübergang darstellen. Eine dieser Observablen ist der Polyakov-Loop. Er ist, wie gezeigt wird, einerseits eng verbunden mit der Zentrumsymmetrie der Eichtheorie und andererseits über die freie Energie eines Quarks mit dem Confinement. Die Ausführungen in diesem Kapitel orientieren sich an Arbeiten von [32, 47].

4.1 Was ist Confinement?

Experimentelle Arbeiten zeigen, dass Quarks in der Natur nur als gebundene Zustände in Hadronen, also Baryonen, wie z.B. dem Proton oder Mesonen (z.B. π -Mesonen) vorkommen. Diese Nichtbeobachtbarkeit von freien Quarks muss einen Grund haben, der auf ein allgemeineres physikalisches Konzept schließen lässt. Eine Suche nach Quarks ist in der Experimentalphysik immer eine Suche nach unganzzahligen Ladungen in Einheiten der Elementarladung. Unganzzahlige Ladungen reichen jedoch zur Charakterisierung dieses Konzeptes nicht aus, da es vielleicht andere massive Skalare geben kann die gebunden mit Quarks unganzzahlige Ladungen haben. Neben ihrer elektrischen Ladung tragen Quarks aber auch eine Farbladung bezüglich der starken Wechselwirkung. Alle beobachteten Bindungszustände von Quarks sind jedoch Farbneutral (Farb-Singulets), die Baryonen bestehen aus 3 Quarks, die Mesonen aus einem Quark und einem Anti-Quark. Deshalb bietet sich folgende Definition für dieses *Confinement* genannte Phänomen an:

*Es existieren in der Natur keine isolierten Teilchen
mit nichtverschwindender Farbladung.*

Eine Theorie besitzt also Confinement, wenn es in ihr einen Mechanismus gibt, der die Ladung der Teilchen dieser Theorie abschirmt. Die Quantenelektrodynamik ist beispielsweise keine Theorie mit Confinement, da das elektrische Feld eines Elektrons sich im gesamten Raum ausbreiten kann. Es wird beschrieben durch ein Coulomb-Potential. In der QCD hingegen breitet sich das Feld nicht im gesamten Raum aus, sondern es bilden sich *Flussschläuche* zwischen Quarks, in denen das Feld konzentriert ist. Confinement hängt also mit der Form des Potentials zwischen Ladungen der Theorie zusammen.

4.2 Das statische Quark-Antiquark-Potential

Dies soll jetzt am Beispiels eines Mesons, also dem Bindungszustand eines Quarks mit einem Antiquark verdeutlicht werden. Die Energie eines solchen Flussschlauches zwischen statischen Quarks im Abstand L ist ungefähr

$$E = \sigma L \quad (4.1)$$

Die Proportionalitätskonstante σ wird *string tension* (Stringspannung) genannt. Der Begriff stammt aus einem Bild der Stringtheorie, in welchem die Dynamik eines Quark-Antiquark-Paares durch einen String beschrieben wird.

Wenn m_q die Masse des leichtesten Quarks der Theorie bezeichnet, dann sind diese Flussschlauchzustände stabil bis zu Längen von

$$L = \frac{2m_q}{\sigma} \quad (4.2)$$

Bei größeren Abständen reicht die Energie aus, um aus dem Vakuum ein neues Quark-Antiquark-Paar zu erzeugen. Der Flussschlauch zwischen den statischen Quarks reißt (*string breaking*) und es bilden sich neue Flussschläuche zwischen den statischen und den dynamischen Quarks und Antiquarks (siehe Abb. 4.1). Die Farbladung wird also weiterhin abgeschirmt (*color screening*).

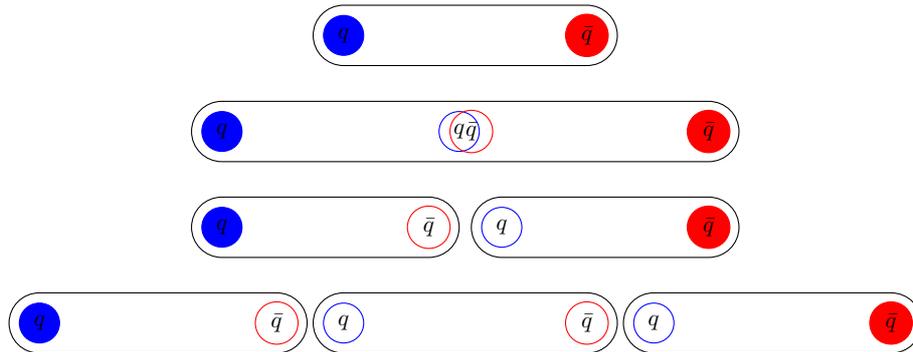


Abbildung 4.1: Schematisch: *string breaking* für ein Quark-Antiquark-Paar

Aus Gl. (4.2) ist zu sehen, daß Paar-Produktion unterdrückt ist für sehr schwere Quarks. Reine Eichtheorien (also Theorien die nur die Dynamik der Eichbosonen beschreiben, im Falle der starken Wechselwirkung die Gluodynamik) erhält man wie bereits beschrieben, in dem man die Masse der Quarks unendlich groß werden lässt. Damit kann kein *string breaking* auftreten und in diesen reinen Eichtheorien reduziert sich das Confinement-Problem auf folgende Aufgabe

**Zeige, dass, wenn alle Quarkmassen unendlich groß werden,
die Arbeit die benötigt wird um den Abstand zweier Quarks in einem
Quark-Antiquark-System um L zu erhöhen asymptotisch gegen σL geht,
wobei σ konstant ist.**

Diese Definition von Confinement beruht also darauf, dass das statische Quark-Antiquark-Potential für große Abstände L asymptotisch gegen σL geht, also

$$V(r) = c + \sigma r \quad \text{für } r \rightarrow \infty \quad (4.3)$$

Mit Quarks werden im Allgemeinen Teilchen bezeichnet, die unter der definierenden Darstellung der Eichtheorie transformieren, also im Falle von $SU(N)$ in der (N) -Darstellung ($(\mathbf{3})$ in der QCD, Antiquarks transformieren unter $(\bar{\mathbf{3}})$). Man kann jedoch auch Ladungen in höherdimensionalen Darstellungen betrachten. Hierfür muss die Definition von Confinement noch einmal verfeinert werden. Zuerst werden dazu Eichgruppen mit nichttrivialem Zentrum wie z.B. $SU(N)$ betrachtet. Darstellungen R lassen sich durch ihr Verhalten unter Zentrumstransformationen charakterisieren

$$R(g) = z^k R(zg) \quad (4.4)$$

mit $z \in \mathcal{Z}(G)$, also Element des Zentrums der Eichgruppe G . Die Zahl k wird mit *N-ality* bezeichnet. Betrachtet werden Ladungen in Darstellungen mit *N-ality* $k \neq 0$. Diese Ladungen können nur abgeschirmt werden durch Teilchen in Darstellungen mit *N-ality* $k \neq 0$, weil ein Farbsingulett, also die triviale Darstellung, *N-ality* $k = 0$ besitzt. Dies wird deutlich an einem Beispiel für $SU(3)$ ($z = \exp(i2\pi n/3) \mathbb{1}$). Die 3 - dimensionale Darstellung (Quark) hat *N-ality* $k = 1$, die 8-Dimensionale (Gluon) hat *N-ality* $k = 0$ und damit ergibt sich

$$(\mathbf{3}) \otimes (\bar{\mathbf{3}}) = (\mathbf{1}) \oplus (\mathbf{8}) \quad \text{hat N-ality } k=0, \text{ weil } z \cdot \bar{z} = z^0 = 1 \quad (4.5)$$

$$(\mathbf{3}) \otimes (\mathbf{3}) \otimes (\mathbf{3}) = (\mathbf{1}) \oplus \dots \quad \text{hat N-ality } k=0, \text{ weil } z^3 = z^0 = 1 \quad (4.6)$$

$$(\mathbf{3}) \otimes (\mathbf{8}) = (\mathbf{3}) \oplus (\bar{\mathbf{6}}) \oplus (\mathbf{15}) \quad \text{hat N-ality } k=1, \text{ weil } z^1 \cdot z^0 = z^1 \quad (4.7)$$

Mit dem Begriff der *N-ality* stellt sich das Confinement-Problem wie folgt dar

Zeige, dass wenn alle Massen von Feldern mit N-ality ungleich 0 gegen unendlich gehen eine Confinement-Phase existiert, in der die Arbeit die benötigt wird um ein Teilchen-Antiteilchen-Paar in einer Darstellung mit N-ality ungleich 0 um eine Distanz L zu trennen, asymptotisch gegen $\sigma_\lambda L$ geht, wobei σ_λ eine darstellungsabhängige Konstante ist.

Das Potential zweier statischer Ladungen in der Darstellung λ im Abstand r muss also für große r die Form

$$V_\lambda(r) = c_\lambda + \sigma_\lambda r \quad \text{für } r \rightarrow \infty \quad (4.8)$$

annehmen.

Es wurde also gezeigt, dass die Untersuchung des statischen Potentials zwischen zwei Ladungen erlaubt, zwischen einer Phase mit Confinement und einer Deconfinement-Phase einer Theorie zu unterscheiden. Da in dieser Arbeit reine Eichtheorien auf dem Gitter betrachtet werden, muss im folgenden Abschnitt eine Verbindung zwischen Observablen, die in der Gittereichtheorie messbar sind, und dem Potential zwischen zwei Ladungen, die in der Gittereichtheorie nicht als dynamische Objekte existieren, hergestellt werden.

4.3 Das statische Quark-Antiquark-Potential auf dem Gitter

Die Wirkung einer reinen Eichtheorie auf dem Gitter mit einem zusätzlichen Wilson-Quark in der Darstellung r ist nach [32] gegeben durch

$$S = S_W + \sum_x \left\{ (m_q + 4\alpha) \bar{\Psi}_x \Psi_x - \frac{1}{2} \sum_{\mu, -\mu} \bar{\Psi}_x (\alpha + \gamma_\mu) \mathcal{U}_{x,\mu}^{(r)} \Psi_{x+\mu} \right\} = S_W + S_F \quad (4.9)$$

Der eichinvariante Erzeugungsoperator für ein Quark-Antiquark-Paar zur Zeit t im Abstand R in x -Richtung hat die Form

$$Q(t) = \bar{\Psi}_0(t) \Gamma \prod_{n=1}^R \mathcal{U}_{n,x}^{(r)}(t) \Psi_R(t) \quad (4.10)$$

Jetzt kann man berechnen

$$\langle Q^\dagger(T) Q(0) \rangle = \frac{\sum_{n,m} \langle 0 | Q^\dagger | n \rangle \langle n | e^{-HT} | m \rangle \langle m | Q | 0 \rangle}{\langle 0 | e^{-HT} | 0 \rangle} \quad (4.11)$$

$$= \sum_n |c_n|^2 e^{-\Delta E_n T} \quad \text{mit} \quad \Delta E_n = E_n - E_0 \quad (4.12)$$

Andererseits ist der Vakuumerwartungswert gegeben durch

$$\langle Q^\dagger(T) Q(0) \rangle = \int \mathcal{D}\mathcal{U} \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} Q^\dagger(T) Q(0) \exp \{ S_W[\mathcal{U}] + S_F[\Psi, \bar{\Psi}, \mathcal{U}] \} \quad (4.13)$$

Ausintegration der Fermionen liefert

$$\langle Q^\dagger(T) Q(0) \rangle = \int \mathcal{D}\mathcal{U} \det(K) Q^\dagger(T) Q(0) \exp \{ S_W[\mathcal{U}] \} \quad (4.14)$$

mit der Fermionmatrix

$$K_{x,y,\alpha,\beta,a,b} = (m_q + 4\alpha) \left(\delta_{xy} \delta_{\alpha\beta} \delta_{ab} - \frac{1}{2(m_q + 4\alpha)} \left(\sum_{\mu, -\mu} (\alpha + \gamma_\mu)_{\alpha\beta} \mathcal{U}_{x,\mu ab}^{(r)} \delta_{(x+\mu)y} \right) \right) \quad (4.15)$$

Weiterhin gilt folgende Gleichung ($I = (x, \alpha, a)$)

$$\Psi_I \bar{\Psi}_J = K_{IJ}^{-1} \quad (4.16)$$

Nun kann man zeigen, dass der niedrigste nichtverschwindende Beitrag in einer Entwicklung nach $\frac{1}{m_q}$ für $m_q \rightarrow \infty$ gegeben ist durch

$$\langle Q^\dagger(T) Q(0) \rangle \propto C(m_q + 4\alpha)^{-2T} \frac{1}{Z_U} \int \mathcal{D}\mathcal{U} \chi_r[\mathcal{U}(R, T)] e^{-S_W[\mathcal{U}]} \quad (4.17)$$

$$\propto C(m_q + 4\alpha)^{-2T} W_r(R, T) \quad (4.18)$$

Die Matrix $\mathcal{U}(R, T)$ ist das pfadgeordnete Produkt der Links entlang einer rechteckigen Schleife mit Seitenlänge R in Raumrichtung und T in Zeitrichtung. Der Wilson-Loop $W_r(R, T)$ ist der Erwartungswert der Spur von $\mathcal{U}(R, T)$. Es folgt damit

$$\sum_n |c_n|^2 e^{-\Delta E_n T} \propto C(m_q + 4\alpha)^{-2T} W_r(R, T) \quad (4.19)$$

Im Limes $T \rightarrow \infty$ bleibt nur der Zustand mit der niedrigsten Energie über dem Vakuum $\Delta E_{\min} = V_{q\bar{q}}^{\text{total}}(R)$ übrig. Das Potential zwischen zwei Quarks enthält eine vom Abstand R unabhängige Selbstwechselwirkung. Es folgt

$$V_{q\bar{q}}^{\text{total}} = V_r^{\text{selbst}} + V_r(R) = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \{ C(m_q + 4\alpha)^{-2T} W_r(R, T) \} \quad (4.20)$$

Für den R -abhängigen Teil des statischen Quark-Antiquark Potentials in der Darstellung r folgt damit

$$V_r(R) = - \lim_{T \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{W_r(R, T+1)}{W_r(R, T)} \right) \quad (4.21)$$

Auf dem Gitter lässt sich eine Confinement-Phase also durch Messen von großen Wilson-Loops identifizieren. Wenn das statische Quark-Potential das asymptotische Verhalten

$$V_r(R) \sim \sigma_r R \quad (4.22)$$

besitzt für große R und Darstellungen mit N-ality ungleich null, dann existiert eine Confinement-Phase. Detailliertere Überlegungen zeigen, dass das Potential die Form

$$V_r(R) = c_r - \frac{\alpha}{R} + \sigma_r R \quad (4.23)$$

hat und für Wilson-Loops ergibt sich

$$- \ln W_r(R, T) = C_r + V_r(R)T \quad \text{für große } T \quad (4.24)$$

Da auf einem Gitter nicht beliebig große Wilson-Loops gemessen werden können, bietet ein Fit der Wilson-Loops mit dieser Form des Potentials Vorteile und wird deshalb in dieser Arbeit benutzt um die *string tension* zu messen.

4.4 Ordnungsparameter für Confinement-Deconfinement Phasenübergänge

Nachdem gezeigt wurde was Confinement bedeutet und durch welche Observablen im Kontinuum und auf dem Gitter sich Confinement nachweisen lässt, soll in diesem Abschnitt eine Möglichkeit gezeigt werden, wie ein Confinement-Deconfinement-Phasenübergang, der wie bereits erwähnt in der Yang-Mills-Theorie bei endlicher Temperatur stattfindet, identifiziert und charakterisiert werden kann. Mit Hilfe von solchen Ordnungsparametern lassen sich die Phasen eindeutig voneinander abgrenzen und die Art des Übergangs bestimmen. Für Eichtheorien mit nichttrivialem Zentrum bildet der Polyakov-Loop einen solchen Ordnungsparameter.

4.4.1 Der Polyakov-Loop

Der Polyakov-Loop ist im Kontinuum definiert durch (nach der Wickrotation)

$$\mathcal{P}(x) = \mathcal{T} \exp \left(i \int_0^{\beta_T} \mathfrak{A}_0(\tau, x) d\tau \right) \quad (4.25)$$

Das Symbol \mathcal{T} bedeutet hier Pfadordnung. Da für endliche Temperaturen in zeitlicher Richtung periodische Randbedingungen gefordert sind und damit das Eichfeld periodisch bis auf Eichtransformationen ist, gilt

$$\mathfrak{A}_\mu(\tau + \beta_T, x) = \Omega_0(x) (\mathfrak{A}_\mu(x) + \partial_\mu) \Omega_0^\dagger(x) \quad (4.26)$$

und der Polyakov-Loop lässt sich schreiben als

$$\mathcal{P}'(x) = \Omega_0(0, x) \mathcal{T} \exp \left(i \oint \left(\mathfrak{A}_0(\tau, x) + \frac{\partial \chi}{\partial \mu} \right) d\tau \right) \Omega_0^\dagger(\beta_T, x) \quad (4.27)$$

$$= \mathcal{T} \Omega_0(0, x) \exp \left(i \oint \mathfrak{A}_0(\tau, x) d\tau \right) \Omega_0^\dagger(\beta_T, x) \quad (4.28)$$

Auf dem Gitter ist er dementsprechend definiert durch

$$\mathcal{P}_x = \prod_{i=1}^{N_t} \mathcal{U}_{x+ie_0, 0} \quad (4.29)$$

Der Polyakov-Loop ist also eine spezielle Wilson-Schleife, die sich einmal in euklidischer Zeitrichtung um das Gitter windet. Unter Eichtransformationen transformiert er eichvariant, ist also keine physikalische Observable

$$\mathcal{P}'(x) = \Omega(0, x) \mathcal{P}(x) \Omega^\dagger(\beta_T, x) \quad (4.30)$$

Die Übergangsbedingung Gl. (2.24) hat folgende mögliche Lösung

$$\Omega(\tau + \beta_T, x) = \Omega(\tau) z \quad \text{mit } z \in \mathcal{Z}(G) \quad (4.31)$$

Diese Lösung lässt sowohl die Wirkung als auch das Haarmaß invariant. Der Polyakov-Loop transformiert jedoch wie folgt

$$\mathcal{P}'(x) = \Omega(x) \mathcal{P}(x) \Omega^\dagger(x) z \quad (4.32)$$

Eine physikalische (eichinvariante) Observable ist dabei die Spur des Polyakov-Loops $P(x) = \text{tr } \mathcal{P}(x)$. Für sie ergibt sich

$$P'(x) = z P(x) \quad (4.33)$$

Im weiteren Verlauf der Arbeit ist mit Polyakov-Loop immer die Spur gemeint. Sie lässt sich mit der freien Energie F_q eines statischen Quarks in Verbindung bringen [32].

$$\langle P_x \rangle = e^{-F_q N_t} \quad (4.34)$$

Hier ergibt sich die Verbindung zum Confinement. Wenn die asymptotische *string tension* von Null verschieden ist, also in einer Eichtheorie, in der die Eichgruppe ein nichttriviales Zentrum besitzt, dann ist diese freie Energie eines isolierten Quarks in einer Confinement-Phase unendlich. Es ist also nicht möglich ein Quark in dieser Phase zu isolieren. Damit folgt für den Erwartungswert des Polyakov-Loops $\langle P \rangle = 0$. In einer Deconfinement-Phase ist die freie Energie hingegen endlich und damit der Erwartungswert des Polyakov-Loops $\langle P \rangle > 0$. Damit eignet sich der Polyakov-Loop als Ordnungsparameter für einen Phasenübergang der Theorie.

$$\langle P \rangle = \begin{cases} 0 & \text{Confinement} \\ a > 0 & \text{Deconfinement} \end{cases} \quad (4.35)$$

Die Art eines Confinement-Deconfinement-Phasenübergangs lässt sich mit Hilfe von Histogrammen des Polyakov-Loops und seiner Suszeptibilität feststellen. In einer Eichtheorie mit trivialem Zentrum ist der Polyakov-Loop auch in einer Confinement-Phase von Null verschieden. Dieser Aspekt wird im Kapitel Yang-Mills-Theorie mit Eichgruppe G_2 erläutert. In diesem Kapitel soll noch ein weiterer Aspekt des Polyakov-Loops betrachtet werden, der mit der Zentrumssymmetrie zusammenhängt.

4.4.2 Confinement und Zentrumssymmetrie

Wie bereits gezeigt wurde, sind die Yang-Mills-Wirkung und das reduzierte Haarmaß invariant unter Zentrumstransformationen. Der Erwartungswert des Polyakov-Loops transformiert jedoch nichttrivial

$$\langle P \rangle' = z \langle P \rangle \quad \text{mit} \quad z \in \mathcal{Z}(G) \quad (4.36)$$

Wenn der Erwartungswert des Polyakov-Loops einen Wert ungleich Null annimmt, dann ist diese Zentrumssymmetrie der Wirkung *spontan gebrochen*, weil der Grundzustand der Theorie nicht mehr invariant unter Zentrumstransformationen ist. In einer zentrumssymmetrischen Phase der Theorie muss der Polyakov-Loop damit Null sein. Er stellt also einen Ordnungsparameter für den Übergang von einer *symmetrischen* in eine *Zentrumsphase*, also eine *spontane Symmetriebrechung*, dar.

$$\langle P \rangle = \begin{cases} 0 & \text{symmetrische Phase} \\ a > 0 & \text{Zentrumsphase} \end{cases} \quad (4.37)$$

Damit ergibt sich folgender Schluss

$$\begin{aligned} \text{Confinement-Phase} &\iff \text{Zentrumssymmetrie ungebrochen} \\ \text{Deconfinement-Phase} &\iff \text{Zentrumssymmetrie spontan gebrochen} \end{aligned}$$

4 Confinement

Auch in Eichtheorien mit einer Eichgruppe, die ein triviales Zentrum besitzt, kann eine Confinement bzw. Deconfinement-Phase existieren. Hier ist der Polyakov-Loop kein Ordnungsparameter für einen Confinement-Deconfinement-Übergang mehr. Dies wird in den letzten Kapiteln am Beispiel der G_2 -Eichtheorie verdeutlicht.

In diesem Kapitel wurde ein Überblick gegeben, was Confinement bedeutet und wie man es in Gittereichtheorien nachweisen kann. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird Confinement in effektiven Modellen für Eichtheorien betrachtet, die als Freiheitsgrad nur noch den Polyakov-Loop enthalten. Da dieser, wie hier gezeigt wurde, einen Ordnungsparameter für Confinement darstellt, eignen sich effektive Modelle also zur Untersuchung von Confinement in Gittereichtheorien. Im nächsten Kapitel wird gezeigt, wie solche effektiven Wirkungen konstruiert werden können.

5 Effektive Polyakov-Loop-Modelle

Wie in der Einführung beschrieben, sollen in dieser Arbeit effektive Modelle für Eichtheorien untersucht werden, die als Freiheitsgrad nur noch den Polyakov-Loop P in den fundamentalen Darstellungen der Gruppe enthalten. Dazu muss also die 3+1-dimensionale Yang-Mills-Theorie auf eine 3-dimensionale effektive Theorie reduziert werden. Dieser Übergang lässt sich durch Einsetzen einer δ -Distribution ins Pfadintegral erreichen. Damit ergibt sich auf folgende Art eine effektive Wirkung $S_{\text{eff}}[\vec{\chi}]$

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}\mathcal{U} e^{-S_W[\mathcal{U}]} = \int \mathcal{D}\mathcal{U} \mathcal{D}\mu(\vec{\chi}) \prod_x \prod_{p=1}^r \delta(\chi_{p,x}, \chi_p(\mathcal{P}_x[\mathcal{U}])) e^{-S_W[\mathcal{U}]} \\ &= \int \mathcal{D}\mu(\vec{\chi}) e^{-S_{\text{eff}}[\vec{\chi}]} \end{aligned} \quad (5.1)$$

mit $S_W[\mathcal{U}]$ als Wilsonwirkung und dem Polyakov-Loop $\mathcal{P}_x[\mathcal{U}] = \prod_{i=0}^{N_t} \mathcal{U}_{x+ie_t, t}$. χ_p sind die Charaktere in den fundamentalen Darstellungen der Gruppe G mit Rang r und $\vec{\chi} = (\chi_1, \dots, \chi_r)$. Die effektive Wirkung ist demnach also gegeben durch

$$S_{\text{eff}}[\vec{\chi}] = -\ln \int \mathcal{D}\mathcal{U} \prod_x \prod_{p=1}^r \delta(\chi_{p,x}, \chi_p(\mathcal{P}_x[\mathcal{U}])) e^{-S_W[\mathcal{U}]} \quad (5.2)$$

Die Ausintegration der nicht benötigten Freiheitsgrade ist jedoch nicht direkt analytisch möglich, so dass nach anderen Methoden gesucht werden muss, um die effektive Wirkung zu bestimmen. Eine Möglichkeit ist eine Entwicklung in der Kopplungskonstanten $\beta \propto \frac{1}{g^2}$, obwohl die Yang-Mills-Theorie nicht nur im Bereich kleiner β betrachtet werden soll. Diese Entwicklung wird *starke Kopplungsentwicklung* genannt und ist für die Gruppe $SU(N)$ im Detail in den Arbeiten von [48, 49] beschrieben. Hier sollen zunächst die wichtigsten Aspekte dieser Entwicklung wiedergegeben und insbesondere auf den Einfluss der Eichgruppe geachtet werden, da im Verlauf dieser Arbeit auch effektive Wirkungen für G_2 -Yang-Mills konstruiert werden sollen. Im Anschluss werden dann verschiedene Modelle für $SU(3)$ - und $SU(4)$ -Yang-Mills angegeben, die im weiteren Verlauf dieser Arbeit als Grundlage für inverse Monte-Carlo-Simulationen dienen sollen.

5.1 Starke Kopplungsentwicklung

Der 1. Schritt ist die Entwicklung der Wilsonwirkung nach irreduziblen Darstellungen der Eichgruppe G . Dazu wird der Boltzmannfaktor zunächst als Produkt über Plaketten geschrieben. N_c bezeichnet hier die Dimension der fundamentalen Darstellung mit Dynkin-Label $F = (1, 0, \dots, 0)$.

$$\exp(-S_W[\mathcal{U}]) = \exp\left(-\beta \sum_p \left(1 - \frac{1}{N_c} \Re \chi_F[\mathcal{U}_p]\right)\right) = \prod_p \exp(-\beta S_p[\chi_F[\mathcal{U}_p]]) \quad (5.3)$$

5 Effektive Polyakov-Loop-Modelle

Aufgrund der Vollständigkeit und Orthogonalität der Charaktere der Gruppe lässt sich die Plakette-Wirkung S_p weiter entwickeln, wobei das Dynkin-Label $R = (q_1, \dots, q_r)$ für eine beliebige irreduzible Darstellung der Gruppe G steht (r ist der Rang der Gruppe).

$$e^{-\beta S_p} = \sum_R a_R(\beta) \chi_R[\mathcal{U}_p] \quad \text{mit} \quad a_R = \int d\mathcal{U} e^{-\beta S_p[\mathcal{U}]} \bar{\chi}_R[\mathcal{U}] \quad (5.4)$$

Die Koeffizienten lassen sich jetzt nach der Kopplungskonstanten β entwickeln, wobei sich ergibt:

$$a_R = \sum_{k=0}^{\infty} a_R^k \beta^k \quad \text{mit} \quad a_R^k = \frac{(-1)^k}{k!} \int d\mathcal{U} \left(1 - \frac{1}{2N_c} (\chi_F + \bar{\chi}_F) \right)^k \bar{\chi}_R \quad (5.5)$$

Schreibt man die Summe über alle Darstellungen als Doppelsumme mit $r = |R| = \sum_{i=1}^r q_i$, so ergibt sich als Entwicklung der exponentierten Wilson-Wirkung

$$e^{-S_W} = \prod_p \left(\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{R, |R|=r} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_R^k \beta^k \right) \chi_R(\mathcal{U}_p) \right) \quad (5.6)$$

Wie in [48] gezeigt wurde, handelt es sich bei der Summe über r um eine endliche Summe über $r \leq k$ (es gilt $a_R^k = 0$ für $k > |R|$). Damit lassen sich die Summen umordnen und es ergibt sich

$$e^{-S_W} = \prod_p \left(\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k g(k, p) \right) \quad (5.7)$$

mit

$$g(k, p) = \sum_{r=0}^k \sum_{R, |R|=r} a_R^k \chi_R(\mathcal{U}_p) \quad (5.8)$$

Dieser Ausdruck lässt sich mit Hilfe der Cauchy-Formel für Produkte von unendlichen Summen umschreiben zu

$$e^{-S_W} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \left(\sum_{k_1=0}^n \sum_{k_2=0}^{n-k_1} \cdots \sum_{k_{N_p-1}=0}^{n-k_1-\dots-k_{N_p-2}} \prod_{p=1}^{N_p-1} g(k_p, p) g(n - k_1 - \dots - k_{N_p-1}, N_p) \right) \quad (5.9)$$

Dies lässt sich auch schreiben als

$$e^{-S_W} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \left(\sum_{|K|=n} \prod_{p=1}^{N_p} g(k_p, p) \right) := \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n e_n \quad (5.10)$$

mit Multiindex $K = (k_1, \dots, k_{N_p})$ und $|K| = \sum_i k_i$.

Ausintegration der räumlichen Links In einem zweiten Schritt werden nun die nicht benötigten Freiheitsgrade, also alle räumlichen Linkvariablen, ausintegriert. Um dies zu vereinfachen wählt man hier die temporale Eichung, in der alle zeitlichen Links bis auf die Links an den Punkten $(0, x)$ zur Identität werden. Damit ist $\mathcal{P}_x = \mathcal{U}_{(0,x),t}$ und $d\mathcal{P}_x = d\mathcal{U}_{(0,x),t}$. Folglich können im Pfadintegral alle räumlichen Links (Index s) ausintegriert werden und es ergibt sich für die effektive Wirkung

$$e^{-S_{\text{eff}}[P]} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \int \mathcal{D}\mathcal{U}_s e_n := \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n e'_n \quad (5.11)$$

wobei der Strich bedeutet, dass die Summe nur Polyakov-Loop abhängige Terme umfasst. Auszurechnen sind also in n -ter Ordnung Terme der Form

$$\int \mathcal{D}\mathcal{U}_s \left(\sum_{|K|=n} \prod_{p=1}^{N_p} g(k_p, p) \right) \quad (5.12)$$

wobei $g(k, p)$ eine Summe von Charakteren von Plakettvariablen an der Plakette p ist. Es lässt sich zeigen, dass nur Terme nicht verschwinden bzw. eine Polyakov-Loop-Abhängigkeit haben, in denen ein räumlicher Link mindestens zweimal vorkommt. Kommt ein räumlicher Link nur einmal vor, so ist aufgrund der Links- und Rechtsinvarianz des Haarmaßes dieser Term entweder Null oder Konstant, wie durch folgende Rechnung leicht zu sehen ist ($\mathcal{U}_0 \dots \mathcal{U}_3$ sind Teilnehmer an einer Plakette)

$$\begin{aligned} \int d\mathcal{U}_0 d\mathcal{U}_1 d\mathcal{U}_2 d\mathcal{U}_3 \chi_R(\mathcal{U}_0 \mathcal{U}_1 \mathcal{U}_2 \mathcal{U}_3) &= \int d\mathcal{U}_0 d\mathcal{U}_1 d\mathcal{U}_2 d\mathcal{U}_3 \chi_R(\mathcal{V} \mathcal{U}_3) \\ &= \int d\mathcal{U}_0 d\mathcal{U}_1 d\mathcal{U}_2 d\mathcal{U}_3 \chi_R(\mathcal{U}_3) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } |R| > 0 \\ 1, & \text{wenn } |R| = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.13)$$

G. Buss zeigt in seiner Arbeit [48], dass die einzigen Möglichkeiten, eine Polyakov-Loop-Abhängigkeit zu erreichen, die folgenden sind:

1. Es wird die zeitliche Periodizität des Gitters ausgenutzt und Plaketten in Darstellungen mit $|R| > 0$ in Zeitrichtung werden so übereinander gestapelt, dass sie sich einmal um das Gitter wickeln. Diese Terme werden Strickleiterbausteine genannt.
2. Eine Zahl von N Plaketten in Darstellungen mit $|R| > 0$ schließt ein räumliches Volumen ein. Diese Terme lassen sich auf Würfel reduzieren, die jedoch keine Polyakov-Loop-Abhängigkeit liefern.
3. Mischungen aus Würfeln und Strickleitern, die sich jedoch auf Strickleitern reduzieren lassen.

Dabei werden keine gruppenspezifischen Argumente außer der Orthogonalität bzw. Unitarität der Matrizen benutzt und deshalb gelten sie sowohl für $SU(N)$ als auch G_2 .

Der erste Strickleiterterm kann in der Ordnung N_t auftreten, weil genau N_t Plaketten für eine Strickleiter benötigt werden. Dies ist dann der Fall wenn in Gl. (5.10) N_t der Indizes k_i 1 sind und die restlichen Indizes 0. Dieser Term sieht bis auf eine Konstante nach dem

5 Effektive Polyakov-Loop-Modelle

Ausintegrieren folgendermaßen aus (in der Rechnung wurden keine gruppenspezifischen Eigenschaften benutzt)

$$e'_{N_t} \sim \sum_{|R|=1} \sum_{x,i} c_R (\chi_R(\mathcal{P}_x) \bar{\chi}_R(\mathcal{P}_{x+i}) + c.c.) \quad (5.14)$$

Dieses Verfahren lässt sich für beliebige Ordnungen anwenden und es ergibt sich ein Beitrag zur effektiven Wirkung bis zu einer beliebigen Ordnung $k \cdot N_t$

$$e^{-S_{\text{eff}}[P]} = C(\beta) + \sum_{r=1}^k \sum_{|K| \leq k} S_1^k \dots S_r^k \quad (5.15)$$

mit $K = (k_1, \dots, k_r)$ und

$$S^j = \sum_{|R|} \sum_{x,i} C_R(\beta) (\chi_R(\mathcal{P}_x) \chi_{\bar{R}}(\mathcal{P}_{x+i}) + c.c.) \quad (5.16)$$

Endgültig ergibt sich also für die effektive Wirkung (nach Entwickeln des Logarithmus)

$$S_{\text{eff}}[P] = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \left(\sum_{r=1}^k \sum_{|K| \leq k} S^{k_1} \dots S^{k_r} \right)^j \quad (5.17)$$

In [48] wird argumentiert, dass der Logarithmus langreichweitige Korrelationen unterdrückt und deshalb Nächste-Nachbar-Wechselwirkungen die größten Beiträge liefern. Arbeiten von [50, 49] und eigene Simulationen bestätigen dies. Deshalb werden in dieser Arbeit nur nächste Nachbarn berücksichtigt.

Nachdem gezeigt wurde, wie die Entwicklung allgemein aussieht, sollen jetzt die ersten Ordnungen für die Gruppen $SU(3)$ und $SU(4)$ explizit angegeben werden

5.2 Entwicklung für $SU(3)$

Für die Gruppe $SU(3)$ ergeben sich in den verschiedenen Ordnungen folgende Terme ($\langle x, y \rangle$ bedeutet x und y sind nächste Nachbarn)

1. Ordnung

$$S_1 = \sum_{\langle x, y \rangle} (\chi_{(1,0)}(\mathcal{P}_x) \chi_{(0,1)}(\mathcal{P}_y) + c.c.) \quad (5.18)$$

2. Ordnung

$$S_2 = \sum_{\langle x, y \rangle} (\chi_{(1,1)}(\mathcal{P}_x) \chi_{(1,1)}(\mathcal{P}_y) + c.c.) \quad (5.19)$$

$$S_3 = \sum_{\langle x, y \rangle} (\chi_{(2,0)}(\mathcal{P}_x) \chi_{(0,2)}(\mathcal{P}_y) + c.c.) \quad (5.20)$$

$$S_4 = \sum_{\langle x, y \rangle} (\chi_{(1,0)}(\mathcal{P}_x) \chi_{(0,1)}(\mathcal{P}_y) + c.c.)^2 \quad (5.21)$$

Durch Ausreduzieren der Terme in der 2. Ordnung kann man durch Einführen einer zusätzlichen Kopplung auf 5 verschiedene Terme bis zur 2. Ordnung kommen, die jedoch streng genommen nach der starken Kopplungsentwicklung nicht unabhängig sind, jedoch eine größere Flexibilität des Modells erlauben. In dieser Arbeit wird darauf jedoch verzichtet, um möglichst dicht an der starken Kopplungsentwicklung zu bleiben. Dies ist auch sinnvoll, wie in [49] gezeigt werden konnte.

3. Ordnung

$$S_5 = \sum_{\langle x,y \rangle} (\chi_{(2,1)}(\mathcal{P}_x)\chi_{(1,2)}(\mathcal{P}_y) + c.c.) \quad (5.22)$$

$$S_6 = \sum_{\langle x,y \rangle} (\chi_{(3,0)}(\mathcal{P}_x)\chi_{(0,3)}(\mathcal{P}_y) + c.c.) \quad (5.23)$$

$$S_7 = \sum_{\langle x,y \rangle} (\chi_{(1,0)}(\mathcal{P}_x)\chi_{(0,1)}(\mathcal{P}_y)\chi_{(1,1)}(\mathcal{P}_x)\chi_{(1,1)}(\mathcal{P}_y) + c.c.) \quad (5.24)$$

$$S_8 = 2 \sum_{\langle x,y \rangle} (\chi_{(1,0)}(\mathcal{P}_x)\chi_{(0,1)}(\mathcal{P}_y)\chi_{(2,0)}(\mathcal{P}_x)\chi_{(0,2)}(\mathcal{P}_y) + c.c.) \quad (5.25)$$

$$S_9 = \sum_{\langle x,y \rangle} (\chi_{(1,0)}(\mathcal{P}_x)\chi_{(0,1)}(\mathcal{P}_y) + c.c.)^3 \quad (5.26)$$

5.3 Entwicklung für $SU(4)$

Für $SU(4)$ ergibt sich

1. Ordnung

$$S_1 = \sum_{\langle x,y \rangle} (\chi_{(1,0,0)}(\mathcal{P}_x)\chi_{(0,0,1)}(\mathcal{P}_y) + c.c.) \quad (5.27)$$

$$S_2 = \sum_{\langle x,y \rangle} (\chi_{(0,1,0)}(\mathcal{P}_x)\chi_{(0,1,0)}(\mathcal{P}_y) + c.c.) \quad (5.28)$$

2. Ordnung

$$S_3 = \sum_{\langle x,y \rangle} (\chi_{(2,0,0)}(\mathcal{P}_x)\chi_{(0,0,2)}(\mathcal{P}_y) + c.c.) \quad (5.29)$$

$$S_4 = \sum_{\langle x,y \rangle} (\chi_{(1,0,0)}(\mathcal{P}_x)\chi_{(0,0,1)}(\mathcal{P}_y) + c.c.)^2 \quad (5.30)$$

$$S_5 = \sum_{\langle x,y \rangle} (\chi_{(0,2,0)}(\mathcal{P}_x)\chi_{(0,2,0)}(\mathcal{P}_y) + c.c.) \quad (5.31)$$

$$S_6 = \sum_{\langle x,y \rangle} (\chi_{(0,1,0)}(\mathcal{P}_x)\chi_{(0,1,0)}(\mathcal{P}_y) + c.c.)^2 \quad (5.32)$$

$$S_7 = \sum_{\langle x,y \rangle} (\chi_{(1,0,1)}(\mathcal{P}_x)\chi_{(1,0,1)}(\mathcal{P}_y) + c.c.) \quad (5.33)$$

$$S_8 = \sum_{\langle x,y \rangle} (\chi_{(1,1,0)}(\mathcal{P}_x)\chi_{(0,1,1)}(\mathcal{P}_y) + c.c.) \quad (5.34)$$

$$S_9 = \sum_{\langle x,y \rangle} (\chi_{(1,0,0)}(\mathcal{P}_x)\chi_{(0,1,0)}(\mathcal{P}_x)\chi_{(0,1,0)}(\mathcal{P}_y)\chi_{(0,0,1)}(\mathcal{P}_y) + c.c.) \quad (5.35)$$

Dies ist die volle Entwicklung für $SU(4)$ bis zur 2. Ordnung und Beschränkung auf Nächste-Nachbar-Wechselwirkungen.

Die starke Kopplungsentwicklung ist nur eine von vielen möglichen Entwicklungen. Es ist z.B. auch möglich, diese Wirkungen um Potentialterme zu ergänzen. Dabei sollte aber immer auf die Symmetrien der Yang-Mills-Theorie geachtet werden, insbesondere also auf die Zentrumssymmetrie. Die Terme, die sich aus der starken Kopplungsentwicklung ergeben, sind alle zentrumssymmetrisch. Nachdem in den letzten Kapiteln nun die wesentlichen theoretischen und mathematischen Grundlagen besprochen wurden, werden in den folgenden beiden Kapiteln zunächst verschiedene mikroskopische Theorien, insbesondere $SU(3)$ -Yang-Mills, mit Monte-Carlo-Methoden behandelt. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit sollen die Ergebnisse dieser Theorien dann mit effektiven Polyakov-Loop-Modellen, wie sie in diesem Kapitel vorgestellt wurden, reproduziert werden. Dazu werden dann auch die Eigenschaften eines speziellen 3-Kopplungs-Modells erläutert.

6 Modell 1: $SU(3)$ -Yang-Mills-Theorie

Das erste Modell, welches in dieser Arbeit diskutiert wird, ist die $SU(3)$ -Yang-Mills-Theorie in ihrer gitterregularisierten Form, dargestellt durch die Wilson-Wirkung. Sie soll mit Monte-Carlo-Methoden numerisch untersucht werden. Der verwendete Algorithmus zur Erzeugung der Verteilung ist ein $SU(N)$ -Wärmebad-Algorithmus von Cabibbo und Marinari [51, 52] mit zusätzlicher Überrelaxation [53] im Verhältnis 1 : 1. Die Gitterwirkung dieser Theorie ist gegeben durch

$$S[\mathcal{U}] = \beta \sum_{x,\mu\nu} \left\{ 1 - \frac{1}{3} \Re \operatorname{tr}(\mathcal{U}_{x,\mu\nu}) \right\} \quad (6.1)$$

Im Folgenden werden die Ergebnisse auf den Gittern $6^3 \times 2$, $12^3 \times 2$ und $16^3 \times 4$ vorgestellt. Da es in dieser Arbeit um die Konstruktion von effektiven Polyakov-Loop-Modellen geht, ist der Polyakov-Loop die Observable, die hier in der Yang-Mills-Theorie betrachtet wird. Da der Polyakov-Loop als Ordnungsparameter für einen erwarteten Confinement-Deconfinement-Phasenübergang dient, wird sein Wert sowie seine Suszeptibilität in der Nähe des Übergangs betrachtet. Mit Hilfe von Polyakov-Loop-Histogrammen wird entschieden, um welche Ordnung von Phasenübergang es sich handelt. Erwartet wird ein 1. Ordnungs-Phasenübergang. Da es aufgrund der Zentrumssymmetrie der Wirkung keinen Unterschied zwischen den 3 $Z(3)$ -Kopien des Polyakov-Loops gibt wird zunächst jedoch, der Arbeit von [49] folgend, eine Observable definiert, die alle $Z(3)$ -Kopien des Polyakov-Loops auf einen Wert abbildet.

6.1 Der rotierte Polyakov-Loop

Dazu wird der Fundamentalebene von $SU(3)$ in Bereiche aufgeteilt. Dies ist in Abb. (6.1) zu sehen. Der Polyakov-Loop auf einer Konfiguration ergibt sich als Mittelwert über das räumliche Gitter

$$P = \frac{1}{V_s} \sum_x \chi_{(1,0)}(\mathcal{P}_x) \quad (6.2)$$

Der rotierte Polyakov-Loop P_{rot} ist definiert als die Projektion von P auf die $Z(3)$ -Achse (Achsen durch $(0, 0)$ und ein Zentrumselement) mit dem kleinsten Abstand zu P .

$$P_{\text{rot}} = \begin{cases} \Re(P) & : P \in \mathcal{F} \\ -\frac{1}{2}\Re(P) + \frac{\sqrt{3}}{2}\Im(P) & : P \in \mathcal{F}' \\ -\frac{1}{2}\Re(P) - \frac{\sqrt{3}}{2}\Im(P) & : P \in \mathcal{F}'' \end{cases} \quad (6.3)$$

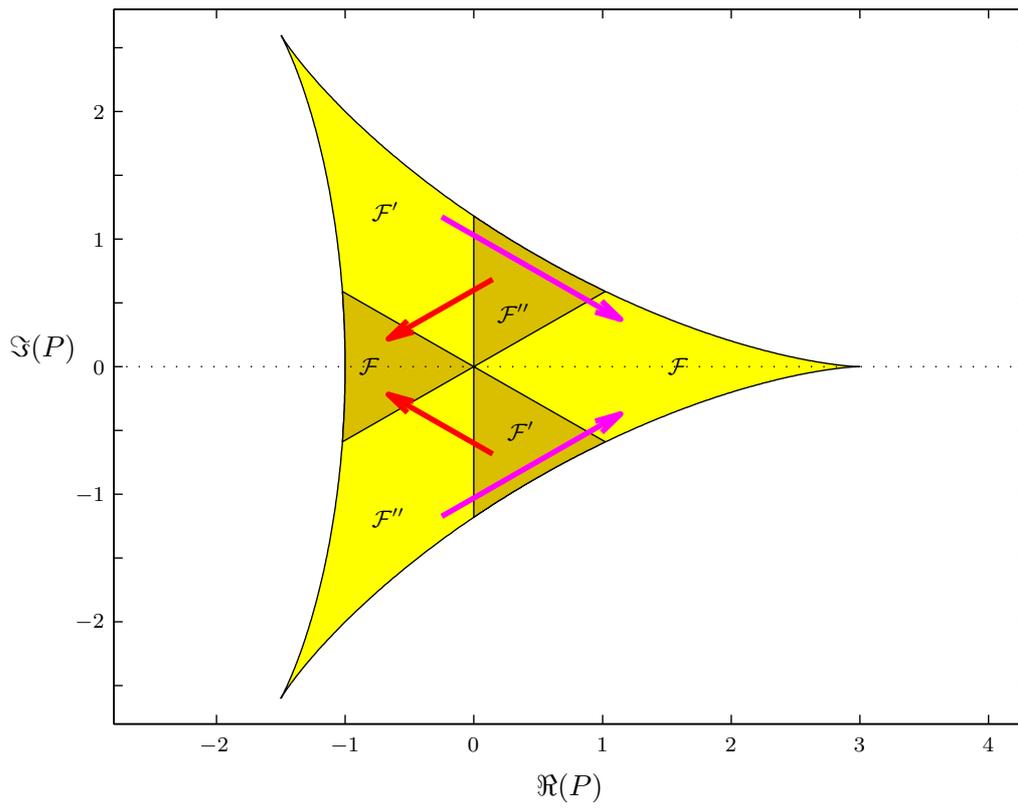


Abbildung 6.1: Fundamentalbereich von $SU(3)$

6.2 Das $6^3 \times 2$ -Gitter

Auf dem $6^3 \times 2$ -Gitter wurde die Theorie im Bereich $\beta = 5.0$ bis $\beta = 5.2$ für 68 Kopplungen mit einer Statistik von 200000 erzeugten Konfigurationen simuliert. Gemessen wurde der rotierte Polyakov-Loop $\langle P_{\text{rot}} \rangle$ sowie seine Suszeptibilität $\langle \Sigma_{P_{\text{rot}}} \rangle$ auf 20000 unabhängigen Konfigurationen. Die Ergebnisse sind in Abb. (6.2) zu sehen. Aus dem Maximum der Suszeptibilität folgt, dass der Confinement-Deconfinement-Phasenübergang bei einer Kopplung von $\beta_c = 5.086(5)$ liegt. Um die Art des Phasenübergangs zu bestimmen, werden Polyakov-Loop-Histogramme betrachtet (Abb. 6.3). Man sieht eine Koexistenz der Confinement- und der Deconfinement-Phase während des Phasenübergangs. Zwischen dem Maximum der Verteilung in der Deconfinement-Phase und dem Maximum der Verteilung der Confinement-Phase liegt ein deutlich sichtbarer Abstand. Es handelt sich also um einen Sprung des Ordnungsparameters und damit um einen Phasenübergang 1. Ordnung.

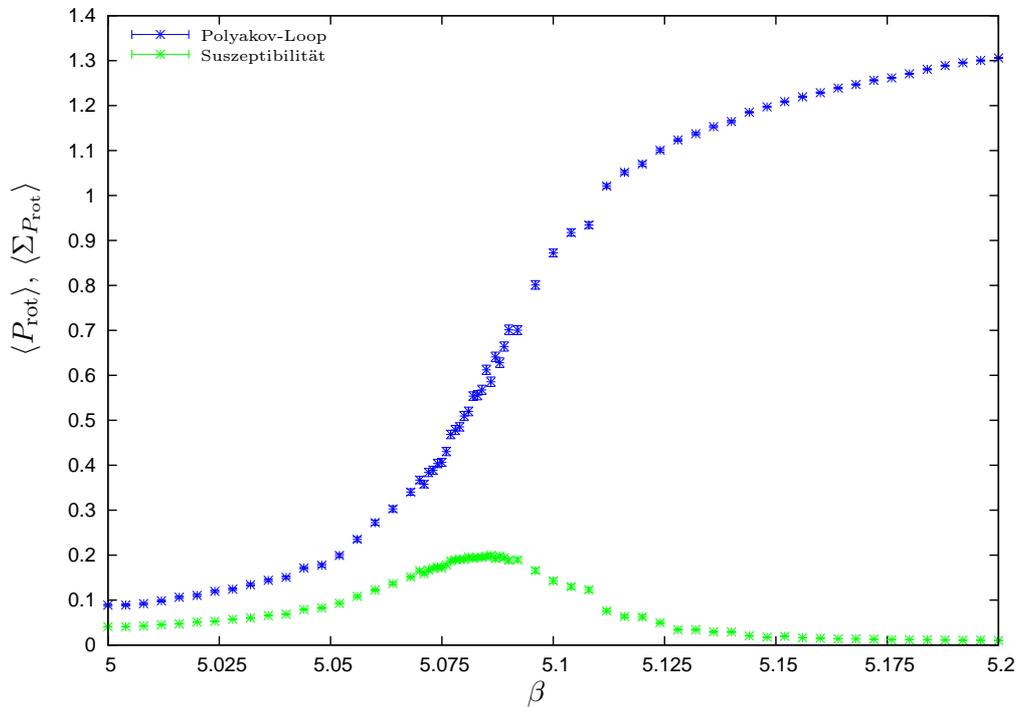


Abbildung 6.2: Rotierter Polyakov-Loop und Suszeptibilität auf dem $6^3 \times 2$ -Gitter

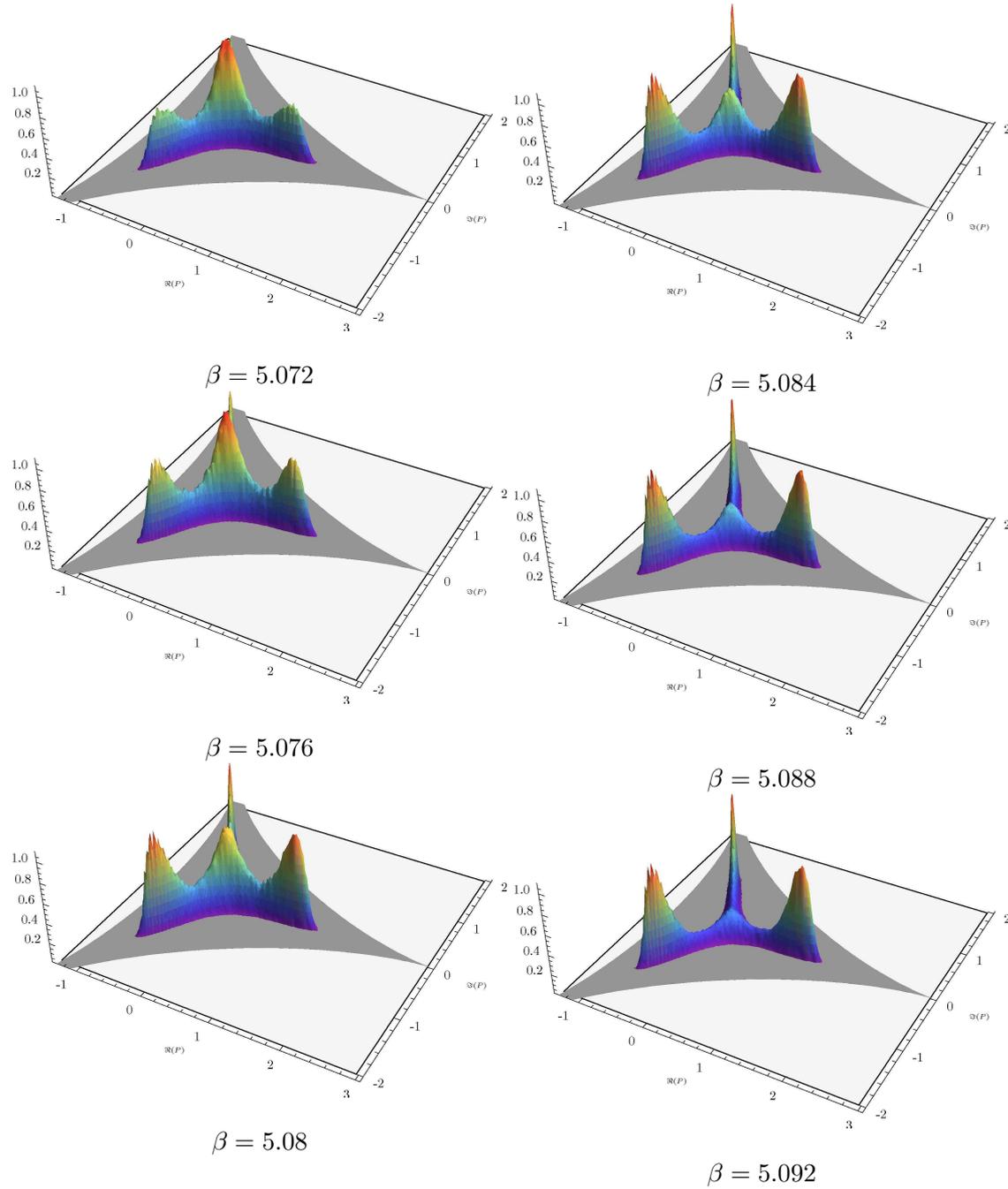


Abbildung 6.3: Polyakov-Loop Histogramme auf dem $6^3 \times 2$ -Gitter

6.3 Das $12^3 \times 2$ -Gitter

Der Confinement-Deconfinement-Übergang auf dem $12^3 \times 2$ Gitter wurde mit einer Statistik von 100000 Konfigurationen pro Eichkopplung β untersucht. Gemessen wurde auf 10000 unabhängigen Konfigurationen. In Abb. (6.4) sind der rotierte Polyakov-Loop sowie seine Suszeptibilität dargestellt. Es ergibt sich eine kritische Kopplung von $\beta_c = 5.094(5)$, die damit nur leicht über der kritischen Kopplung auf dem $6^3 \times 2$ -Gitter liegt. Diese schwache Abhängigkeit vom Volumen ist zu erwarten, weil Korrelationsfunktionen, die am Phasenübergang langreichweitiger werden, nicht schnell genug abfallen und dadurch das endliche Gittervolumen zu sogenannten *finite Volume Effekten* führt (der thermodynamische Limes $V \rightarrow \infty$ ist noch nicht realisiert). Weiter wurden auch hier Histogramme des Polyakov-Loops auf dem Fundamentalbereich von $SU(3)$ betrachtet (Abb 6.5). Es ist wieder deutlich der Sprung des Polyakov-Loops, also ein 1. Ordnungsübergang, zu erkennen. Ebenfalls ist eine Koexistenz der beiden Phasen zu sehen, wenn auch nicht so deutlich wie auf dem $6^3 \times 2$ -Gitter, da der Übergang auf dem größeren Gitter schärfer ist.

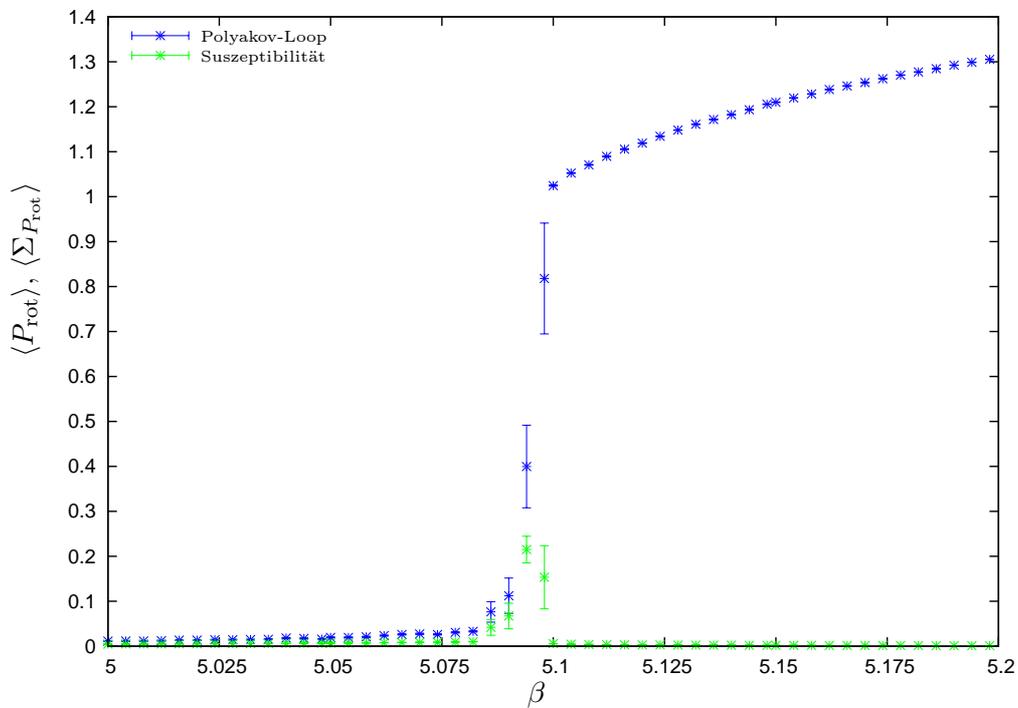


Abbildung 6.4: Rotierter Polyakov-Loop und Suszeptibilität auf dem $12^3 \times 2$ -Gitter

6 Modell 1: $SU(3)$ -Yang-Mills-Theorie

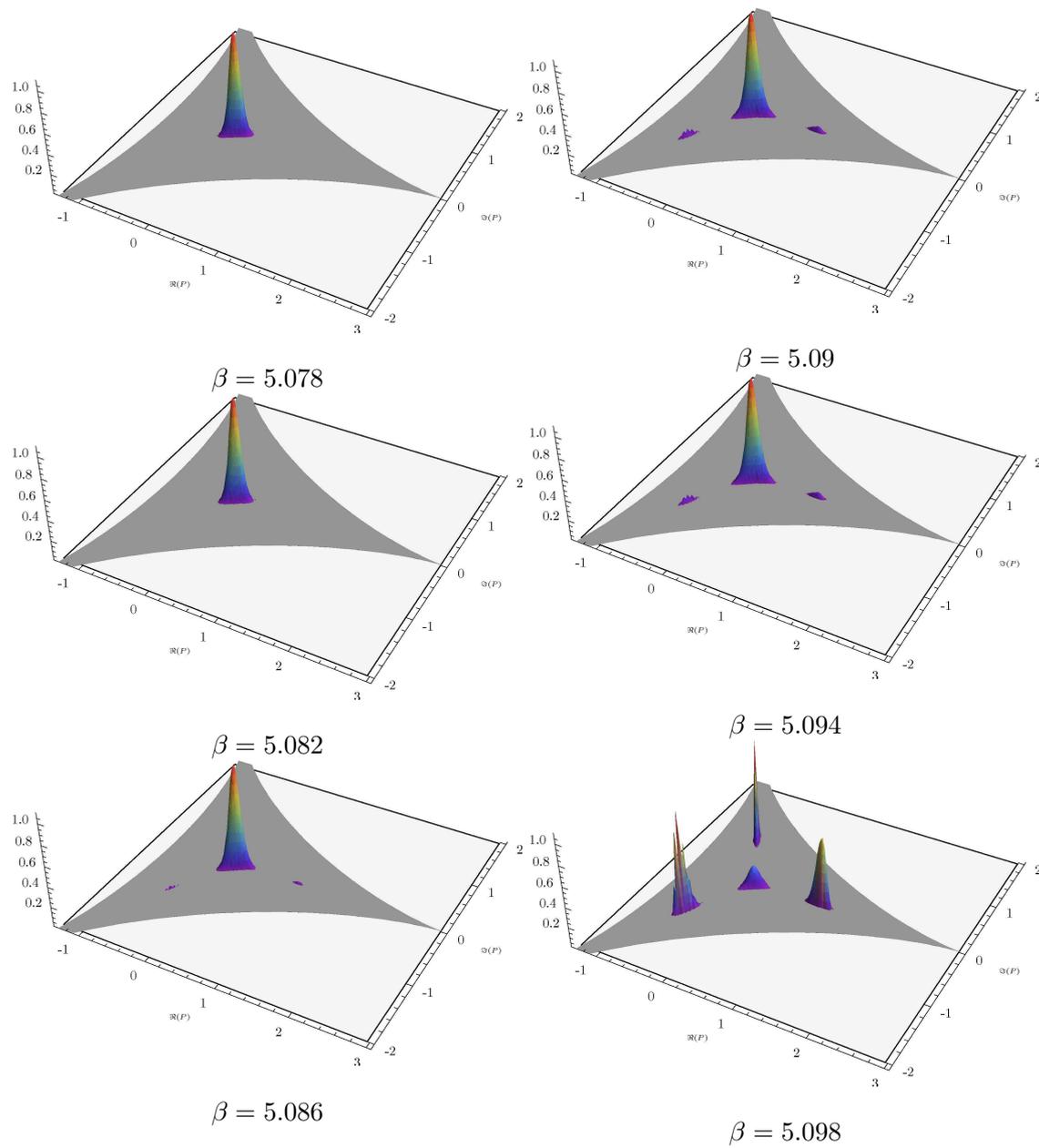


Abbildung 6.5: Polyakov-Loop Histogramme auf dem $12^3 \times 2$ -Gitter

6.4 Das $16^3 \times 4$ -Gitter

Als letztes wird ein $16^3 \times 4$ -Gitter betrachtet, um zusätzlich zu verschiedenen räumlichen Gittergrößen auch eine Variation in der zeitlichen Ausdehnung des Gitters zu haben. Hier wird erwartet, dass sich der Phasenübergang zu größeren Kopplungen β verschiebt, weil der physikalische Phasenübergang bei einer festen Temperatur $T_c = \frac{1}{a(\beta_c)N_t}$ stattfindet. Für größere N_t muss deshalb die Gitterkonstante kleiner sein, was nach Gl. (2.44) größeren kritischen Kopplungen β_c entspricht. Deshalb wurden hier Simulationen in einem Bereich von $\beta = 5.0$ bis $\beta = 6.0$ mit jeweils 100000 Konfigurationen pro Kopplung durchgeführt. Wie in Abb. (6.6) zu sehen ist, liegt die kritische Kopplung bei $\beta_c = 5.69(1)$, also wirklich höher als auf den Gittern mit zeitlicher Ausdehnung von 2 Gitterpunkten. Deutlich zu sehen ist der 1. Ordnungsübergang in den Polyakov-Loop-Histogrammen (Abb. 6.7).

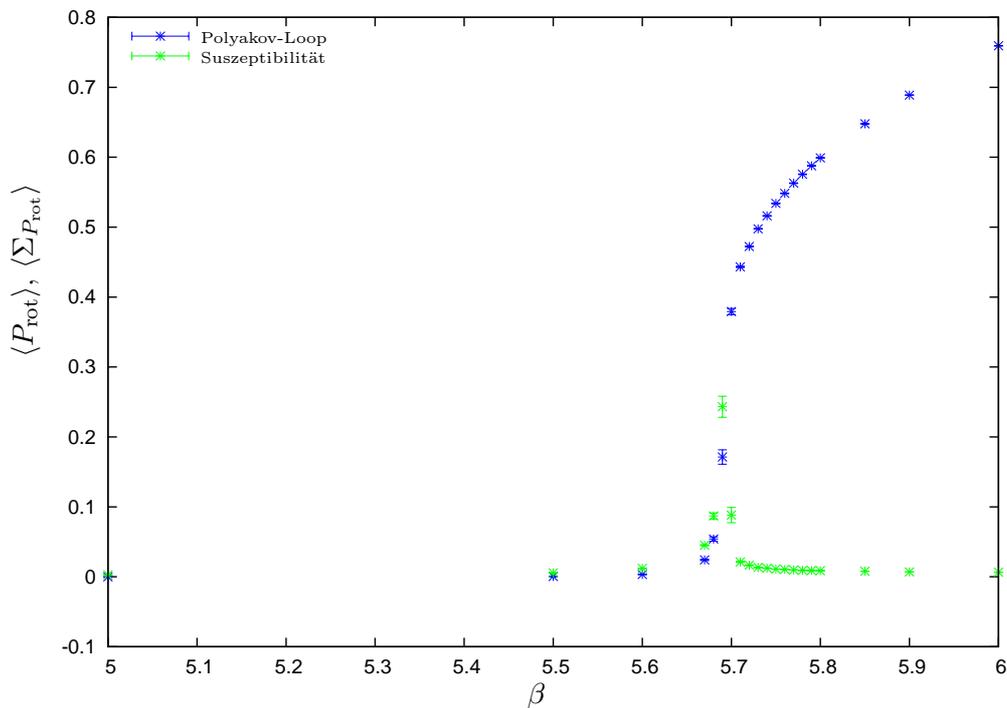


Abbildung 6.6: Rotierter Polyakov-Loop und Suszeptibilität auf dem $16^3 \times 4$ -Gitter

6.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde die Yang-Mills-Theorie mit Eichgruppe $SU(3)$ auf 3 verschiedenen Gittern am Confinement-Deconfinement-Phasenübergang simuliert und kritische Kopplungen sowie die Art des Phasenübergangs bestimmt. Diese hier angesprochenen Aspekte sollen in folgenden Kapiteln mit effektiven Wirkungen rekonstruiert werden.

6 Modell 1: $SU(3)$ -Yang-Mills-Theorie

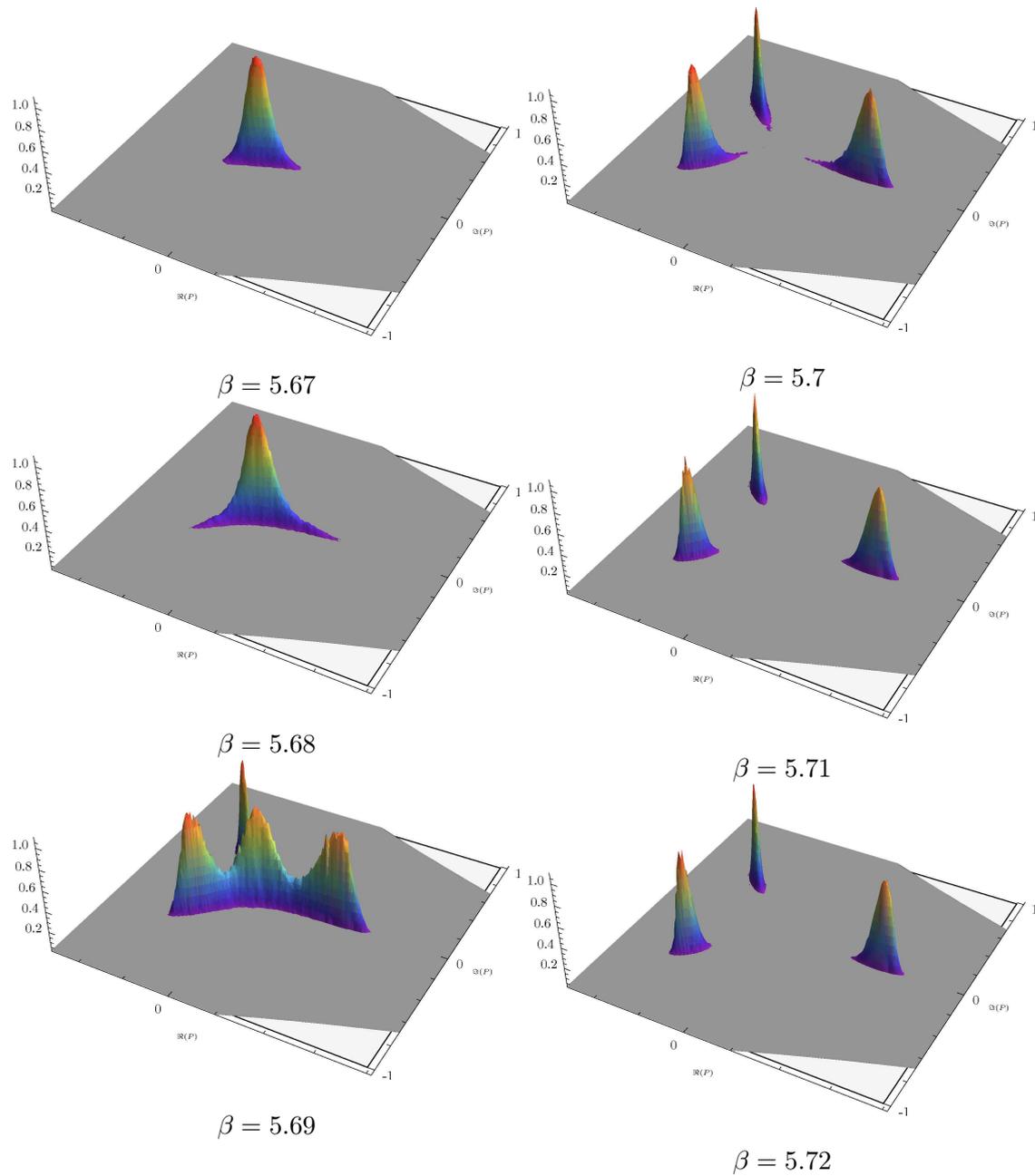


Abbildung 6.7: Polyakov-Loop Histogramme auf dem $16^3 \times 4$ -Gitter

7 Modell 2: Erweiterte $SU(3)$ -Yang-Mills-Theorie

Das zweite Modell, welches betrachtet werden soll, ist die $SU(3)$ -Yang-Mills-Theorie mit einem zusätzlichen Potentialterm, der den Polykov-Loop in der adjungierten Darstellung beinhaltet.

7.1 Teilchen in der adjungierten Darstellung

Die Wirkung dieser Theorie ist gegeben durch [54]

$$S[\mathcal{U}] = S_{\text{YM}}[\mathcal{U}] - \int d^3x h \chi_{(1,1)}(\mathcal{P}(x)) = S_{\text{YM}}[\mathcal{U}] - T \int_0^{\beta_T} \int d^3x h \chi_{(1,1)}(\mathcal{P}(x)) \quad (7.1)$$

oder auf dem Gitter

$$S[\mathcal{U}] = \beta \sum_{x,\mu\nu} \left\{ 1 - \frac{1}{3} \Re \text{tr}(\mathcal{U}_{x,\mu\nu}) \right\} + H \sum_x \chi_{(1,1)}(\mathcal{P}_x) \quad (7.2)$$

Terme dieser Art können durch Teilchen in der adjungierten Darstellung in 1-Loop-Rechnungen als effektives Potential erhalten werden. In [54] wird angegeben, dass sowohl Fermionen als auch Bosonen mit Masse M , die unter der adjungierten Darstellung transformieren, zu einer Änderung ΔV_{eff} des effektiven Potential führen (in $3 + 1$ Dimensionen)

$$\Delta V_{\text{eff}} = - \left[\frac{(2s+1)M^2 T^2}{\pi^2} K_2(M/T) \chi_{(1,1)}(\mathcal{P}) \right] = T h \chi_{(1,1)}(\mathcal{P}), \quad h < 0 \quad (7.3)$$

T ist hier die Temperatur und $2s+1$ ein Beitrag der durch den Spin der Teilchen entsteht. Diese Rechnungen zeigen, dass der Faktor h negativ ist, topologische Anregungen können nach [54, 55] jedoch auch zu einer positiven Kopplung h führen.

7.2 Die Antizentrumsphase

In [54] konnte gezeigt werden, dass positive h zu einer neuen Phase in der Eichtheorie führen, die durch einen negativen rotierten Polyakov-Loop gekennzeichnet ist. Da diese Phase im Fundamentalbereich der Gruppe $SU(3)$ den Zentrums-elementen gegenüberliegt, wird sie als *Antizentrumsphase* bezeichnet. In einer Arbeit von [49] konnte diese Antizentrumsphase auch in einem effektiven Polyakov-Loop-Modell gefunden werden.

7.3 Simulation der erweiterten Yang-Mills-Theorie

Die Wirkung (7.2) wird auf einem $12^3 \times 2$ -Gitter simuliert, weil die Antizentrumsphase nur für $N_s \geq 6N_t$ deutlich auftritt. Dazu wurde ein Phasendiagramm im Kopplungsraum $\beta \in [5, 7]$ und $H \in [0, 0.3]$ erstellt. Es wurden für etwa 2000 Kopplungssätze Simulationen mit einer Statistik von jeweils 40000 Konfigurationen durchgeführt. Gemessen wurde der rotierte Polyakov-Loop auf 4000 unabhängigen Konfigurationen. Das erhaltene Phasendiagramm ist in Abb. 7.1 dargestellt. Für große Kopplung H befindet sich der Polyakov-Loop in einer Confinement-Phase, für kleine H in einer Deconfinement-Phase. Dazwischen liegt entweder ein direkter Übergang von der Deconfinement in die Confinement-Phase oder ein Übergang von der Deconfinement in die Antizentrumsphase und anschließend ein Antizentrums-Confinement-Übergang vor. Ein Schnitt durch die Antizentrumsphase bei $\beta = 6.05$ ist in Abb. 7.2 zu sehen. Die Suszeptibilität zeigt 2 Phasenübergänge an (Abb. 7.3).

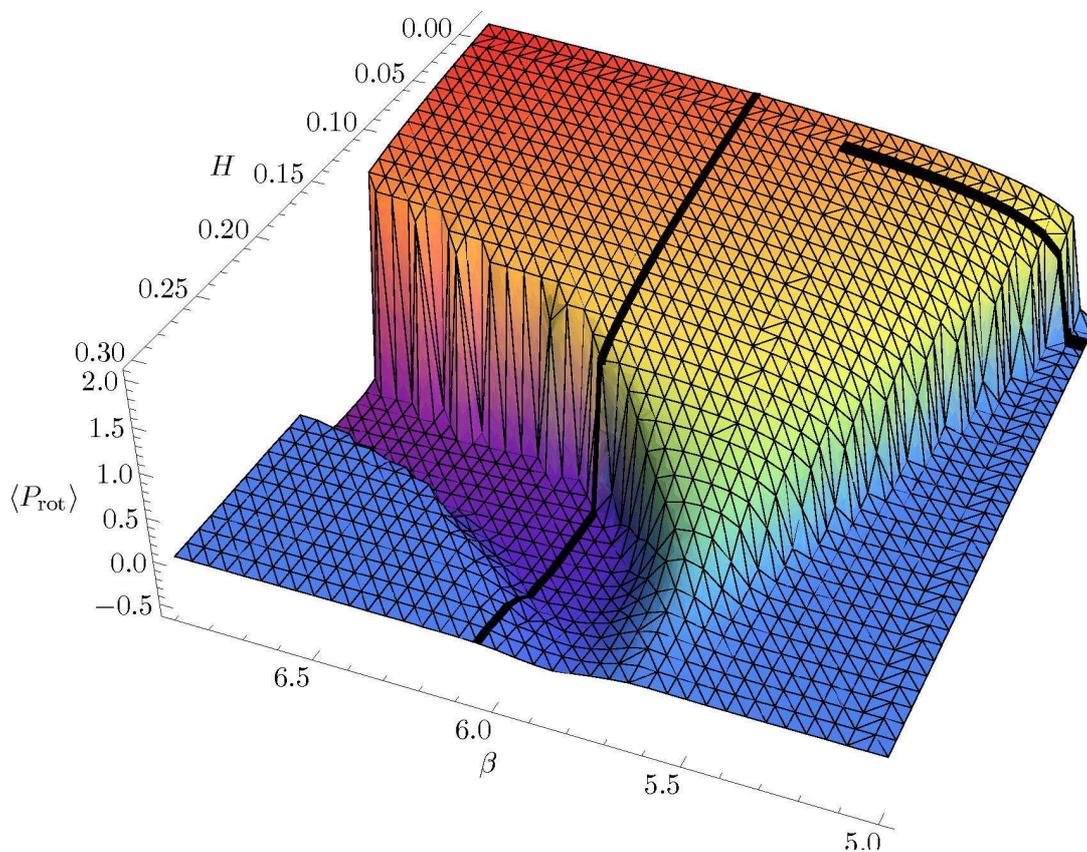


Abbildung 7.1: Rotierter Polyakovloop auf dem $12^3 \times 2$ -Gitter mit Potential in adjungierter Darstellung (die hier markierten Schnitte werden im weiteren Verlauf dieser Arbeit mit effektiven Modellen rekonstruiert)

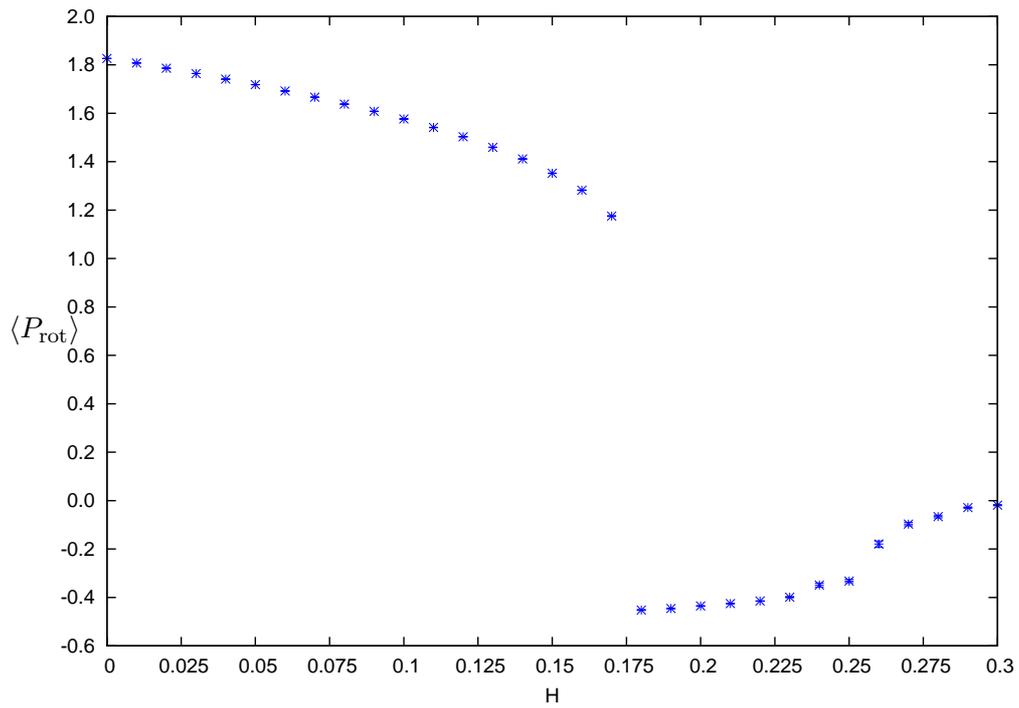


Abbildung 7.2: rotierter Polyakov-Loop in Abhängigkeit der Kopplung H für festes $\beta = 6.05$

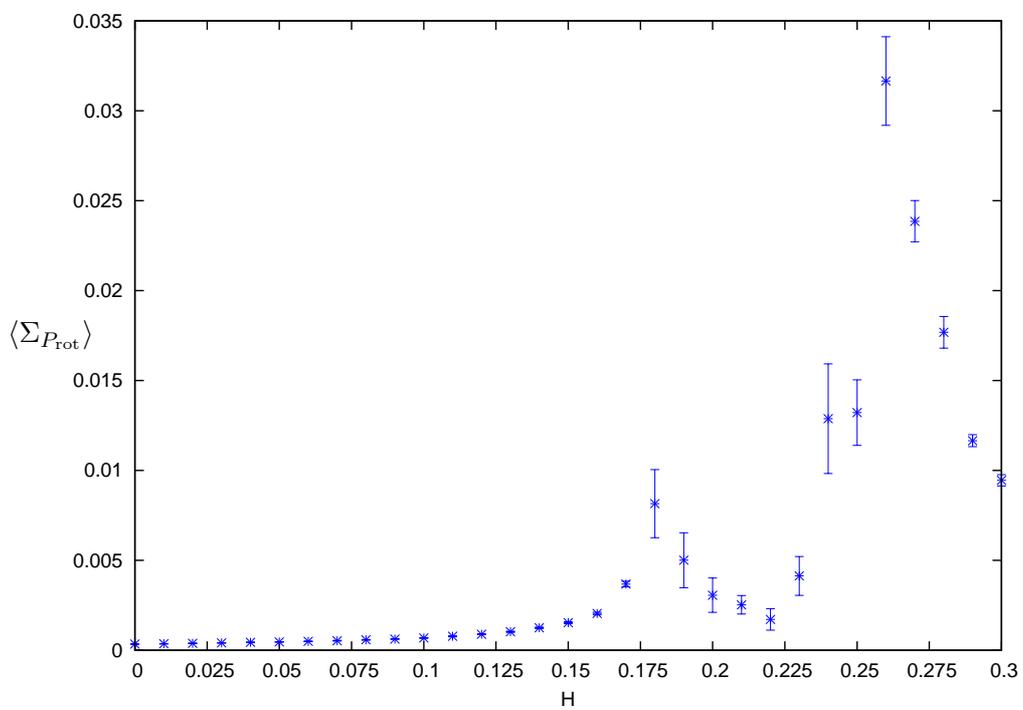


Abbildung 7.3: Suszeptibilität des rotierten Polyakov-Loop in Abhängigkeit der Kopplung H für festes $\beta = 6.05$

7.4 Der Deconfinement-Antizentrums-Übergang

Bei diesem Phasenübergang handelt es sich um einen 1. Ordnungsübergang bei $H = 0.170(2)$ (für das untersuchte $\beta = 6.05$). Der Polyakov-Loop bewegt sich mit größer werdenden H zunächst in Richtung $(0,0)$ und springt dann in die Antizentrumsphase. Dies ist in Abb. 7.4 auf Seite 65 zu sehen.

7.5 Der Antizentrums-Confinement-Übergang

Der Übergang von der Antizentrums in die Confinement-Phase ist ein wahrscheinlich ein 1. Ordnungsübergang (Vermutung in [54]). Dies müsste jedoch auf größeren Gittern noch näher untersucht werden, soll aber nicht Gegenstand dieser Arbeit sein. Auf dem betrachteten Gitter bestätigen die Polyakov-Loop-Histogramme die Vermutung eines 1. Ordnungsübergangs, wie in Abb. 7.5 auf Seite 66 zu sehen ist. Der Polyakov-Loop geht aus der Antizentrumsphase in die symmetrische Phase über, wobei beide Phasen koexistieren. Für das untersuchte $\beta = 6.05$ liegt der Übergang bei $H = 0.260(5)$.

7.6 Zusammenfassung

Das betrachtete Modell enthält eine symmetrische, eine Zentrums- sowie eine Antizentrumsphase. Mit Hilfe von effektiven Polyakov-Loop-Modellen soll für diese *erweiterte Yang-Mills-Theorie* in den nächsten Kapiteln insbesondere die Antizentrumsphase reproduziert werden. Dies stellt die Forderung an eine effektive Wirkung, ebenfalls eine solche Phase zu enthalten.

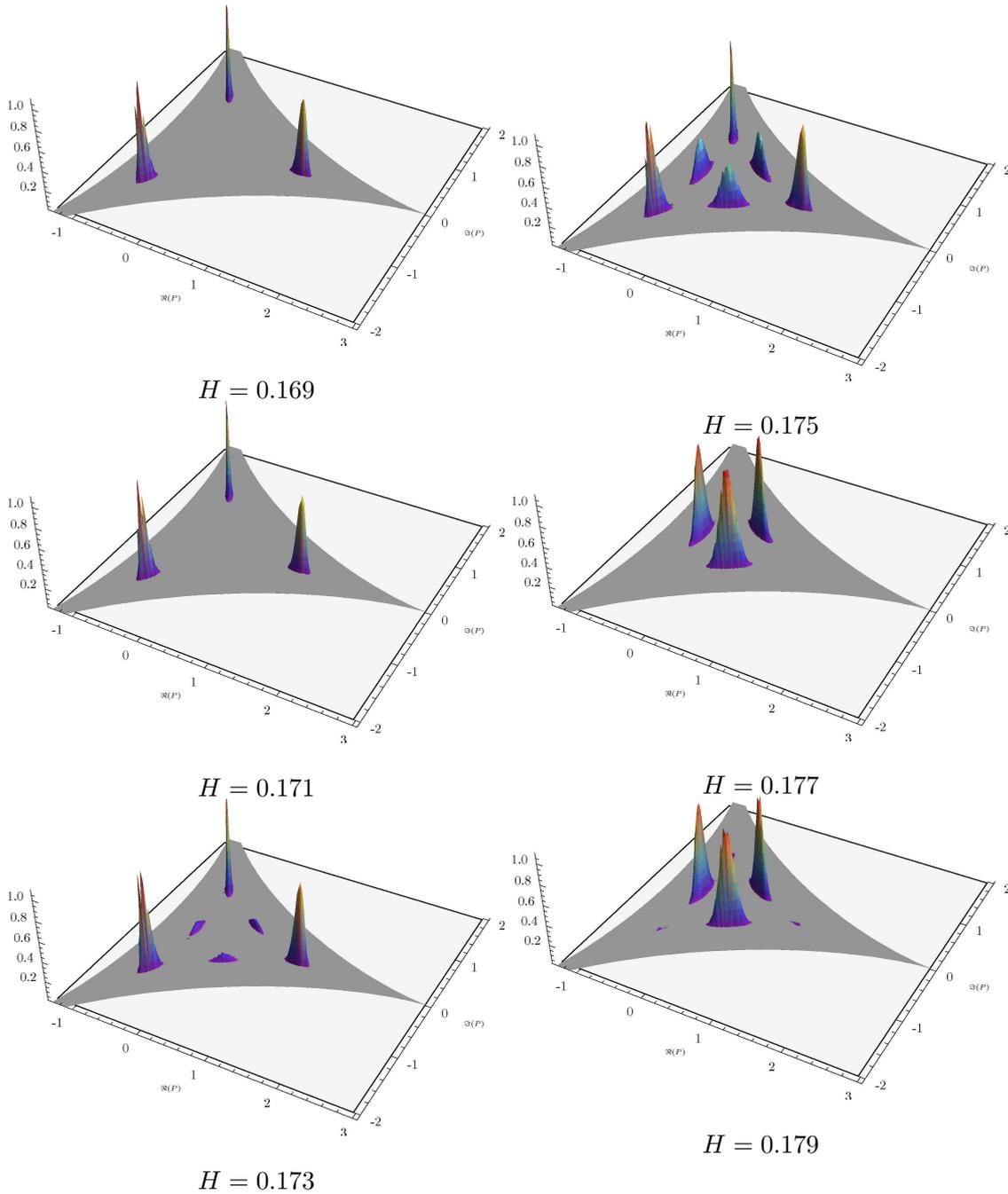


Abbildung 7.4: Polyakov-Loop Histogramme am Übergang Deconfinement-Antizentrums-Phase

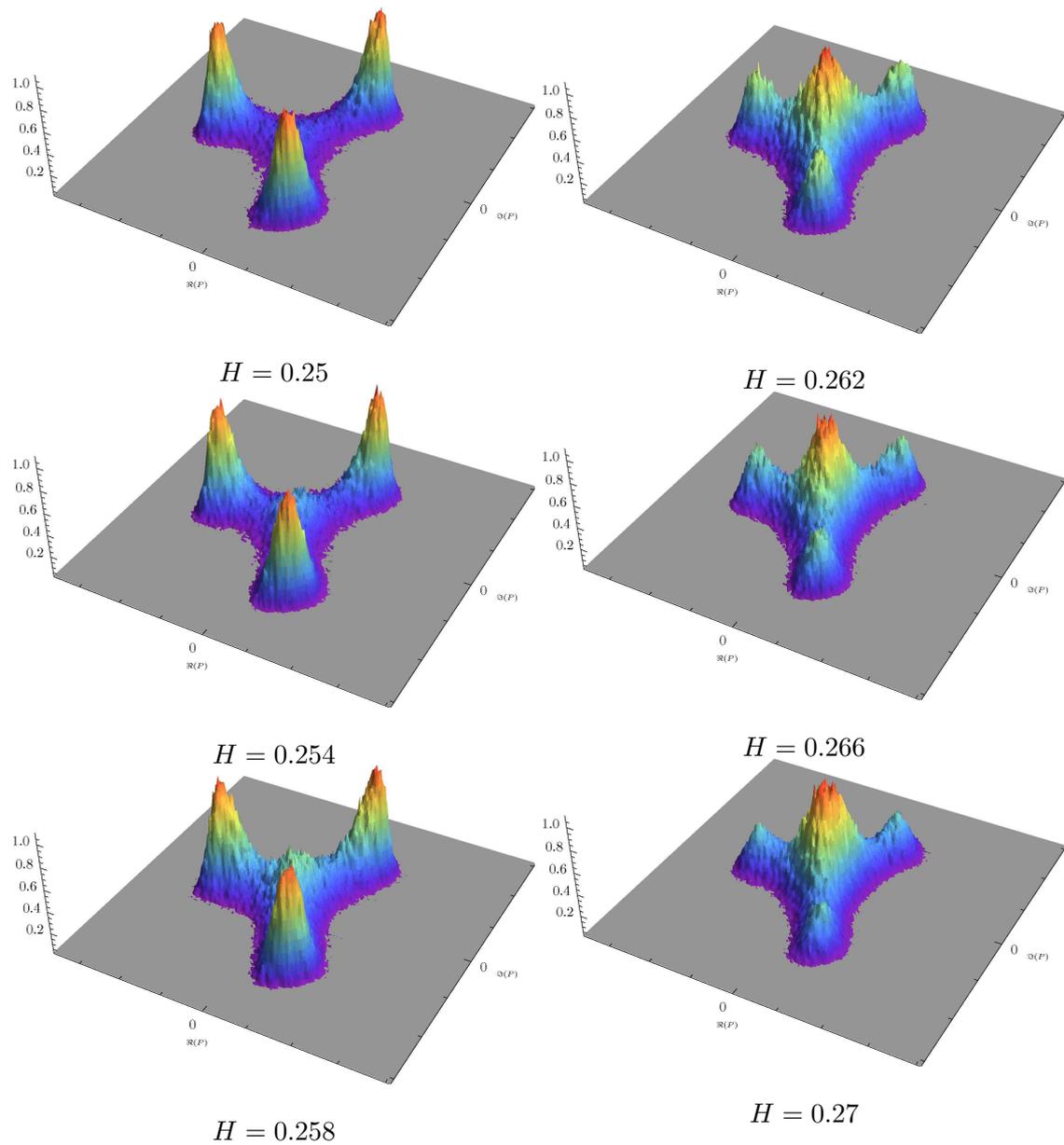


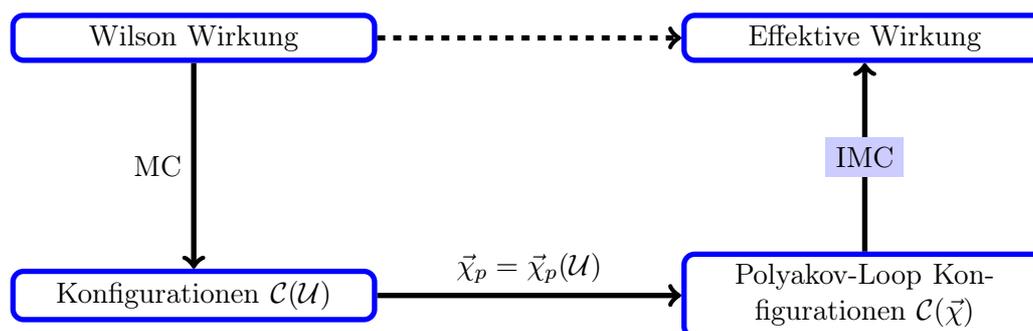
Abbildung 7.5: Polyakov-Loop Histogramme am Übergang Antizentrums-Confinement-Phase

8 Schwinger-Dyson-Methode

In den vorherigen Kapiteln ging es um die $3 + 1$ -dimensionale mikroskopische Yang-Mills-Theorie und effektive Wirkungen in 3 Raumdimensionen, die als Variable den Polyakov-Loop enthielten. Mit der starken Kopplungsentwicklung wurde dabei im Prinzip gezeigt, wie diese Reduktion auf das effektive Modell durchzuführen ist. Die Abhängigkeit der Kopplungen der effektiven Wirkung von der Eichkopplung ließen sich zwar analytisch berechnen, was für einfache Modelle in verschiedenen Arbeiten [56, 57] auch geschehen ist, in dieser Arbeit sollen jedoch Möglichkeiten verglichen werden, die eine numerische Bestimmung der Kopplungen λ für eine gegebene Kopplung β erlauben und für beliebige effektive Wirkungen anwendbar sind. Dazu wird in diesem Kapitel eine Methode vorgestellt, die auf Schwinger-Dyson-Gleichungen, also Integralidentitäten beruht. Im darauf folgenden Kapitel wird dann die sogenannte Dämon-Methode, die auf einer statistischen Beziehung zwischen mikrokanonischem und kanonischem Ensemble beruht, beschrieben. Beide Methoden werden als *inverse Monte-Carlo-Methoden* bezeichnet, da sie aus gegebenen Konfigurationen eine Wirkung berechnen. Deshalb wird zunächst schematisch vorgestellt, wie diese im Folgenden *IMC* genannten Methoden funktionieren.

8.1 Invers Monte-Carlo

Das folgende Diagramm zeigt schematisch wie man von einer gegebenen Wirkung (hier die Wilsonwirkung) zu einer effektiven Wirkung gelangt, wenn dieser Übergang nicht direkt analytisch möglich ist oder mit anderen Methoden (numerisch) überprüft werden soll (gestrichelte Linie).



Mit Hilfe von Monte-Carlo-Simulationen werden zunächst Konfigurationen in den mikroskopischen Variablen (hier den Linkvariablen \mathcal{U}) erstellt. Diese Konfigurationen werden dann zu Konfigurationen in den Freiheitsgraden der effektiven Wirkung reduziert (in diesem Fall dem Polyakov-Loop) und aus diesen Konfigurationen wird dann mit Hilfe von *IMC* die effektive Wirkung konstruiert. Mathematisch stellt sich der Übergang von der mikroskopischen zur effektiven Wirkung wie folgt dar

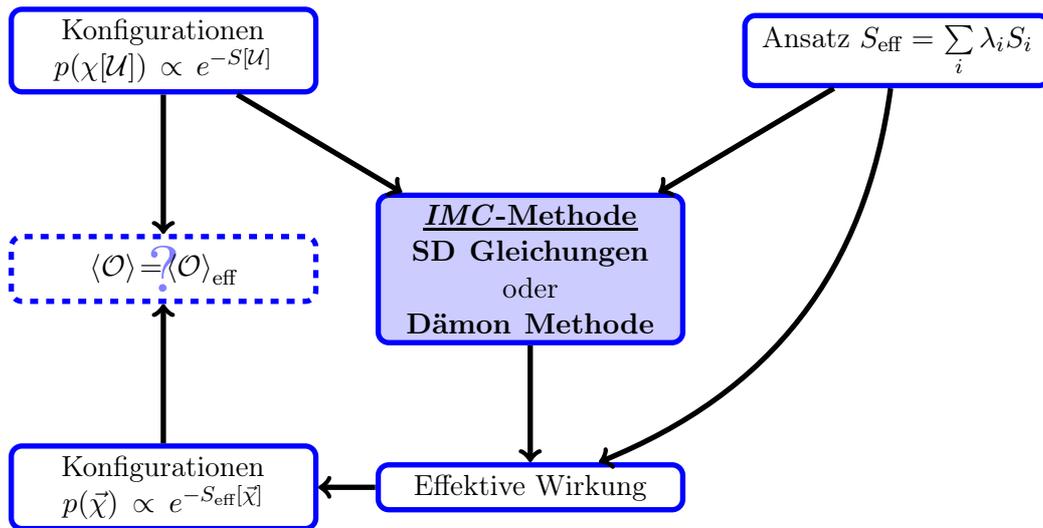
$$\exp(-S_{\text{eff}}[\vec{\chi}]) = \int \mathcal{D}\mathcal{U} \prod_x \prod_{p=1}^r \delta(\chi_{p,x}, \chi_p(\mathcal{P}_x[\mathcal{U}])) e^{-S[\mathcal{U}]} \quad (8.1)$$

Erwartungswerte von Observablen \mathcal{O} , die in beiden Theorien definiert sind, berechnen sich wie folgt

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\mathcal{U} \mathcal{O}(\mathcal{U}) \exp(-S[\mathcal{U}]) \quad (8.2)$$

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{\text{eff}} = \frac{1}{Z_{\text{eff}}} \int \mathcal{D}\mu(\vec{\chi}) \mathcal{O}(\vec{\chi}) \exp(-S_{\text{eff}}[\vec{\chi}]) \quad (8.3)$$

Das *IMC*-Schema sieht wie folgt aus



Die mikroskopischen Konfigurationen, verteilt nach $p(\chi[\mathcal{U}])$, und ein Ansatz der Form $S_{\text{eff}} = \sum_i \lambda_i S_i$ gehen in die *IMC*-Methode ein. Aus diesen Daten werden dann die Kopplungen λ_i der effektiven Wirkung berechnet. Die Berechnung hängt dabei von der verwendeten Methode ab. Anschließend können mit der effektiven Wirkung z.B. über Monte-Carlo-Simulationen Konfigurationen verteilt nach $p(\vec{\chi})$ berechnet werden. Um zu testen wie erfolgreich die Bestimmung der Kopplungen der effektiven Theorie war, müssen Erwartungswerte zwischen mikroskopischer und effektiver Theorie verglichen werden. Hieraus ergibt sich auch das größte Problem der Methode: Während der Berechnung gibt es im Allgemeinen keine Möglichkeit zu kontrollieren, ob die erhaltenen Kopplungen und damit die effektive Wirkung überhaupt eine Reduktion der mikroskopischen Wirkung im Sinne von Gl. (8.1) darstellt. Erst durch das Berechnen von Erwartungswerten in beiden Theorien können Aussagen gemacht werden. Dabei genügt es im Allgemeinen jedoch nicht, die Übereinstimmung in nur einer Observable zu zeigen, oder anders gesagt: Stimmen die Erwartungswerte für eine Observable der Theorie, im Rahmen der notwendigen Trunkierung der effektiven Wirkung, überein, ist dies keine Garantie, dass andere Observable ebenfalls übereinstimmen! Nach dieser grundsätzlichen Beschreibung von *IMC* werden jetzt die beiden Methoden zur Bestimmung der Kopplungen beschrieben.

8.2 Schwinger-Dyson-Gleichungen

Es gibt mehrere Arten von *Schwinger-Dyson-Gleichungen* (SDG) [49]. In dieser Arbeit sollen nur die sogenannten geometrischen SDG (auch geometrische Wardidentitäten [58])

betrachtet werden. Sie ergeben sich aus den Eigenschaften des Haarmaßes der Eichgruppe. Aus der Linksinvarianz des Haarmaßes folgt

$$\int_G d\mu(g) L_a f(g) = 0 \quad (8.4)$$

wobei L_a die Linksableitung in Richtung des Algebra-Elementes T_a ist und f eine Funktion auf G , also $f : G \rightarrow \mathbb{C}$. Gl. (8.4) lässt sich wie folgt zeigen

$$\begin{aligned} \int_G d\mu(g) L_a f(g) &= \int_G d\mu(g) \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\exp(tT_a)g) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \int_G d\mu(\exp(tT_a)g) f(\exp(tT_a)g) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \int_G d\mu(h) f(h) = 0 \end{aligned}$$

Nun werden Klassenfunktionen $F(g) = F(hgh^{-1})$ betrachtet. Die Integration wird dann zu einer Integration über den maximalen abelschen Torus (das Integrationsmaß ist also das reduzierte Haarmaß). Man kann zeigen (siehe [58]), dass für beliebige Klassenfunktionen F und \tilde{F} die Bildung

$$\sum_{a=1}^r L_a (F L_a \tilde{F}) \quad (8.5)$$

wieder eine Klassenfunktion ist. Die fundamentalen Charaktere χ_p , wobei p das Dynkin-
 p -te Stelle
 Label mit Eintrag 1 an der p -ten Stelle bezeichnet, also $p = \underbrace{(0, \dots, 1, \dots, 0)}_r$ und r
 der Rang der Gruppe ist, bilden eine Basis für alle Funktionen auf dem maximalen abelschen Torus. Damit kann man die Wirkung der Linksableitung auf eine Funktion schreiben als

$$L_a F(g) = \sum_{q=1}^r \frac{\partial F(g)}{\partial \chi_q(g)} L_a \chi_q(g) \quad (8.6)$$

und es ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \int_G d\mu_{\text{red}}(g) \sum_a L_a (F(g) L_a \chi_p(g)) \\ &= \int_G d\mu_{\text{red}}(g) \left\{ \sum_{a,q=1}^r (L_a \chi_p(g)) \frac{\partial F(g)}{\partial \chi_q(g)} (L_a \chi_q(g)) + \sum_{a=1}^r F(g) L_a L_a \chi_p(g) \right\} \quad (8.7) \end{aligned}$$

Weiterhin gilt für den Laplaceoperator (quadratischer Casimiroperator)

$$\sum_{a=1}^r L_a L_a \chi_p(g) = -c_p \chi_p(g) \quad (8.8)$$

und damit

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^r L_a L_a \chi_p \chi_q &= \sum_{a=1}^r (\chi_p (L_a L_a \chi_q) + (L_a L_a \chi_p) \chi_q + 2(L_a \chi_p)(L_a \chi_q)) \\ &= -(c_p + c_q) \chi_p \chi_q + 2(L_a \chi_p)(L_a \chi_q) = -\sum_{\lambda} C_{pq}^{\lambda} c_{\lambda} \chi_{\lambda} \end{aligned} \quad (8.9)$$

Einsetzen von Gl. (8.8) und Gl. (8.9) in Gl. (8.7) ergibt

$$0 = \int_G d\mu_{\text{red}} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{q=1}^r \left((c_p + c_q) \chi_p \chi_q - \sum_{\lambda} C_{pq}^{\lambda} c_{\lambda} \chi_{\lambda} \right) \frac{\partial F}{\partial \chi_q} - c_p \chi_p F \right\} \quad (8.10)$$

Diese r Gleichungen ($p = 1 \dots r$) gelten für alle einfachen kompakten Lie-Gruppen. Wie lassen sie sich jetzt zur Bestimmung von Kopplungen der effektiven Wirkung benutzen? Die Gleichungen enthalten eine beliebige Klassenfunktion F . In der Sprache von Eichtheorien sind Klassenfunktionen eichinvariante Observable, also z.B. die effektive Wirkung. Mit dem Ansatz

$$F = f \exp(-S_{\text{eff}}[P]) \quad \text{und} \quad d\mu_{\text{red}} \rightarrow \mathcal{D}P = \prod_x dP_x \quad (8.11)$$

ergibt sich

$$0 = \left\langle \frac{1}{2} \sum_{q=1}^r \left((c_p + c_q) \chi_p \chi_q - \sum_{\lambda} C_{pq}^{\lambda} c_{\lambda} \chi_{\lambda} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial \chi_q} - f \frac{\partial S_{\text{eff}}}{\partial \chi_q} \right) - c_p \chi_p f \right\rangle_{\text{eff}} \quad (8.12)$$

Nun kann man die effektive Wirkung und die Funktion f schreiben als

$$S_{\text{eff}} = \sum_{j=1}^n \kappa_j S_j \quad (8.13)$$

$$f = \{f_i\} \quad (8.14)$$

Gemeint ist, dass man einen Satz von n Funktionen f_i nimmt und daraus eine auswählt. Es folgt

$$\begin{aligned} &\sum_j \kappa_j \left\langle \frac{1}{2} \sum_{q=1}^r \left((c_p + c_q) \chi_p \chi_q - \sum_{\lambda} C_{pq}^{\lambda} c_{\lambda} \chi_{\lambda} \right) f_i \frac{\partial S_j}{\partial \chi_q} \right\rangle_{\text{eff}} \\ &= \left\langle \frac{1}{2} \sum_{q=1}^r \left((c_p + c_q) \chi_p \chi_q - \sum_{\lambda} C_{pq}^{\lambda} c_{\lambda} \chi_{\lambda} \right) \frac{\partial f_i}{\partial \chi_q} - c_p \chi_p f_i \right\rangle_{\text{eff}} \end{aligned} \quad (8.15)$$

Diese Gleichungen sind die gesuchten *Schwinger-Dyson-Gleichungen* (SDG). Sie lassen sich kompakt als Gleichungssystem schreiben, wenn man einführt

$$\begin{aligned} A_{ij}^p &= \frac{1}{2} \sum_{q=1}^r K_{pq} f_i \frac{\partial S_j}{\partial \chi_q} \\ b_i^p &= \frac{1}{2} \sum_{q=1}^r K_{pq} \frac{\partial f_i}{\partial \chi_q} - c_p \chi_p f_i \\ K_{pq} &= \left((c_p + c_q) \chi_p \chi_q - \sum_{\lambda} C_{pq}^{\lambda} c_{\lambda} \chi_{\lambda} \right) \end{aligned} \quad (8.16)$$

$$\langle A^p \rangle_{\text{eff}} \kappa = \langle b^p \rangle_{\text{eff}} \quad (8.17)$$

Die Matrix K ist offensichtlich symmetrisch, also $K_{pq} = K_{qp}$. Diese Gleichungen eignen sich jedoch noch nicht zur Bestimmung von κ , weil die Erwartungswerte mit der effektiven Wirkung gebildet werden, die jedoch nicht bekannt ist sondern erst bestimmt werden soll. Unter der Annahme, dass man eine effektive Wirkung nach Gl. (8.1) bestimmt hat, stimmen die Erwartungswerte der effektiven und der mikroskopischen Theorie jedoch überein, es gilt also $\langle A^p \rangle_{\text{eff}} = \langle A^p \rangle$ und $\langle b^p \rangle_{\text{eff}} = \langle b^p \rangle$ und die Kopplungen κ ergeben sich aus

$$\kappa = \langle A^p \rangle^{-1} \langle b^p \rangle \quad (8.18)$$

Im Falle der starken Kopplungsentwicklung würde dies bedeuten, dass man alle Terme der Entwicklung, also eine unendliche Reihe, berücksichtigen müsste. Da dies in der Praxis jedoch nicht möglich ist, ist eine *gute* Näherung (Trunkierung) für die effektive Wirkung und eine sinnvolle Wahl der Funktion f notwendig, um trotz der Näherung, dass Erwartungswerte der mikroskopischen und der effektiven Theorie übereinstimmen, brauchbare Ergebnisse zu erhalten. Die Eigenwerte des quadratischen Casimiroperators lassen sich wie folgt ausrechnen, wenn Λ das Höchstgewicht einer irreduziblen Darstellung ist [41].

$$c_{\Lambda} = \langle \Lambda, \Lambda + 2\delta \rangle \quad (8.19)$$

wobei $\delta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \alpha$ die Hälfte der Summe über alle einfachen positiven Wurzeln ist. Jedes Höchstgewicht lässt sich als Summe *einfacher Wurzeln* schreiben

$$\Lambda = \sum_i \lambda_i \alpha_i \quad (8.20)$$

Der Eigenwert des quadratischen Casimiroperators lässt sich dann auf die Dynkin-Koeffizienten der Darstellung zurückführen, die gegeben sind durch

$$n_i = 2 \frac{\langle \Lambda, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} = 2 \sum_j \lambda_j \frac{\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} = \sum_j \lambda_j A_{ji} \quad (8.21)$$

Damit folgt

$$\Lambda = \sum_i \lambda_i \alpha_i = \sum_{i,j} n_j A_{ji}^{-1} \alpha_i \quad (8.22)$$

Einsetzen liefert (Summation über alle Indizes)

$$\begin{aligned} c_\Lambda &= n_j A_{ji}^{-1} n_k A_{kl}^{-1} \underbrace{\langle \alpha_i, \alpha_l \rangle}_{\frac{1}{2} \langle \alpha_l, \alpha_l \rangle A_{il}} + 2n_j A_{ji}^{-1} \langle \alpha_i, \delta \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle \alpha_j, \alpha_j \rangle n_j n_k A_{kj}^{-1} + 2n_j A_{ji}^{-1} \langle \alpha_i, \delta \rangle \end{aligned} \quad (8.23)$$

Weiter gilt für δ

$$\delta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \alpha = \sum_{p=1}^r \Lambda_p \quad (8.24)$$

wobei Λ_p die Höchstgewichte der fundamentalen Darstellungen sind. Es gilt somit $\Lambda_p = \sum_{i,j} \delta_{jp} A_{ji}^{-1} \alpha_i = \sum_i A_{pi}^{-1} \alpha_i$ und damit $\delta = \sum_{i,p} A_{pi}^{-1} \alpha_i$. Weiter folgt

$$\begin{aligned} c_\Lambda &= \frac{1}{2} \langle \alpha_j, \alpha_j \rangle n_j n_k A_{kj}^{-1} + 2n_j A_{ji}^{-1} A_{pk}^{-1} \underbrace{\langle \alpha_i, \alpha_k \rangle}_{\frac{1}{2} \langle \alpha_k, \alpha_k \rangle A_{ik}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle n_j n_k A_{kj}^{-1} + 2n_j A_{ji}^{-1} A_{pk}^{-1} \langle \alpha_k, \alpha_k \rangle A_{ik} \right) \\ &= \frac{1}{2} \langle \alpha_j, \alpha_j \rangle \left(n_j n_k A_{kj}^{-1} + 2n_j A_{pj}^{-1} \right) \end{aligned} \quad (8.25)$$

Damit ergibt sich also endgültig folgende Form, die nur von den Dynkin-Koeffizienten und der inversen Cartan-Matrix abhängt

$$c_\Lambda = \sum_{j,k=1}^r \frac{1}{2} \langle \alpha_j, \alpha_j \rangle n_j A_{kj}^{-1} (n_k + 2) \quad (8.26)$$

Da in dieser Arbeit speziell die Gruppen $SU(N)$ und G_2 bearbeitet werden sollen, werden die SDG jetzt für diese Gruppen spezialisiert. Im Anschluss wird dann eine Wahl für die Funktionen f_i getroffen.

8.2.1 SDG für $SU(N)$

Für die Gruppe $SU(N)$ lässt sich die Cartan-Matrix allgemein invertieren

$$A_{ij}^{-1} = \min(i, j) - \frac{ij}{N} \quad (8.27)$$

Die einfachen Wurzeln haben alle dieselbe Länge und damit ergibt sich

$$c_\Lambda = \sum_{j,k=1}^r n_j \left(\min(k, j) - \frac{kj}{N} \right) (n_k + 2) \quad (8.28)$$

Benötigt werden die Casimiroperatoreigenwerte in fundamentalen Darstellungen Λ_p mit $(n_p)_i = \delta_{ip}$, die sich damit einfach ergeben zu

$$\begin{aligned}
 c_p &= \left(p - \frac{pp}{N}\right) + 2 \sum_{k=1}^r \left(\min(k, p) - \frac{kp}{N}\right) \\
 &= \left(p - \frac{pp}{N}\right) + 2 \underbrace{\sum_{k=1}^p k}_{\frac{p(p+1)}{2}} + 2p \underbrace{\sum_{k=p+1}^r 1}_{r-p} - \frac{2p}{N} \underbrace{\sum_{k=1}^r k}_{\frac{r(r+1)}{2}} \\
 &= \frac{N+1}{N} p(N-p)
 \end{aligned} \tag{8.29}$$

Weiter gilt für fundamentale Darstellungen von $SU(N)$

$$\chi_p \chi_q = \chi_{(\Lambda_p + \Lambda_q)} + \chi_{(p-1)} \chi_{(q+1)} \quad \text{für } p \geq q \tag{8.30}$$

wobei als Konvention angenommen wird $\chi_0 = 1$ und $\chi_{a < 0} = 0$. Iteriertes Anwenden liefert (für $p \geq q$)

$$\begin{aligned}
 -L^2 \chi_p \chi_q &= \sum_{\lambda} C_{pq}^{\lambda} c_{\lambda} \chi_{\lambda} = \sum_{i=0}^{\min(p, r-q)} c_{(\Lambda_{(p-i)} + \Lambda_{(q+i)})} \chi_{(\Lambda_{(p-i)} + \Lambda_{(q+i)})} \\
 &= \sum_{i=0}^{\min(p, N-q)} c_{(\Lambda_{(p-i)} + \Lambda_{(q+i)})} (\chi_{(p-i)} \chi_{(q+i)} - \chi_{(p-i-1)} \chi_{(q+i+1)})
 \end{aligned} \tag{8.31}$$

Es müssen also auch noch die Casimir-Eigenwerte $c_{(\Lambda_p + \Lambda_q)}$ berechnet werden. Dies geht analog mit $(n_{(\Lambda_p + \Lambda_q)})_i = \delta_{ip} + \delta_{iq}$.

$$\begin{aligned}
 c_{(\Lambda_p + \Lambda_q)} &= \sum_{j,k=1}^r (\delta_{jp} + \delta_{jq}) \left(\min(k, j) - \frac{kj}{N}\right) (\delta_{kp} + \delta_{kq} + 2) \\
 &= c_p + c_q + \sum_{j,k=1}^r \delta_{jp} \left(\min(k, j) - \frac{kj}{N}\right) \delta_{kq} + \sum_{j,k=1}^r \delta_{jq} \left(\min(k, j) - \frac{kj}{N}\right) \delta_{kp} \\
 &= c_p + c_q + \left(\min(q, p) - \frac{qp}{N}\right) + \left(\min(p, q) - \frac{pq}{N}\right) \\
 &= c_p + c_q + 2 \left(\min(p, q) - \frac{pq}{N}\right)
 \end{aligned} \tag{8.32}$$

Damit ergibt sich für $p \geq q$

$$\begin{aligned}
 K_{pq} &= \left((c_p + c_q) \chi_p \chi_q - \sum_{\lambda} C_{pq}^{\lambda} c_{\lambda} \chi_{\lambda} \right) \\
 &= f_{pq0} \chi_p \chi_q - \sum_{i=0}^{\min(p, N-q)} g_{pqi} (\chi_{(p-i)} \chi_{(q+i)} - \chi_{(p-i-1)} \chi_{(q+i+1)})
 \end{aligned} \tag{8.33}$$

mit

$$f_{pqi} = \frac{N+1}{N} ((p-i)(N-p+i) + (q+i)(N-q-i))$$

$$g_{pqi} = f_{pqi} + 2 \left(\min(p-i, q+i) - \frac{(p-i)(q+i)}{N} \right)$$

Gleichung (8.33) ist die gesuchte allgemeine Matrix (SDG für $SU(N)$). Sie kann bei Angabe von N sofort explizit aufgeschrieben werden. Dies soll jetzt für die Gruppen $SU(3)$ und $SU(4)$ geschehen.

SDG für $SU(3)$

$SU(3)$ hat Rang 2. Mit $P = \chi_{(1,0)}$ und $\bar{P} = \chi_{(0,1)}$ folgt

$$K_{11} = \frac{16}{3}P^2 - \frac{20}{3}(P^2 - \bar{P}) - \frac{8}{3}\bar{P} = -\frac{4}{3}P^2 + 4\bar{P} \quad (8.34)$$

$$K_{21} = \frac{16}{3}P\bar{P} - 6(P\bar{P} - 1) = -\frac{2}{3}P\bar{P} + 6 \quad (8.35)$$

$$K_{22} = \bar{K}_{11} = -\frac{4}{3}\bar{P}^2 + 4P \quad (8.36)$$

und damit ergeben sich folgende SDG

$$\sum_j \left\langle \left(-\frac{4}{3}P^2 + 4\bar{P} \right) f_i \frac{\partial S_j}{\partial P} + \left(-\frac{2}{3}P\bar{P} + 6 \right) f_i \frac{\partial S_j}{\partial \bar{P}} \right\rangle \kappa_j =$$

$$\left\langle \left(-\frac{4}{3}P^2 + 4\bar{P} \right) \frac{\partial f_i}{\partial P} + \left(-\frac{2}{3}P\bar{P} + 6 \right) \frac{\partial f_i}{\partial \bar{P}} - \frac{16}{3}P f_i \right\rangle \quad \text{für } p = 1 \quad (8.37)$$

und

$$\sum_j \left\langle \left(-\frac{2}{3}P\bar{P} + 6 \right) f_i \frac{\partial S_j}{\partial P} + \left(-\frac{4}{3}\bar{P}^2 + 4P \right) f_i \frac{\partial S_j}{\partial \bar{P}} \right\rangle \kappa_j =$$

$$\left\langle \left(-\frac{2}{3}P\bar{P} + 6 \right) \frac{\partial f_i}{\partial P} + \left(-\frac{4}{3}\bar{P}^2 + 4P \right) \frac{\partial f_i}{\partial \bar{P}} - \frac{16}{3}\bar{P} f_i \right\rangle \quad \text{für } p = 2 \quad (8.38)$$

Die effektive Wirkung für $SU(3)$ ist reell und zentrumssymmetrisch ($\mathcal{Z}(3)$). Wählt man

$$f_i = \frac{\partial S_i}{\partial \chi_p} \quad (8.39)$$

so werden die beiden Gleichungen für $p = 1$ und $p = 2$ komplex konjugiert zueinander und invariant unter $\mathcal{Z}(3)$ -Zentrumstransformationen.

SDG für $SU(4)$

$SU(4)$ hat Rang 3. Mit $P = \chi_{(1,0,0)}$, $\bar{P} = \chi_{(0,0,1)}$ und $Q = \chi_{(0,1,0)}$ folgt

$$K_{11} = 4Q - \frac{3}{2}P^2 \quad (8.40)$$

$$K_{21} = 6\bar{P} - PQ \quad (8.41)$$

$$K_{31} = 8 - 4Q^2 + \frac{7}{2}P\bar{P} \quad (8.42)$$

$$K_{32} = 6P - Q\bar{P} \quad (8.43)$$

$$K_{22} = 8 - 2Q^2 + 4P\bar{P} \quad (8.44)$$

$$K_{33} = 4Q - \frac{3}{2}\bar{P}^2 \quad (8.45)$$

Daraus ergeben sich dann die SDG für $SU(4)$.

8.2.2 SDG für G_2

Die Cartanmatrix für G_2 lautet

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad (8.46)$$

Damit ergibt sich für die Eigenwerte des quadratischen Casimiroperators mit Höchstgewicht $\lambda = (n_1, n_2)$

$$c_\lambda = 10n_1 + 2n_1^2 + 18n_2 + 6n_1n_2 + 6n_2^2 \quad (8.47)$$

Die Ausreduktion der Tensorprodukte ist im Kapitel Gruppentheorie angegeben. Mit $\chi_{(1,0)} = P_7$ und $\chi_{(0,1)} = P_{14}$ ergibt sich für die Matrix K

$$K_{11} = 28 + 16P_7 + 4P_{14} - 4P_7^2 \quad (8.48)$$

$$K_{21} = 14P_7^2 - 6P_7P_{14} + 16P_7 - 14P_{14} - 14 \quad (8.49)$$

$$K_{22} = 28 + 12P_7^3 + 20P_7^2 - 24P_7P_{14} - 44P_7 - 8P_{14} - 12P_{14}^2 \quad (8.50)$$

Damit ergeben sich folgende SDG für $p = 1$

$$\begin{aligned} & \sum_j \left\langle f_i \left((14 + 8P_7 - 2P_7^2 + 2P_{14}) \frac{\partial S_j}{\partial P_7} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (-7 + 8P_7 + 7P_7^2 - 7P_{14} - 3P_7P_{14}) \frac{\partial S_j}{\partial P_{14}} \right) \right\rangle \kappa_j \\ & = - \left\langle 12P_7 f_i - (14 + 8P_7 - 2P_7^2 + 2P_{14}) \frac{\partial f_i}{\partial P_7} \right. \\ & \quad \left. + (7 - 8P_7 - 7P_7^2 + 3P_7P_{14} + 7P_{14}) \frac{\partial f_i}{\partial P_{14}} \right\rangle \end{aligned} \quad (8.51)$$

und für $p = 2$

$$\begin{aligned}
& \sum_j \left\langle f_i \left((7P_7^2 - 3P_7P_{14} + 8P_7 - 7P_{14} - 7) \frac{\partial S_j}{\partial P_7} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (14 + 6P_7^3 + 10P_7^2 - 12P_7P_{14} - 22P_7 - 4P_{14} - 6P_{14}^2) \frac{\partial S_j}{\partial P_{14}} \right) \right\rangle \kappa_j \\
& = \left\langle 24P_{14}f_i + (7P_7^2 - 3P_7P_{14} + 8P_7 - 7P_{14} - 7) \frac{\partial f_i}{\partial P_7} \right. \\
& \quad \left. + (14 + 6P_7^3 + 10P_7^2 - 12P_7P_{14} - 22P_7 - 4P_{14} - 6P_{14}^2) \frac{\partial f_i}{\partial P_{14}} \right\rangle \quad (8.52)
\end{aligned}$$

Für G_2 fallen Symmetrieargumente für die Funktionen f_i weg. Eine Wahl muss hier für jede betrachtete Wirkung separat getroffen werden.

8.2.3 Implementierung der SDG

Bei der Implementierung der SDG muss beachtet werden, dass die Matrix A_{ij} und der Vektor b_i auch jeweils zwei Gitterindizes tragen (einer kommt von den Charakteren in der Matrix K , der andere von den Funktionen f_i , die nicht am selben Ort ausgewertet werden müssen). Das Gleichungssystem hat also folgende Form

$$\langle A_{xy}^p \rangle_{\text{eff}} \kappa = \langle b_{xy}^p \rangle_{\text{eff}} \quad (8.53)$$

Es hat sich in Simulationen jedoch ergeben, dass die Auswertung am selben Gitterpunkt ($x = y$) und anschließende Mittelung über das Gitter (\sum_x) die stabilsten Ergebnisse liefert.

Die SDG werden also in der folgenden Form implementiert

$$\left\langle \sum_x A_{xx}^p \right\rangle_{\text{eff}} \kappa = \left\langle \sum_x b_{xx}^p \right\rangle_{\text{eff}} \quad (8.54)$$

In den nachfolgenden Kapiteln wird diese Form der Schwinger-Dyson-Gleichungen auf den Confinement-Deconfinement-Übergang der Yang-Mills-Theorie und die Antizentrumsphase der erweiterten Yang-Mills-Theorie angewendet.

9 Die Dämon-Methode

Nachdem im letzten Kapitel eine *IMC*-Methode vorgestellt wurde, die auf Identitäten des Pfadintegrals beruht, soll hier nun eine Methode aus der statistischen Physik vorgestellt werden, die auf dem Übergang vom mikrokanonischen zum kanonischen Ensemble beruht, der mit der Einführung einer Temperatur verbunden ist. Es wird sich zeigen, dass die Kopplungen der effektiven Wirkung eine Art von verallgemeinerten Temperaturen darstellen, die sich messen lassen. Bevor jedoch die Dämon-Methode [29] beschrieben wird, werden kurz einige benötigte Grundlagen der statistischen Physik zusammengefasst [59].

9.1 Statistische Physik

9.1.1 Die mikrokanonische Verteilung

Gegeben sei ein statistisches System mit Koordinaten q_i und Impulsen p_i , die den Phasenraum aufspannen. Sei

$$\Delta q \Delta p = \prod_i \Delta q_i \Delta p_i \quad (9.1)$$

eine Zelle dieses Phasenraums. $\Gamma(E)$ bezeichnet die Anzahl der Zustände mit Energie kleiner oder gleich E . Die Anzahl der Zustände im Energieintervall ΔE ist dann gegeben durch

$$\Delta \Gamma = \frac{d\Gamma}{dE} \Delta E \quad (9.2)$$

und die Entropie ist definiert als

$$S = \ln \Delta \Gamma \quad (9.3)$$

Damit gilt

$$\frac{d\Gamma}{dE} \approx \frac{\exp(S)}{\Delta E} \quad (9.4)$$

Die Wahrscheinlichkeit das System in diesem Phasenraumelement zu finden ist

$$W(\Delta q, \Delta p) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\Delta t(\Delta q, \Delta p)}{T} \quad (9.5)$$

bzw. differentiell

$$dw = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} dt \quad (9.6)$$

wobei Δt die Zeit ist, die sich das System im Element $\Delta q \Delta p$ befindet und T die Gesamtzeit, in der das System betrachtet wird. Daraus ergibt sich für infinitesimal kleine Phasenraumelemente

$$dw = \rho(p_i, q_i) \prod_i dp_i dq_i \quad (9.7)$$

Die Funktion ρ heisst Verteilungsfunktion des Systems. Sie ist wie folgt normiert (im Folgenden bezeichnet Γ den Phasenraum, also hier $d\Gamma = \prod_i dp_i dq_i$)

$$\int_{\Gamma} \rho(\Gamma) d\Gamma = 1 \quad (9.8)$$

Mittelwerte berechnen sich durch das Zeitmittel

$$\langle f \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \int_{\Gamma} f(\Gamma) \rho(\Gamma) d\Gamma \quad (9.9)$$

und dieses ist also äquivalent zum Phasenraummittel. Nach dem Liouville-Theorem kann die Verteilungsfunktion nur von Größen abhängen, die bei der Bewegung des als abgeschlossenen Systems aufgefassten Untersystems konstant bleiben. Diese Größen werden im Folgenden mit E_i bezeichnet. Damit nimmt die Verteilungsfunktion sofort die folgende Form an

$$\rho = \text{const} \cdot \prod_i \delta(E_i - E_{0i}) \quad (9.10)$$

Diese Verteilungsfunktion nennt man *mikrokanonisch*.

9.1.2 Der Übergang zur kanonischen Verteilung

Im Folgenden wird ein System (E, Γ) betrachtet mit Verteilungsfunktion

$$\begin{aligned} \rho &= \text{const} \cdot \delta(E - E_0) \\ dw_{\Gamma} &= \text{const} \cdot \delta(E - E_0) d\Gamma \end{aligned} \quad (9.11)$$

Dieses System wird an ein Wärmebad (E', Γ') mit Temperatur T gekoppelt. Die Verteilungsfunktion dieses gekoppelten Systems ist dann

$$\begin{aligned} \rho &= \text{const} \cdot \delta(E + E' - E_0) \\ dw_{\Gamma\Gamma'} &= \text{const} \cdot \delta(E + E' - E_0) d\Gamma d\Gamma' \end{aligned} \quad (9.12)$$

wobei gelten soll $E \ll E_0$. Nun kann man über die Freiheitsgrade des Wärmebades integrieren

$$\begin{aligned} dw_{\Gamma} &= \int_{\Gamma'} \text{const} \cdot \delta(E + E' - E_0) d\Gamma d\Gamma' \\ &= \int_{\Gamma'} \text{const} \cdot \delta(E + E' - E_0) \frac{d\Gamma'}{dE'} dE' d\Gamma \\ &\stackrel{(9.4)}{=} \text{const} \cdot \frac{\exp(S'(E_0 - E))}{\Delta(E_0 - E)} d\Gamma \end{aligned} \quad (9.13)$$

Mit $E \ll E_0$ folgt, dass sich das Energieintervall $\Delta(E_0 - E)$ bei einer Änderung von E nur sehr wenig ändert und es gelten folgende Näherungen

$$\Delta(E_0 - E) \approx \Delta(E_0) = \text{const} \quad (9.14)$$

$$S'(E_0 - E) \approx S'(E_0) - \frac{\partial S'}{\partial E} E = S'(E) - \frac{1}{T} E = S'(E_0) - \beta E \quad (9.15)$$

mit β als inverser Temperatur des Systems. Es ergibt sich

$$dw_\Gamma = \text{const} \cdot \exp(-\beta E) d\Gamma \quad (9.16)$$

Aus der Normierungsbedingung folgt $\text{const}^{-1} = \int \exp(-\beta E) d\Gamma = Z$ die Zustandssumme Z und es lässt sich folgende Verteilungsfunktion ablesen

$$\rho = \frac{1}{Z} \exp(-\beta E) \quad (9.17)$$

Sie heißt *kanonische* oder *Gibb'sche Verteilung*.

9.2 Messung von Temperatur und die Dämon-Methode

Nachdem die *mikrokanonische* und die *kanonische* Zustandssumme eingeführt wurden, wird in diesem Abschnitt nun gezeigt, wie sich die Temperatur des Systems messen lässt. Dazu wird im Folgenden ein System mit einem einzigen Freiheitsgrad, seiner Energie, betrachtet. Dieses System wird *Dämon* genannt und ist vollständig beschrieben durch die Größen (E_D, Γ_D) . In einem Wärmebad mit inverser Temperatur bzw. Kopplung β ist seine kanonische Verteilungsfunktion gegeben durch

$$\rho_D = \frac{1}{Z_D} \exp(-\beta E_D) \quad \text{und} \quad Z_D = \int_{\Gamma_D} \exp(-\beta E_D) d\Gamma_D \quad (9.18)$$

Sein Energieerwartungswert ist gegeben durch

$$\langle E_D \rangle = \frac{1}{Z_D} \int_{\Gamma_D} E_D \exp(-\beta E_D) d\Gamma_D = f(\beta, \Gamma_D) \quad (9.19)$$

Dieses Integral lässt sich ausrechnen und es folgt für die Temperatur des Wärmebades $\beta = \beta(\langle E_D \rangle, \Gamma_D)$, wenn der Mittelwert der Energie des Dämons bekannt ist. Wie lässt sich also die mittlere Energie des Dämons bestimmen? Hierzu wird die mikrokanonische Verteilung des gekoppelten Systems Dämon (E_D, Γ_D) und Wärmebad (E, Γ) betrachtet.

$$\rho = \frac{1}{Z_{\text{mc}}} \delta(E + E_D - E_0) \quad , \quad Z_{\text{mc}} = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma_D} \delta(E + E_D - E_0) d\Gamma d\Gamma_D \quad (9.20)$$

Hieraus ergibt sich

$$\langle E_D \rangle_{\text{mc}} = \frac{1}{Z_{\text{mc}}} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma_D} E_D \delta(E + E_D - E_0) d\Gamma d\Gamma_D \quad (9.21)$$

9 Die Dämon-Methode

Damit stellt sich offensichtlich folgende Frage: Wann gilt

$$\langle E_D \rangle_{mc} \stackrel{?}{=} \langle E_D \rangle \quad (9.22)$$

Wann stimmen also die Erwartungswerte, gebildet mit dem kanonischen und dem mikrokanonischen Ensemble, überein? Beim Übergang von der mikrokanonischen zur kanonischen Verteilung wird $\frac{\exp(-S(E_0 - E_D))}{\Delta(E_0 - E_D)}$ genähert durch $c \cdot \exp(-\beta E_D)$. Diese Näherung muss also genauer untersucht werden. Dazu:

$$\begin{aligned} \ln \frac{\exp(S(E_0 - E_D))}{\Delta(E_0 - E_D)} &= S(E_0 - E_D) - \ln \Delta(E_0 - E_D) \\ &= S(E_0) - \ln \Delta(E_0 - E_D) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{\partial^k S}{\partial E_D^k} \right)_V E_D^k \\ &= S(E_0) - \ln \Delta(E_0 - E_D) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{\partial^{k-1} \beta}{\partial E_D^{k-1}} \right)_V E_D^k \\ &= S(E_0) - \ln \Delta(E_0 - E_D) - \beta E_D + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \left(\frac{\partial^n \beta}{\partial E_D^n} \right)_V E_D^{n+1} \end{aligned} \quad (9.23)$$

Mit

$$\left(\frac{\partial E_D}{\partial \beta} \right)_V = \left(\frac{\partial E_D}{\partial T} \right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial \beta} \right)_V = c_V \left(\frac{\partial T}{\partial \beta} \right)_V \quad (9.24)$$

und $c_V = \text{const}$ folgt

$$\begin{aligned} \ln \frac{\exp(S(E_0 - E_D))}{\Delta(E_0 - E_D)} &= S(E_0) - \ln \Delta(E_0 - E_D) - \beta E_D + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)! c_V^n} \left(\frac{\partial^n \beta}{\partial T^n} \right)_V E_D^{n+1} \\ &= S(E_0) - \ln \Delta(E_0 - E_D) - \beta E_D + \mathcal{O} \left(\frac{(\beta E_D)^2}{c_V} \right) \end{aligned} \quad (9.25)$$

Es ergibt sich mit $c_V \propto V$ und $\Delta(E_0 - E_D) = \text{const}$

$$\rho = \text{const} \cdot \exp \left(-\beta E_D - \frac{1}{2c_V} (\beta E_D)^2 + \mathcal{O}(V^{-2}) \right) \quad (9.26)$$

Für große Volumina stimmen die kanonische und die mikrokanonische Verteilung also überein. Es gilt

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \langle E_D \rangle_{mc} = \langle E_D \rangle \quad (9.27)$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise wird im Folgenden angenommen, dass die betrachteten Volumina groß genug sind und es gilt $\langle E_D \rangle \approx \langle E_D \rangle_{mc}$.

Die Mittelwerte der Dämonenergie erhält man also durch Simulationen mit der mikrokanonischen Zustandssumme des Systems (siehe Anhang A.3).

$$Z_{mc} = \int_{\Gamma_D} \int_{\Gamma} \delta(E + E_D - E_0) d\Gamma d\Gamma_D \quad (9.28)$$

Diese hängt per Definition nicht explizit von β ab. Im Folgenden wir für ein System mit kontinuierlicher Energie der kanonische Mittelwert berechnet ($\Gamma_D = (-E_{\max}, E_{\max})$)

$$\begin{aligned}\langle E_D \rangle &= \frac{\int_{-E_{\max}}^{E_{\max}} E_D \exp(-\beta E_D) dE_D}{\int_{-E_{\max}}^{E_{\max}} \exp(-\beta E_D) dE_D} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \\ Z &= \int_{-E_{\max}}^{E_{\max}} \exp(-\beta E_D) dE_D = -\frac{1}{\beta} \sinh(\beta E_{\max}) \\ \Rightarrow \langle E_D \rangle &= \frac{1}{\beta} - \frac{E_{\max}}{\tanh(\beta E_{\max})}\end{aligned}\quad (9.29)$$

Mit Gl. (9.22) folgt also

$$\langle E_D \rangle_{\text{mc}} = \frac{1}{\beta} - \frac{E_{\max}}{\tanh(\beta E_{\max})}\quad (9.30)$$

Diese Gleichung lässt sich numerisch invertieren und man erhält die Temperatur bzw. Kopplung β als Funktion der mittleren Dämonenergie. βE_{\max} hängt nur vom Verhältnis $\frac{\langle E_D \rangle}{E_{\max}}$ ab. Mit dieser Methode ist es also möglich, die Temperatur eines Wärmebades zu messen.

9.2.1 Verallgemeinerung auf mehrere Wärmebäder

Angenommen ein System besteht aus mehreren untereinander gekoppelten Wärmebädern mit fester Temperatur. Das i -te Wärmebad wird beschrieben durch (Γ^i, β^i, E^i) . An dieses Gesamtsystem werden Dämonen (Γ_D^i, E_D^i) gekoppelt. Die mikrokanonische Verteilung dieses Systems lautet

$$\rho = \frac{1}{Z_{\text{mc}}} \prod_i \delta(E^i + E_D^i - E_0^i) \quad \text{mit} \quad Z_{\text{mc}} = \int \int \prod_i \delta(E^i + E_D^i - E_0^i) d\Gamma^i d\Gamma_D^i \quad (9.31)$$

Für die kanonische Zustandssumme des Dämonsystems gilt analog

$$\rho = \frac{1}{Z_D} \exp\left(-\sum_i \beta^i E_D^i\right) \quad \text{mit} \quad Z_D = \int_{\Gamma_D} \exp\left(-\sum_i \beta^i E_D^i\right) \prod_i d\Gamma_D^i \quad (9.32)$$

Weiterhin gelten die verallgemeinerten Beziehungen

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \langle E_D^i \rangle_{\text{mc}} = \langle E_D^i \rangle = \frac{1}{\beta^i} - \frac{E_{\max}^i}{\tanh(\beta^i E_{\max}^i)} \quad (9.33)$$

Mit diesem Mechanismus ist es also möglich aus Energieerwartungswerten, gebildet mit dem mikrokanonischen Ensemble eines Systems von Dämonen, die Kopplungen eines Systems von Wärmebädern zu messen. Im folgenden Abschnitt wird die Verbindung zu mikroskopischen und effektiven Theorien gezeigt, um die Dämon-Methode in *IMC* zu benutzen.

9.3 Der mikrokanonische Dämon

Die effektive Wirkung hat die Form

$$S_{\text{eff}} = \sum_i \beta^i S^i \quad \text{und} \quad Z = \int_{\Gamma} \exp(-S_{\text{eff}}) d\Gamma \quad (9.34)$$

Diese Kopplungen β^i sollen jetzt mit einem gekoppelten Dämon-System gemessen werden. Die kanonische und mikrokanonische Zustandssumme sind also gegeben durch

$$\begin{aligned} Z_D &= \int_{\Gamma_D} \int_{\Gamma} \exp(-\sum_i \beta^i (S^i + E_D^i)) d\Gamma d\Gamma_D \\ Z_{D\text{mc}} &= \int_{\Gamma_D} \int_{\Gamma} \prod_i \delta(S_i + E_D^i - E_0^i) d\Gamma d\Gamma_D \end{aligned} \quad (9.35)$$

Mit folgendem Schema lassen sich die Kopplungen β^i reproduzieren

1. Wähle Kopplungen β^i
2. Simuliere das System Z und greife eine thermalisierte Konfiguration \mathcal{C} heraus
3. Kopple das Dämon-System an Z
4. Simuliere $Z_{D\text{mc}}$ mikrokanonisch mit $E_0^i = S^i[\mathcal{C}]$
5. Messe $\langle E_D^i \rangle_{\text{mc}}$ und berechne daraus $\beta^{i'}$ ($\langle E_D^i \rangle_{\text{mc}}$)
6. Vergleiche $\beta^{i'} \stackrel{?}{=} \beta^i$

Dieses Schema stellt zugleich einen Konsistenztest für die Methode dar und wurde mit jeder benutzten effektiven Wirkung zuvor erfolgreich absolviert. Wie lässt sich jetzt der Übergang von einer mikroskopischen Theorie wie der Yang-Mills-Theorie zu einer effektiven Wirkung mit dieser Methode vollziehen. Die mikroskopische Zustandssumme und die effektive Wirkung sind wieder gegeben durch

$$\begin{aligned} Z_{\text{mikr}} &= \int \mathcal{D}U \exp(-\beta S[U]) \\ \exp(-S_{\text{eff}}[U']) &= \exp(-\sum_i \beta^i S^i[U']) = \int \mathcal{D}U \delta(U' - f[U]) \exp(-\beta S[U]) \end{aligned} \quad (9.36)$$

Die Kopplungen β^i können dann mit folgendem Schema aus der Kopplung β berechnet werden

1. Wähle Kopplung β
2. Simuliere Z_{mikr} und wähle thermalisierte Konfigurationen $\mathcal{C}[U]$
3. Reduktion mittels $U' = f[\mathcal{C}[U]] \implies$ Konfiguration $\mathcal{C}'[U']$

4. Mikrokanonische Simulation der effektiven Zustandssumme mit gekoppeltem Dämon und $E_0^i = S^i[\mathcal{C}'[U']]$
5. Messe $\langle E_D^i \rangle_{\text{mc}}$ und berechne daraus $\beta^i(\langle E_D^i \rangle_{\text{mc}})$

Zur Berechnung von Erwartungswerten kann jetzt die effektive Wirkung kanonisch simuliert und die Übereinstimmung von Observablen getestet werden. Ein Problem dieses sogenannten *mikrokanonischen Dämons* ist sofort klar: Die Berechnung der Kopplungen beruht nur auf einer einzigen thermalisierten Konfiguration der mikroskopischen Theorie, die natürlich nicht alle Informationen über das System enthalten kann. Deshalb wurde in [60] eine Verbesserung der Dämon-Methode vorgeschlagen, der sogenannte *kanonische Dämon*.

9.4 Der kanonische Dämon

Im kanonischen Dämon wird das Schema zur Bestimmung der Kopplungen um eine Rückkopplung an das kanonische Ensemble der mikroskopischen Theorie ergänzt. Es sieht wie folgt aus

1. Wähle Kopplung β
2. Simuliere Z_{mikr} kanonisch
3. Wähle thermalisierte Konfigurationen $\mathcal{C}[U]$ und setze Startenergie des Dämons $E_D^i = 0$
4. Reduktion mittels $U' = f[\mathcal{C}[U]] \implies$ Konfiguration $\mathcal{C}'[U']$
5. Simuliere mikrokanonisch mit gekoppeltem Dämon und $E_0^i = S^i[\mathcal{C}'[U']]$
6. Halte Dämonenergie E_D^i fest und wähle neue kanonische Konfiguration $\mathcal{C}[U]$
7. Weiter bei 4
8. Messe $\langle E_D^i \rangle_{\text{mc}}$ und berechne daraus $\beta^i(\langle E_D^i \rangle_{\text{mc}})$

Dieses Schema beseitigt den zuvor genannten Kritikpunkt der zufälligen Wahl einer Konfiguration. Im folgenden Kapitel soll die Dämon-Methode anhand eines einfachen Modells getestet und dabei insbesondere auf verschiedene Thermalisierungseffekte sowohl im kanonischen als auch im mikrokanonischen Ensemble untersucht werden, bevor sie dann am Beispiel der in den Kapiteln zuvor vorgestellten Modelle mit Schwinger-Dyson-Gleichungen verglichen werden soll.

10 Untersuchung der Dämon-Methode an einem 3-Kopplungs Modell

Ziel dieses Kapitels ist es anhand eines einfachen Modells zu verstehen, wie die Dämon-Methode funktioniert und auf welche Art Kopplungen einer effektiven Theorie am besten bestimmt werden können. Dazu werden insbesondere verschiedene *Thermalisierungseffekte* sowohl im mikrokanonischen als auch im kanonischen Dämon, die Abhängigkeit der Kopplungen von einzelnen Konfigurationen aus der mikroskopischen Theorie und die benötigte mikrokanonische Statistik zur Berechnung der Dämonenergie untersucht. Als mikroskopische Theorie dient hier $SU(3)$ -Yang-Mills, also das in Kapitel 6 vorgestellte Modell. Für die Eichkopplung wurde im gesamten Kapitel $\beta = 6.05$ gewählt, also eine Kopplung bei der die Theorie tief in einer Deconfinement-Phase und damit der Polyakov-Loop in der Nähe eines Zentrumselements ist. Diese Wahl wurde getroffen um Tests für die Dämon-Methode nicht durch Phasenübergänge komplizierter zu machen. Anstatt sofort die gefundene Lösung für die aufgetretenen Probleme zu präsentieren, soll hier zunächst mit der einfachst möglichen Benutzung der Dämonmethode begonnen und anhand von Beispielen verschiedene Probleme aufgezeigt werden. Diese werden dann individuell gelöst und so die Methode Schritt für Schritt verbessert, bis am Ende ein Algorithmus zur Verfügung steht, der dann in den folgenden Kapiteln angewendet werden kann. Zunächst muss jedoch das effektive Modell vorgestellt werden.

10.1 Das effektive Modell

Da nicht die volle Entwicklung der effektiven Wirkung in Simulationen benutzt werden kann, muss nun eine Trunkierung der effektiven Wirkung, erhalten durch die starke Kopplungsentwicklung, durchgeführt werden. Das resultierende Modell muss dabei alle in den vorangegangenen Kapiteln vorgestellten Phasen, also die symmetrische, die Deconfinement sowie die Antizentrumsphase enthalten. Simulationen haben ergeben, dass die folgende Trunkierung diese Eigenschaften erfüllt.

$$\begin{aligned}
 S_{\text{eff}} = & \lambda_1 \sum_{\langle x,y \rangle} (\chi_{(1,0)}(\mathcal{P}_x)\chi_{(0,1)}(\mathcal{P}_y) + c.c.) + \lambda_2 \sum_{\langle x,y \rangle} (\chi_{(2,0)}(\mathcal{P}_x)\chi_{(0,2)}(\mathcal{P}_y) + c.c.) \\
 & + \lambda_3 \sum_{\langle x,y \rangle} (\chi_{(1,0)}(\mathcal{P}_x)\chi_{(0,1)}(\mathcal{P}_y) + c.c.)^2
 \end{aligned} \tag{10.1}$$

Das Modell besteht aus der 1. Ordnung der starken Kopplungsentwicklung, dem Polyakov-Loop in der fundamentalen Darstellung. Die weiteren Terme in 2. Ordnung sind der Polyakov-Loop in der $(2,0) = (6)$ -Darstellung sowie das Quadrat des Polyakov-Loops in der fundamentalen Darstellung. Der in der 2. Ordnung ebenfalls auftauchende Term in der adjungierten Darstellung $((1,1) = (8))$ hat sich bei späteren Betrachtungen mit *IMC*-Methoden als überflüssig erwiesen und wurde deshalb hier bereits weggelassen, um eine möglichst einfache effektive Theorie zu erhalten.

10 Untersuchung der Dämon-Methode an einem 3-Kopplungs Modell

In numerischen Simulationen wurde für über 30000 Kopplungen ein Phasendiagramm dieses Modells erstellt. Die Phasenstruktur ist in Abb. 10.1 zu sehen. Im untersuchten Bereich existiert also eine Confinement-, eine Deconfinement und eine Antizentrumsphase. In den Abbildungen 10.2 bis 10.5 sind Schnitte durch verschiedene Ebenen (λ_1, λ_3) bei konstanter Kopplung λ_2 dargestellt. Die Phasenstruktur dieses Modells ist also ausreichend, um den Polyakov-Loop der Yang-Mills-Theorie und der erweiterten Yang-Mills-Theorie zu reproduzieren.

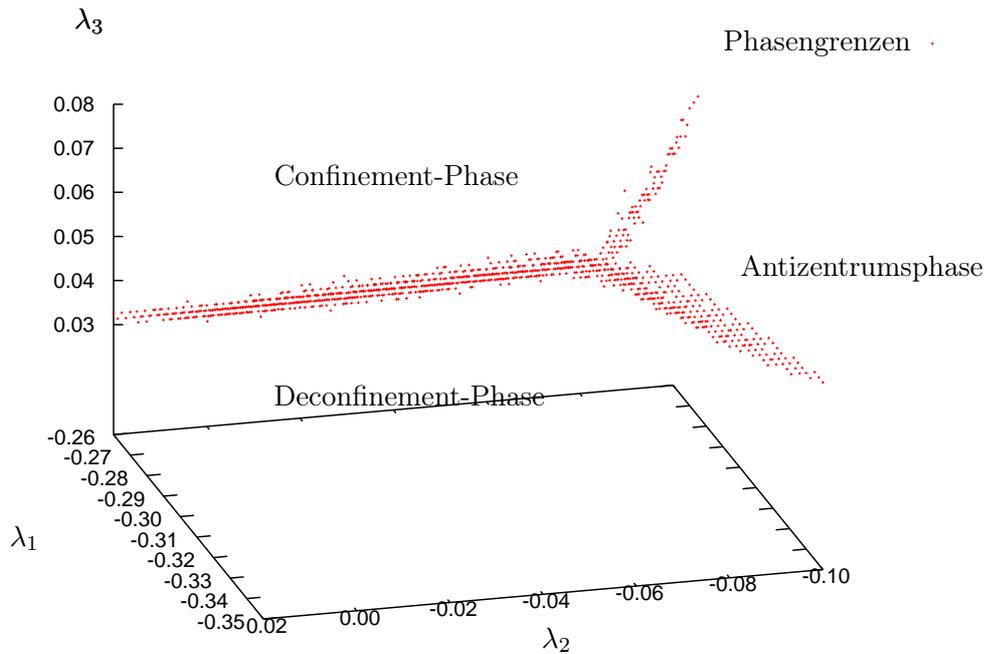


Abbildung 10.1: Phasendiagramm des 3-Kopplungsmodells im untersuchten Gebiet

Dieses effektive Modell soll im weiteren Verlauf des Kapitels als Testobjekt zur Untersuchung von Eigenschaften der Dämon-Methode dienen.

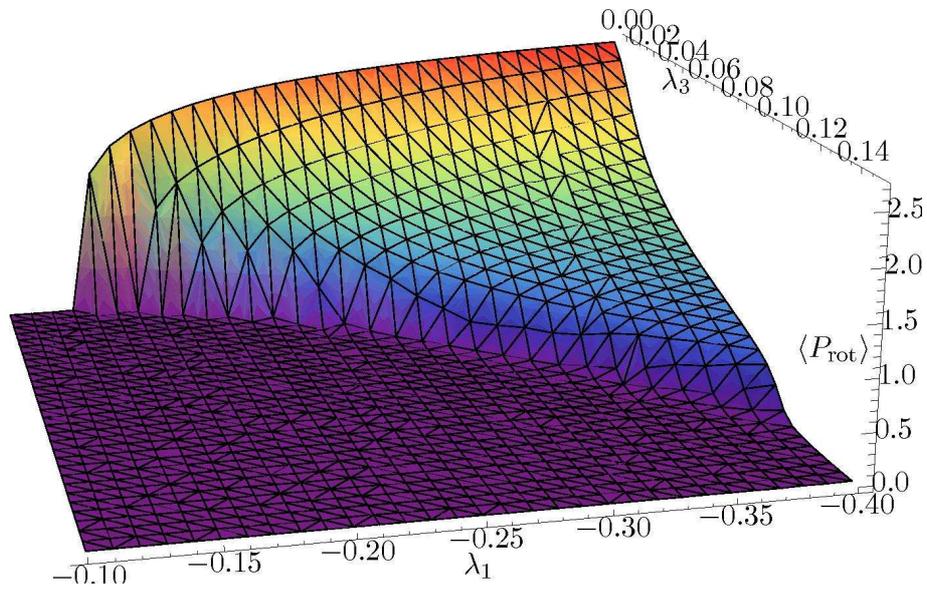


Abbildung 10.2: Phasendiagramm in (λ_1, λ_3) bei $\lambda_2 = 0$

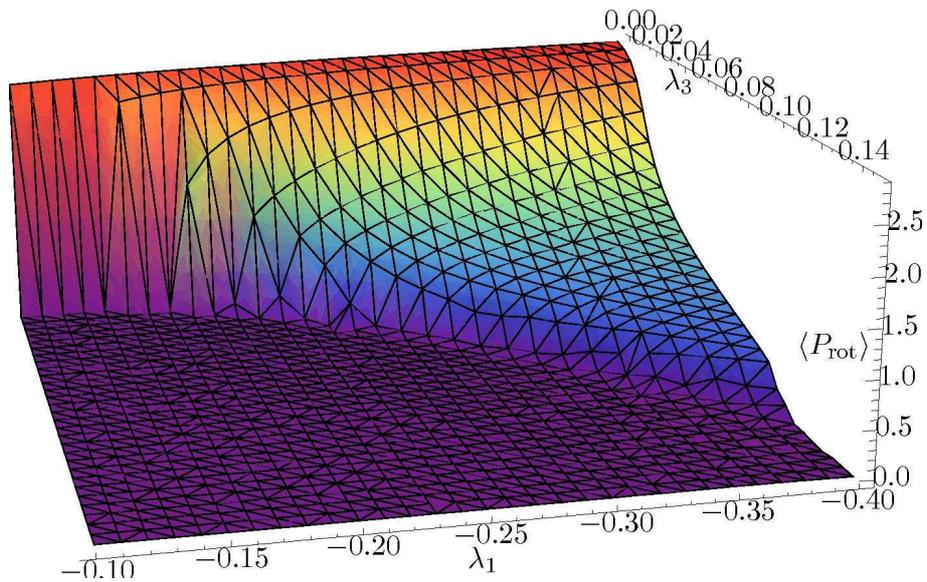


Abbildung 10.3: Phasendiagramm in (λ_1, λ_3) bei $\lambda_2 = -0.04$

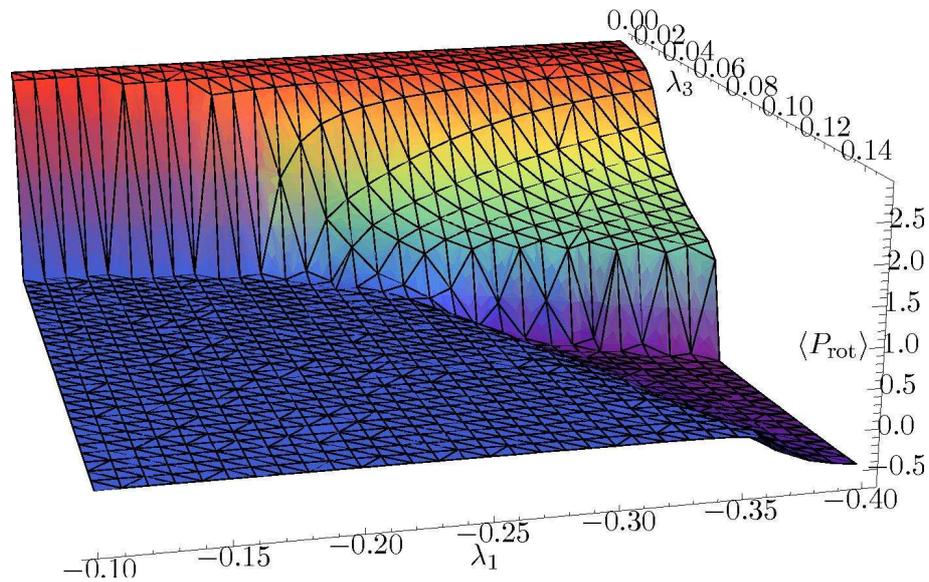


Abbildung 10.4: Phasendiagramm in (λ_1, λ_3) bei $\lambda_2 = -0.08$

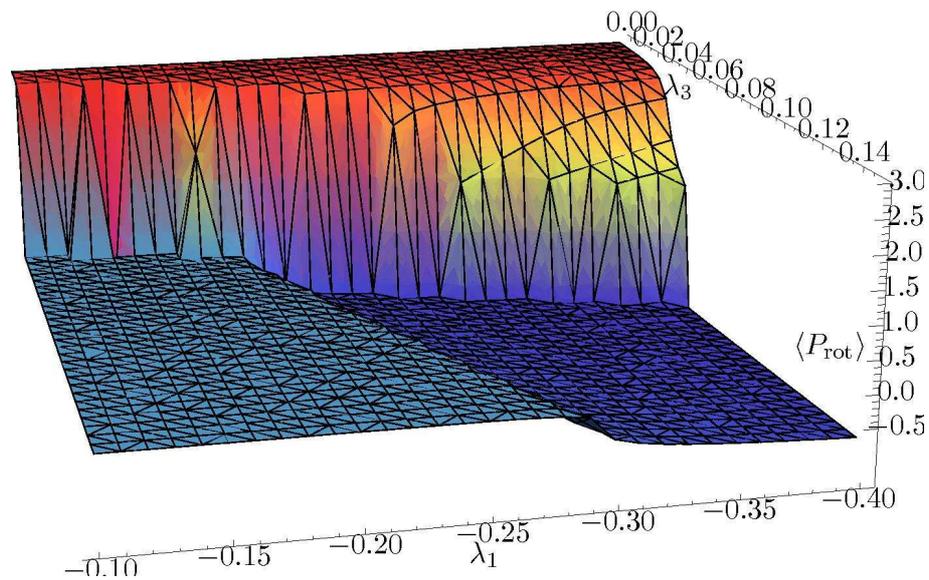


Abbildung 10.5: Phasendiagramm in (λ_1, λ_3) bei $\lambda_2 = -0.12$

10.2 Der mikrokanonische Dämon

Erwartungswerte berechnen sich in Monte-Carlo-Simulationen als Mittelwerte der Observablen auf einzelnen Konfigurationen C_i . Aufgrund von statistischen Fluktuationen hat also der Wert der Observablen auf einer einzelnen Konfiguration im Allgemeinen nichts mit dem Mittelwert der Observablen zu tun. Die ist einer der in [60] genannten Kritikpunkte am mikrokanonischen Dämon. Der Satz der berechneten Kopplungen der effektiven Theorie hängt von der verwendeten Konfiguration C_i der mikroskopischen Theorie ab, er sollte aber im Idealfall nur von der Kopplung der Yang-Mills-Theorie abhängen. Diese Abhängigkeit wird in diesem Abschnitt untersucht. Dazu muss zunächst jedoch ausgeschlossen werden, dass weitere Thermalisierungseffekte im mikrokanonischen System eine Rolle spielen. Hier gibt es verschiedene Parameter und Eigenschaften, die untersucht werden müssen. Dies sind zum einen die Werte, die ein Dämon maximal annehmen kann, die Entwicklung des Dämons mit der Monte-Carlo-Zeit sowie die Entwicklung des Polyakov-Loops.

10.2.1 Die Parameter und die *einfachste Methode*

Um zu verdeutlichen welche freien Parameter der mikrokanonische Dämon besitzt, werden hier noch einmal alle relevanten Gleichungen zusammengefasst. Für dieses Modell mit 3 Kopplungen werden 3 Dämonen mit Energien E_D^i an das System gekoppelt. Die Mittelwerte der Energien berechnen sich nach

$$\langle E_D^i \rangle_{\text{mc}} = \frac{1}{\lambda_i} - \frac{E_{\text{max}}^i}{\tanh(\lambda_i E_{\text{max}}^i)} \quad (10.2)$$

Hieraus ergeben sich die freien Parameter E_{max}^i . Die mikrokanonischen Simulationen finden mit der Zustandssumme

$$Z_{\text{mc}} = \int_{\Gamma^i} \int_{\Gamma_D^i} \prod_i \delta(S^i + E_D^i - E_0^i) d\Gamma^i d\Gamma_D^i \quad (10.3)$$

statt. Hier ergeben sich 3 weitere freie Parameter E_0^i , die Startenergien der Dämonen. Ein weiterer freier Parameter ist die gewählte Konfiguration der $SU(3)$ -Yang-Mills-Theorie. Sie wird im folgenden mit C bezeichnet. Sicherlich wird auch die Anzahl der mikrokanonischen Konfigurationen N_{mc} eine Rolle spielen sowie die vor dem Messen verworfenen Konfigurationen T_{mc} . Es sind also insgesamt 9 Parameter, die zu wählen sind. Für ein Modell mit N Kopplungen ergeben sich $2N+3$ freie Parameter. Die Untersuchungen der Dämon-Methode sollen mit folgender Wahl begonnen werden

$$E_0^i = 0 \quad \text{für alle } i$$

Konfiguration C : beliebige, aber thermalisierte Konfiguration, fest

$$E_{\text{max}}^1 = E_{\text{max}} \quad , \quad E_{\text{max}}^2 = E_{\text{max}}^3 = 0.5 \cdot E_{\text{max}}$$

$$N_{\text{mc}} = 10000 \quad , \quad T_{\text{mc}} = 1000$$

Als freier Parameter bleibt also nur noch die Energie E_{\max} . Für $E_{\max}^{2,3}$ wurde die Hälfte gewählt, weil Simulationen gezeigt haben, dass die zugehörigen Wirkungsterme langsamer Energie an die Dämonen abgeben als der führende Term der Entwicklung. Die Statistik N_{mc} und die Thermalisierung T_{mc} wurden so gewählt, dass die statistischen Fehler der Kopplungen keine Rolle spielen. Die Startenergie $E_0 = 0$ der Dämonen ist eine sinnvolle Wahl, da Γ_D symmetrisch um 0 ist. Der Parameter E_{\max} bestimmt, wie stark der Dämon eine gegebene Konfiguration verändern darf. Man erwartet also, dass mit zunehmender Energie E_{\max} die erhaltenen Resultate für den Polyakov-Loop in Simulationen mit der effektiven Theorie stärker vom Wert der Yang-Mills-Theorie abweichen. Der Wert für E_{\max} darf jedoch auch nicht zu klein sein, weil ansonsten die Akzeptanz einer neuen Konfiguration der Simulation im mikrokkanonischen Ensemble einbricht. Die Parameter der Yang-Mills-Theorie sind hier so gewählt, dass der Polyakov-Loop einen Wert tief in der Deconfinement-Phase annimmt, in diesem Fall $\beta = 6.05$, $\kappa = 0$ und damit $\langle |P| \rangle_{\text{YM}} = 1.8264(5)$. Der Polyakov-Loop auf der gewählten Konfiguration \mathcal{C} ist $|P|(\mathcal{C}) = 1.80047$ und die Energien der einzelnen Wirkungsbeiträge sind

$$S^1(\mathcal{C}) = 33894.4 \quad , \quad S^2(\mathcal{C}) = 31052 \quad , \quad S^3(\mathcal{C}) = 262526 \quad (10.4)$$

Die Gittergröße beträgt $12^3 \times 2$ Gitterpunkte.

In Abbildung 10.6 ist der Betrag des Polyakov-Loops, erhalten mit der effektiven Theorie, über der Energie E_{\max} aufgetragen. Es ergibt sich das erwartete Verhalten. Statistische Fehler, die durch die reine Simulation der effektiven Wirkung entstehen, werden hier nicht angegeben, da sie mit ausreichender Statistik so klein gehalten wurden, dass sie hier im Vergleich zu den Fehlern in der Bestimmung der Kopplungen zu vernachlässigen sind. Über einen relativ großen Bereich E_{\max} (etwa 50 bis 3000) liegen die erhaltenen Werte in der Nähe der Referenzwerte aus der Yang-Mills-Theorie. Für kleine Energien fluktuieren die Werte des Polyakov-Loops sehr stark. Bei zu großen Energien wird die Yang-Mills-Konfiguration vom Dämon praktisch zerstört (alle Terme S^i gehen gegen 0) und damit geht auch der Polyakov-Loop gegen 0. Zur genaueren Analyse werden für 3 verschiedene Energien (10,120,4000) der Verlauf des Polyakov-Loops in der mikrokkanonischen MC-Zeit untersucht sowie Histogramme der Dämonenergien betrachtet. Diese Ergebnisse sind in Abbildung 10.7 zu sehen.

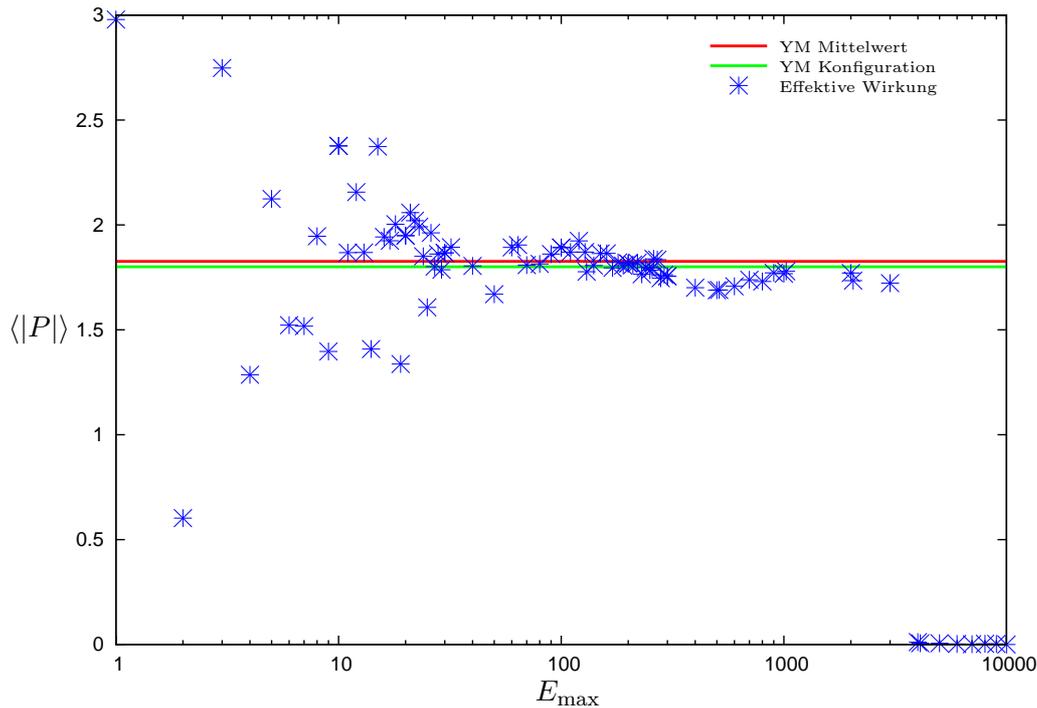


Abbildung 10.6: Betrag des Polyakov-Loops über der maximalen Energie des Dämons

Für $E_{\max} = 10$ sind die Dämonenergien für die Wirkungsterme 2 und 3 nahezu gleichverteilt, die Mittelwerte also in der Nähe von 0, während die Energie zum Wirkungsterm 1 sich in der Nähe von E_{\max} konzentriert. Der Polyakov-Loop zeigt extrem langreichweitige Korrelationen, was aus einer schlechten Akzeptanz des mikrokanonischen Update-Schrittes folgt. Der Dämon ist nicht in der Lage, die in der Wirkung frei werdende Energie aufzunehmen. Für $E_{\max} = 120$ ist E_D^1 wieder am Rand konzentriert, die anderen Dämonen liegen leicht oberhalb bzw. unterhalb der 0. Der Polyakov-Loop zeigt nicht mehr so große Korrelationslängen und liegt nur leicht unter seinem Startwert von $|P|(\mathcal{C}) = 1.80047$. Das wird durch die guten Ergebnisse der effektiven Theorie in diesem Bereich von E_{\max} bestätigt. $E_{\max} = 4000$ zerstört die gegebene Konfiguration schließlich, was sehr deutlich im Verhalten des Polyakov-Loops zu erkennen ist. Er fällt bereits nach wenigen Konfigurationen auf einen Wert weit unterhalb des Startwertes. Die Korrelation ist allerdings nochmal kürzer. Insgesamt zeigt sich eine sehr starke Abhängigkeit des Polyakov-Loops in der effektiven Theorie vom maximalen Wert der Dämonenergie. Ziel einer Verbesserung muss es deshalb sein diese Abhängigkeit zu verringern, um einerseits zu großen Werten der Dämonenergie gehen zu können andererseits aber eine gegebene Konfiguration nicht zu zerstören.

10 Untersuchung der Dämon-Methode an einem 3-Kopplungs Modell

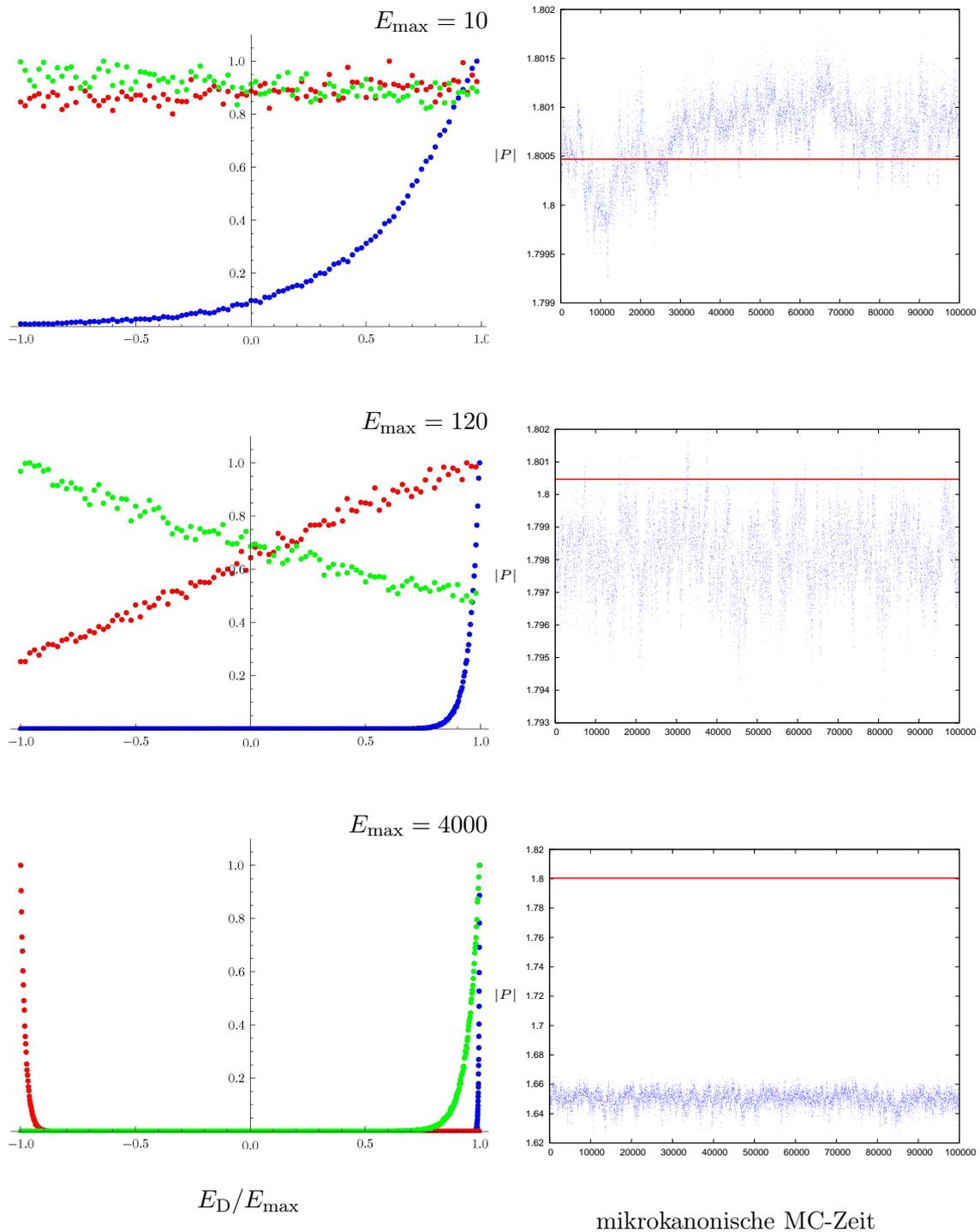


Abbildung 10.7: links: Histogramme der Dämonenergien (blau: E_D^1 , rot: E_D^2 , grün: E_D^3) rechts: Betrag des Polyakov-Loops über der mikrokanonischen MC-Zeit, zum Vergleich der Polyakov-Loop aus der Yang-Mills-Konfiguration (rote Linie)

10.2.2 Verbesserung des mikrokanonischen Dämons

Die theoretischen Überlegungen im vorherigen Kapitel haben ergeben, dass für unendlich große Volumina die Mittelwerte im kanonischen und im mikrokanonischen Ensemble identisch sind, weil dann der Dämon selbst die Temperatur des Wärmebades praktisch nicht beeinflusst. Dies ist gleichbedeutend damit, dass die mittlere Energie des Wärmebades konstant ist. Die Lösung des gezeigten Problems besteht also darin, dem Dämon bereits am Anfang die Energie zu geben, die er später als Mittelwert besitzen wird. Wenn dies der Fall ist bleiben aufgrund der Energieerhaltung bei mikrokanonischen Simulationen ebenfalls die Mittelwerte der Wirkung (das Wärmebad) $\langle S^i \rangle_{\text{mc}}$ erhalten und die Konfiguration wird nicht zerstört. Wie jedoch kann man dem Dämon die Startenergie geben, die er später im Mittel besitzen wird (oder zumindest eine gute Näherung für sie erhalten)? Die Antwort ist, dem Dämon einfach immer wieder dieselbe Konfiguration zu geben und als Startwert der Simulation den Mittelwert der vorherigen Simulation zu benutzen. Es bietet sich also folgendes Schema an

1. Wähle Konfiguration \mathcal{C}
2. Wähle Toleranz $\epsilon > 0$ klein
3. Setze $E_0^i = 0$
4. Simuliere das Dämonsystem mikrokanonisch
5. Berechne $\delta = \sqrt{\sum_i (\langle E_D^i \rangle - E_0^i)^2}$
6. Wenn $\delta > \epsilon$ dann setze $E_0^i = \langle E_D^i \rangle$ und gehe zu 4
7. Berechne Kopplungen aus $\langle E_D^i \rangle$
8. Simuliere die effektive Theorie mit den erhaltenen Kopplungen

Hier müssen nun *Thermalisierungseffekte* bezüglich der Anzahl der Wiederholungen mit einer Konfiguration untersucht werden.

10.2.3 Thermalisierungseffekte

Hierzu wird zunächst für die 3 zuvor untersuchten Energien E_{max} die Abweichung δ über der Anzahl N_c , wie oft dieselbe Konfiguration dem Dämonsystem gegeben wurde, aufgetragen. Die mikrokanonische Statistik N_{mc} beträgt jedesmal 10000 pro Konfiguration. Die Ergebnisse sind in Abb. 10.8 (links) zu sehen. Es fällt auf, dass δ für alle Energien E_{max} gegen etwa denselben absoluten Wert sinkt, dann aber nicht weiter fällt. Dies ist auf statistische Messfehler der Dämonenergie zurückzuführen, wie in Abb. 10.8 (rechts) zu sehen ist. Hier wurde für $E_{\text{max}} = 1000$ die Abweichung $\langle \delta \rangle$, gemittelt über 80 Konfigurationen N_c (die ersten 20 Konfigurationen wurden als Thermalisierung verworfen), über der mikrokanonischen Statistik pro Konfiguration aus dem Yang-Mills-Ensemble aufgetragen. Für eine Statistik von $N_{\text{mc}} = 1000000$ wurden also insgesamt 100 Millionen mikrokanonische Konfigurationen erzeugt. Es zeigt sich, dass $\langle \delta \rangle$ mit wachsender Statistik gegen Null geht.

Weiter wird die Entwicklung der Dämonenergien und Kopplungen in Abhängigkeit von der Anzahl der N_c der Konfigurationen aus dem Yang-Mills-Ensemble für verschiedene Energien E_{max} betrachtet. Für die Dämonenergien (Abb. 10.9) sieht man, dass für größer

10 Untersuchung der Dämon-Methode an einem 3-Kopplungs Modell

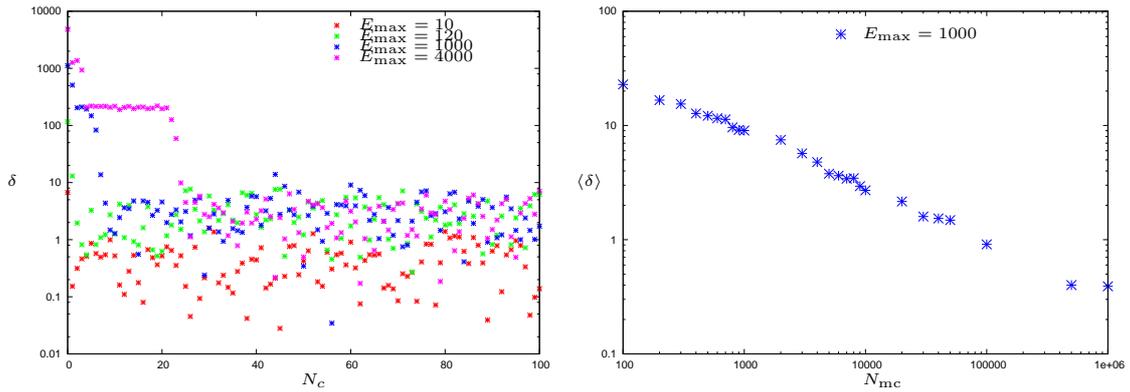


Abbildung 10.8: links: Abweichung δ über der Anzahl der Konfigurationen N_c , rechts: $\langle \delta \rangle$ in Abhängigkeit von der mikrokanonischen Statistik pro Konfiguration

werdende Energie E_{\max} die Thermalisierungszeit größer wird. Dies ist verständlich, da eine Konfiguration nur eine bestimmte Menge an Energie abgeben kann. Für zu kleine Energien E_{\max} liegen die Dämonenergien bei anderen Werten und fluktuieren stärker. Dies ist noch deutlicher in den Kopplungen zu sehen (Abb. 10.10). Nur für große Energien gehen die Werte gegen dieselbe Kopplung. Insbesondere die Dämonenergie zur Kopplung λ_2 überstreicht den gesamten Bereich, bevor sie *thermalisiert*. Deshalb erhält man für große maximale Dämonenergien keine guten Resultate für die Kopplungen, wenn man eine Konfiguration nur einmal benutzt, und damit kann auch der Polyakov-Loop in der effektiven Theorie nicht dem Polyakov-Loop der Yang-Mills-Theorie entsprechen.

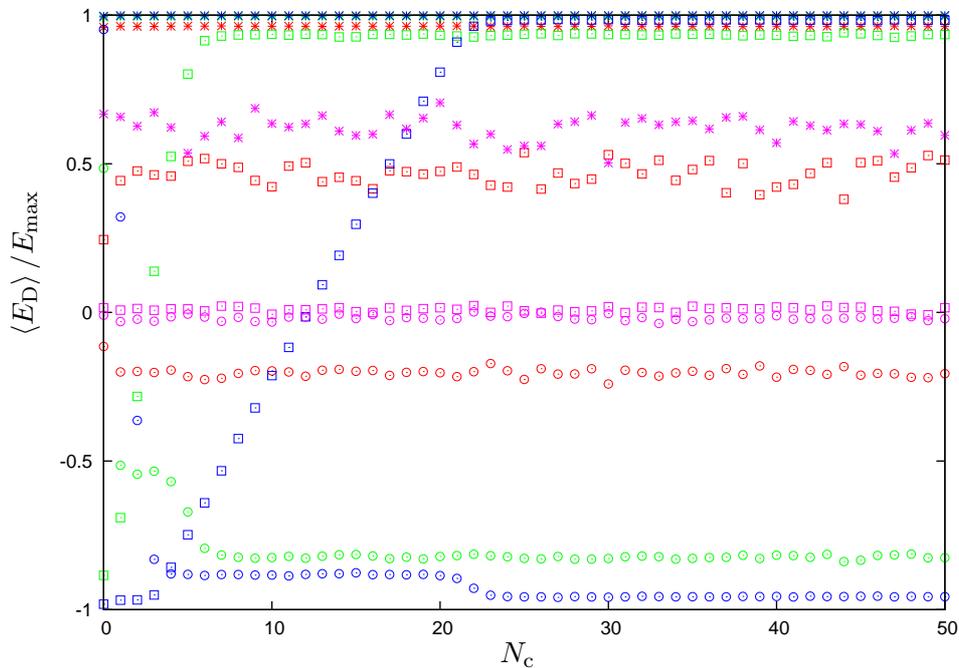


Abbildung 10.9: Entwicklung der Dämonenergien mit der Anzahl der Konfigurationen (rosa: $E_{\max} = 10$, rot: $E_{\max} = 120$, grün: $E_{\max} = 1000$, blau: $E_{\max} = 4000$, Stern: E_D^1 , Quadrat: E_D^2 , Kreis: E_D^3)

In Abb. (10.11) ist die Entwicklung des Polyakov-Loops in Abhängigkeit von der mikro-

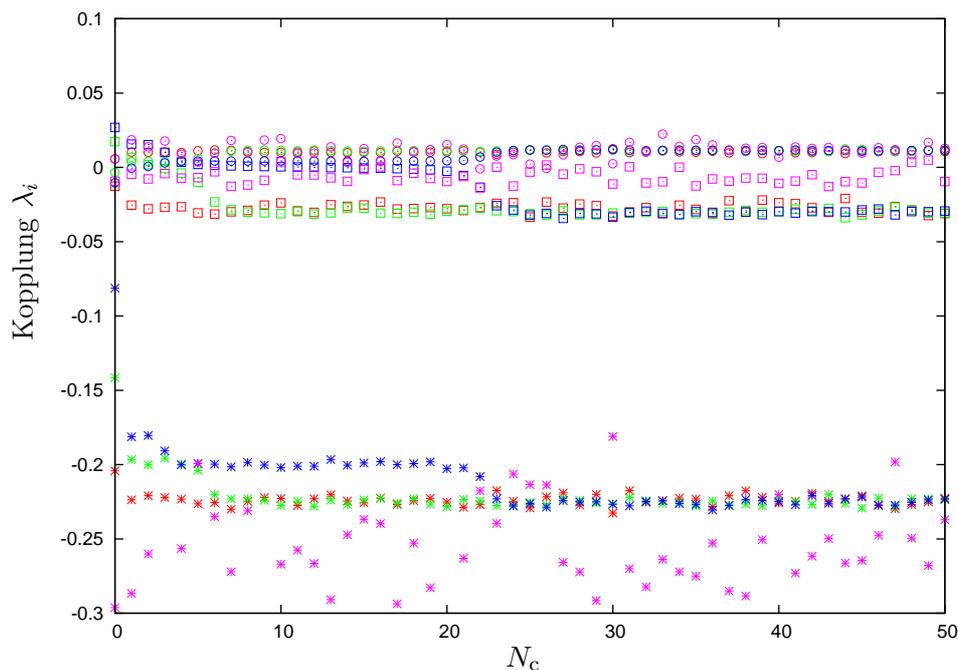


Abbildung 10.10: Entwicklung der Kopplungen mit der Anzahl der Konfigurationen (rosa: $E_{\max} = 10$, rot: $E_{\max} = 120$, grün: $E_{\max} = 1000$, blau: $E_{\max} = 4000$, Stern: λ_1 , Quadrat: λ_2 , Kreis: λ_3)

kanonischen Statistik gezeigt. Im Vergleich dazu wieder der Wert im Yang-Mills-Ensemble und auf der Yang-Mills-Konfiguration. Man kann, wenn auch nicht mit absoluter Sicherheit, erkennen, dass für große Statistik der Wert des Polyakov-Loops in der effektiven Theorie gegen den Wert des Polyakov-Loops auf der Konfiguration aus dem Yang-Mills-Ensemble geht.

Nach diesen Vorbetrachtungen wird jetzt noch einmal der Polyakov-Loop in der effektiven Theorie für verschiedene Energien E_{\max} gemessen (Abb. 10.12). Die Simulationsparameter sind $N_c = 20$ bei einer Statistik von 10000 mikrokanonischen Konfigurationen pro Simulation.

Die Fluktuationen bei kleinen Energien haben sich nicht geändert, jedoch ist die Dämon-Methode nun auch bei großen Energien E_{\max} noch stabil. Damit konnten effektiv 3 Parameter (für n Kopplungen entsprechend n Parameter) eliminiert werden, wenn man die Dämonenergien so wählt, dass sie viel größer sind als die Energie, die an einem Gitterpunkt von dem zugehörigen Wirkungsterm maximal abgegeben werden kann. In diesem Fall wird die Akzeptanz im Wesentlichen durch die Akzeptanz des Haarmaßes bestimmt und man erhält kurze Autokorrelationszeiten für den Polyakov-Loop in den mikrokanonischen Simulationen. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden für dieses Modell die Dämonenergien $E_{\max}^1 = 1000$ und $E_{\max}^2 = E_{\max}^3 = 500$ gewählt.

10 Untersuchung der Dämon-Methode an einem 3-Kopplungs Modell

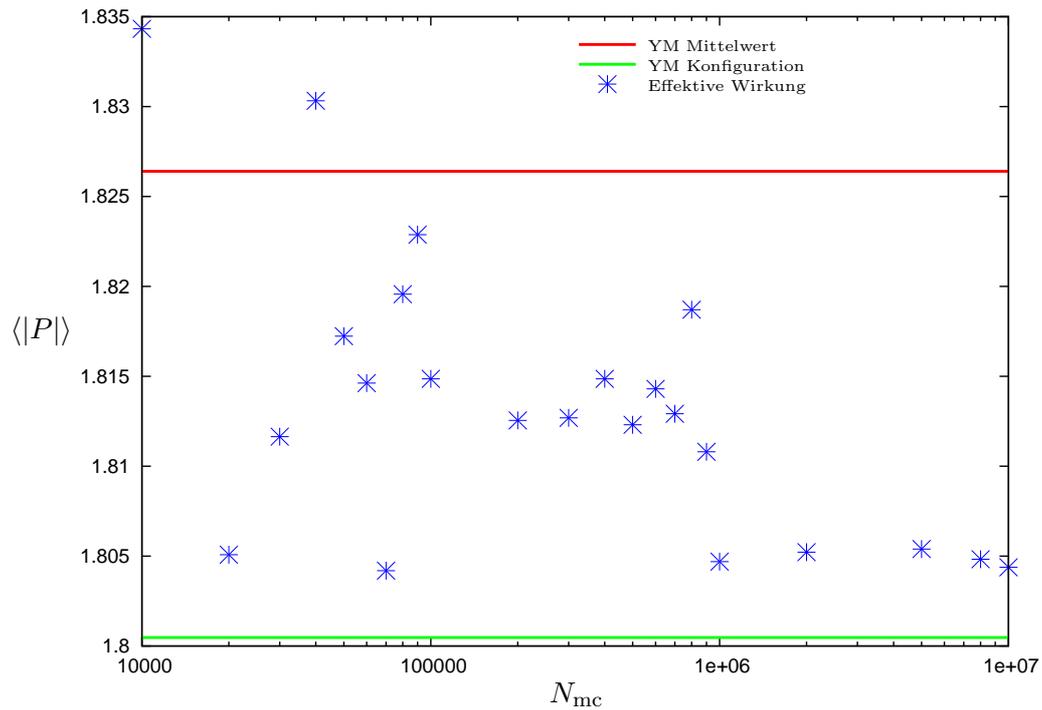


Abbildung 10.11: Betrag des Polyakov-Loops über der mikrokanonischen Statistik

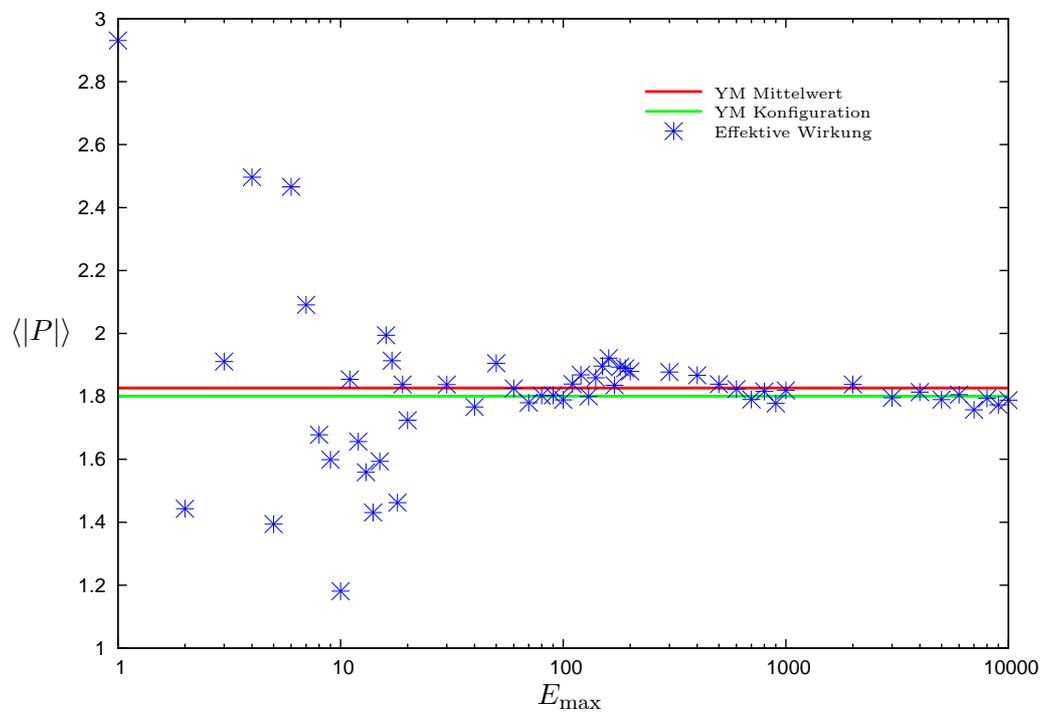


Abbildung 10.12: Betrag des Polyakov-Loops über der maximalen Energie des Dämons

10.2.4 Thermalisierung im Yang-Mills-Ensemble

Trotz der Verbesserungen hängt das Ergebniss noch von der Wahl der Konfiguration aus dem Yang-Mills-Ensemble ab. Wenn die Wahl einer Konfiguration nicht willkürlich geschehen soll, muss ein Kriterium gefunden werden welches bestimmt ob eine Konfiguration ein gutes Ergebniss in der effektiven Theorie liefern wird. Da die Werte des Polyakov-Loops in der effektiven Theorie gegen Werte des Polyakov-Loops auf der Yang-Mills-Konfiguration gehen, wäre eine Möglichkeit Konfigurationen \mathcal{C} so zu wählen, dass gilt $P(\mathcal{C}) \approx \langle P \rangle_{\text{YM}}$. Die effektive Theorie soll jedoch nicht nur den Polyakov-Loop als einzelne Observable korrekt wiedergeben, sondern ein effektives Modell für die Yang-Mills-Theorie darstellen. Deshalb muss ein anderes Kriterium gefunden werden, welches nicht von einer speziellen Observablen abhängt. Hier wurde folgender Zusammenhang gefunden: Auf Konfigurationen, für die gilt

$$S^i(\mathcal{C}) \approx \langle S^i \rangle_{\text{YM}} \quad \text{für alle } i \quad (10.5)$$

ist die Streuung der erhaltenen Werte für die Kopplungen geringer als für zufällig gewählte Konfigurationen. Deshalb werden sie im Folgenden *gut thermalisierte Konfigurationen* genannt. Simulationen haben gezeigt, dass die aus verschiedenen zufällig gewählten Konfigurationen erhaltenen Kopplungen in sehr guter Näherung in einer Ebene im Kopplungsraum liegen. In Abb. (10.13) ist diese Ebene als Schnitt durch den Kopplungsraum zu sehen (Ebene mit λ_1 und λ_2 , $\lambda_3 \approx -0.069 \cdot \lambda_1 - 0.185 \cdot \lambda_2 - 0.01$). Die Linie, die durch die *gut thermalisierten Konfigurationen* ausgezeichnet wird, führt bei größer werdender Statistik zu einer immer schärferen Linie, auf der die Werte des Polyakov-Loops identisch sind. Zum Vergleich sind in Abb. 10.14 (rechts) Bereiche mit identischem Polyakov-Loop zu sehen. Dementsprechend ist auch die Streuung der Polyakov-Loops auf diesen Konfigurationen kleiner (Abb. 10.14 links). Aufgrund dieses Zusammenhangs zwischen Polyakov-Loops und *gut thermalisierten Konfigurationen* werden bei der Anwendung des mikrokanonischen Dämons im weiteren Verlauf dieser Arbeit nur diese *gut thermalisierten Konfigurationen* aus dem Yang-Mills-Ensemble verwendet.

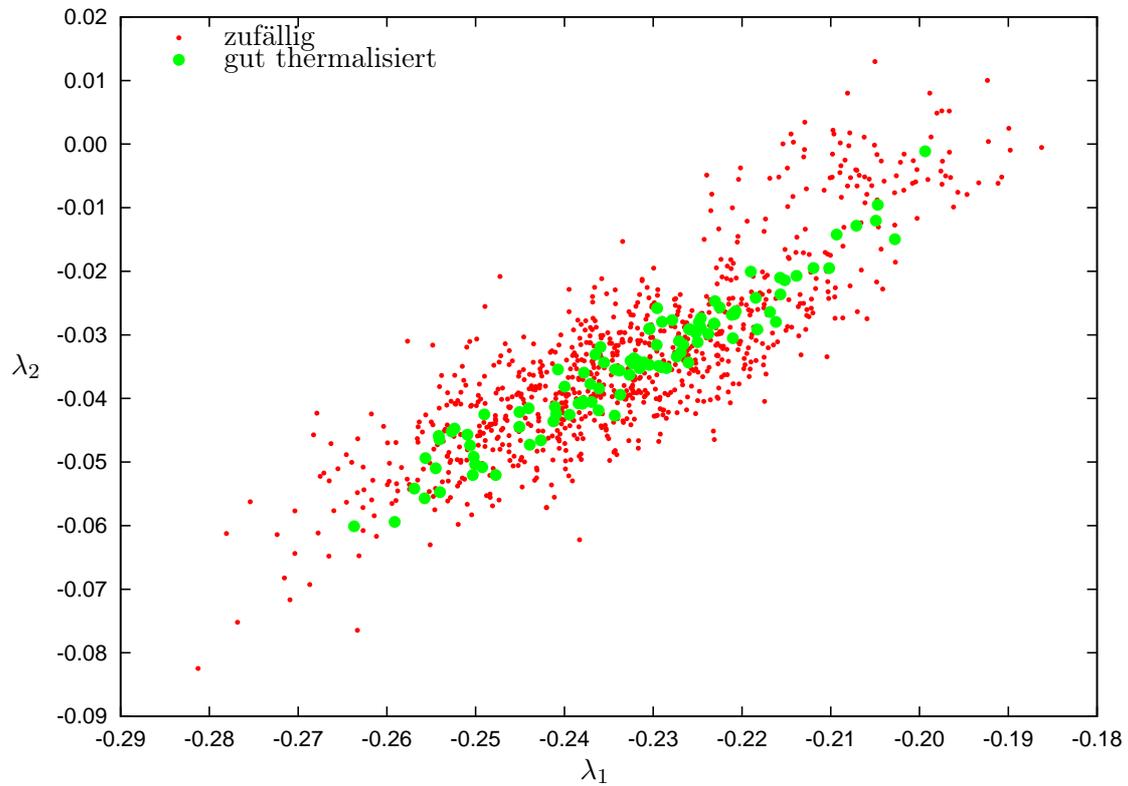


Abbildung 10.13: Vergleich zufällige und gut thermalisierte Konfigurationen

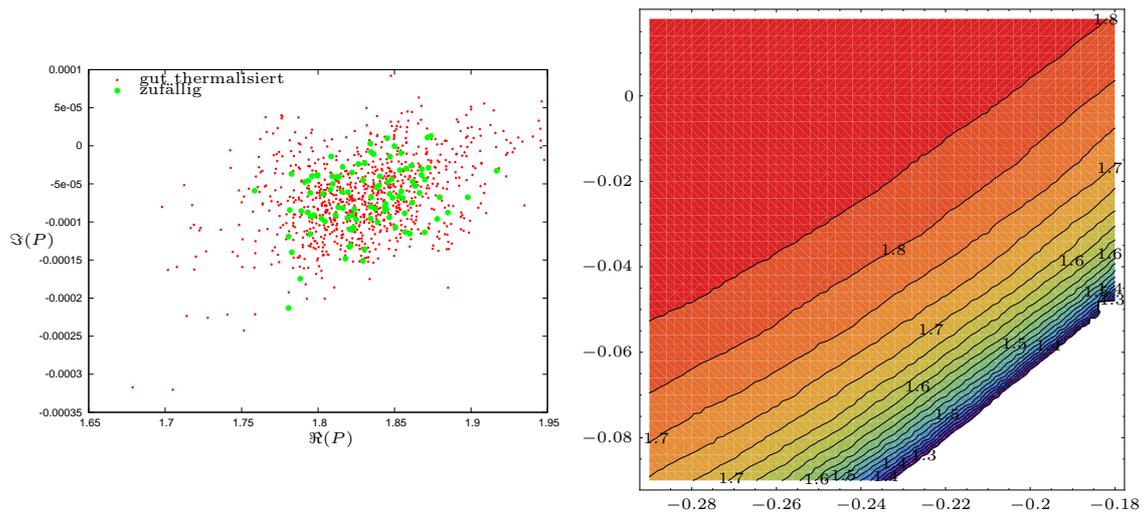


Abbildung 10.14: Polyakov-Loop auf zufälligen und *gut thermalisierten* Konfigurationen (links) und Konturen des Polyakov-Loops im Kopplungsraum (rechts)

10.3 Der kanonische Dämon

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, ob der kanonische Dämon tatsächlich eine Verbesserung gegenüber dem mikrokanonischen Dämon darstellt. Auch im kanonischen Dämon ist die Energie E_{\max} ein freier Parameter. Weitere Parameter sind die Anzahl N_{YM} der verwendeten verschiedenen Konfigurationen \mathcal{C}_i . Da auch hier die Dämonenergie am Anfang 0 ist, werden ebenso wie für den mikrokanonischen Dämon Thermalisierungseffekte bezüglich der Konfigurationen erwartet. Deshalb werden die ersten 20 Konfigurationen nicht zur Berechnung der Mittelwerte benutzt. Aspekte, die hier untersucht werden sollen, sind die Abhängigkeit der erhaltenen Kopplungen und Polyakov-Loops von der mikrokanonischen Statistik pro Konfiguration und von der Anzahl der verschiedenen Konfigurationen N_{YM} aus dem Yang-Mills-Ensemble.

10.3.1 Thermalisierungseffekte und mikrokanonische Statistik

Zunächst wird für 4 verschiedene Anzahlen von Konfigurationen N_{YM} aus dem Yang-Mills-Ensemble (10, 100, 1000 und 3000) die Abhängigkeit der erhaltenen Kopplungen von der mikrokanonischen Statistik untersucht. Die Ergebnisse sind in den Abbildungen 10.15 bis 10.18 zu sehen.

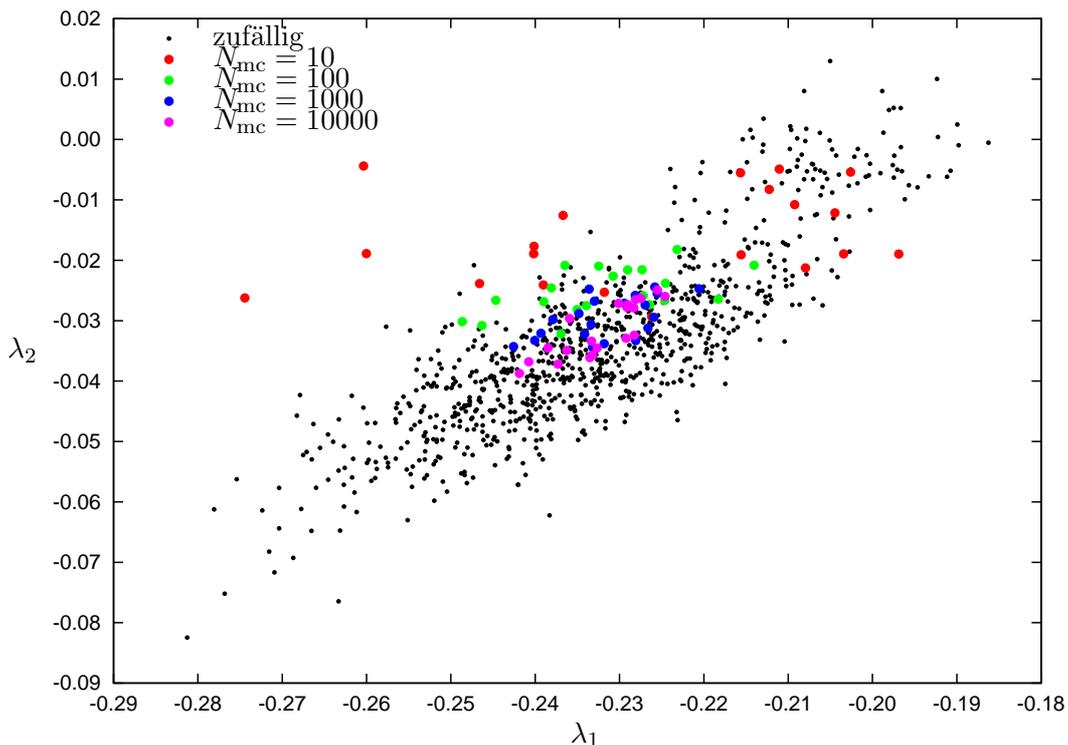


Abbildung 10.15: Kanonischer Dämon auf $N_{\text{YM}} = 10$ Konfigurationen

Hierbei ist zu sehen, dass für steigende Anzahl der verwendeten Konfigurationen N_{YM} die Streuung der Kopplungen erwartungsgemäß sinkt. Für wachsende mikrokanonische Statistik N_{mc} gibt es eine systematische Verschiebung in das Zentrum des durch die zufälligen mikrokanonischen Kopplungen ausgezeichneten Bereichs und damit gegen Kopplungen, die in der effektiven Theorie zu einem Polyakov-Loop-Erwartungswert führen, der dem des Yang-Mills-Erwartungswertes entspricht. Da es sich nicht um statistische Fluktuationen

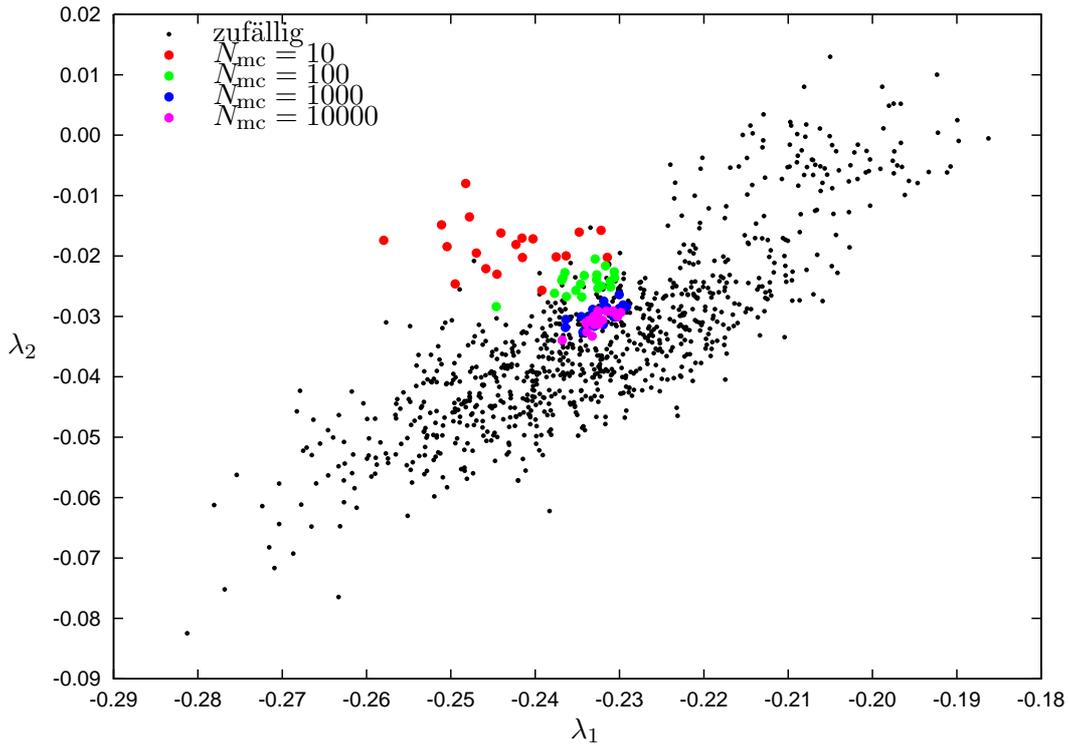


Abbildung 10.16: Kanonischer Dämon auf $N_{YM} = 100$ Konfigurationen

sondern um eine systematische Verschiebung handelt, könnte man Thermalisierungseffekte entweder in den mikrokanonischen Simulationen selbst oder in der Anzahl der verworfenen Konfigurationen N_{YM} vermuten. Deshalb wurden Simulationen durchgeführt, bei denen die mikrokanonische Statistik auf einer Yang-Mills-Konfiguration festgehalten wird ($N_{mc} = 100$) und verschieden viele (T_{mc}) mikrokanonische Konfigurationen verworfen wurden. Es zeigt sich, dass es sich um eine sehr langreichweitige Thermalisierung handelt, die direkt in der Dämonenergie nicht gemessen werden konnte, weil die Fluktuationen der Dämonenergie wesentlich größer sind als dieser Thermalisierungseffekt. In den resultierenden Kopplungen hat sie jedoch sichtbare Auswirkungen, wie in Abb. 10.19 zu sehen ist.

Da es kaum möglich ist, die Thermalisierungszeit zu bestimmen, muss bei nachfolgenden Simulationen immer eine hohe mikrokanonische Statistik erzeugt werden, da Fehler (und damit auch Thermalisierungseffekte) mit $1/\sqrt{N_{mc}}$ reduziert werden.

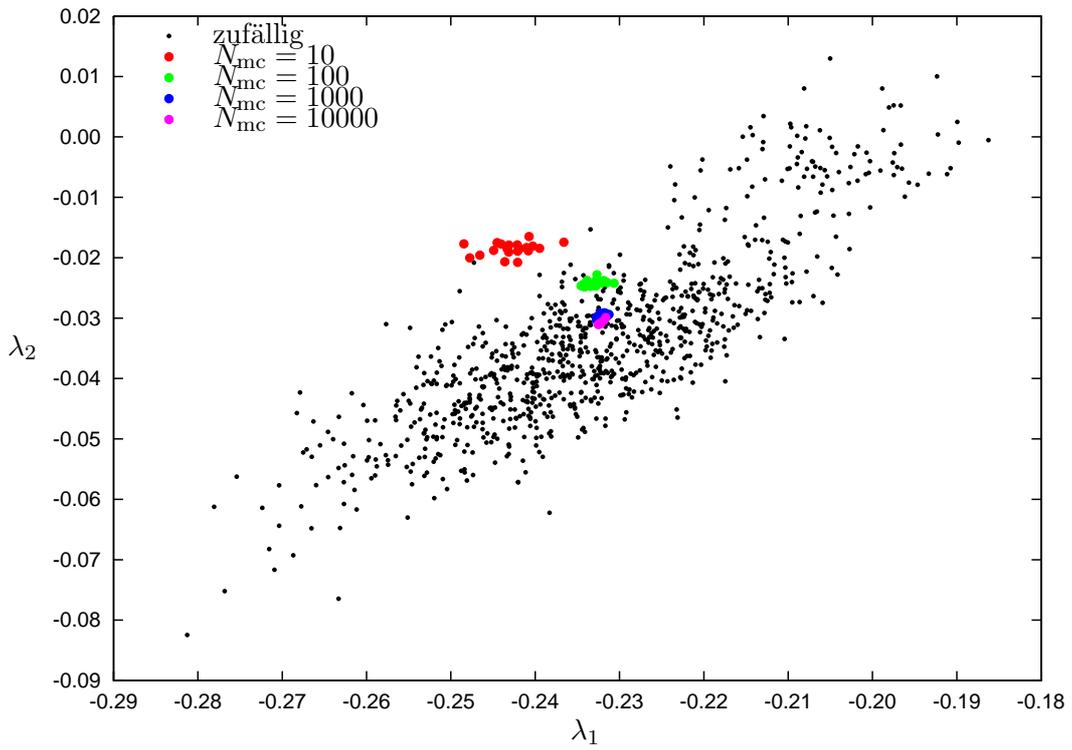


Abbildung 10.17: Kanonischer Dämon auf $N_{YM} = 1000$ Konfigurationen

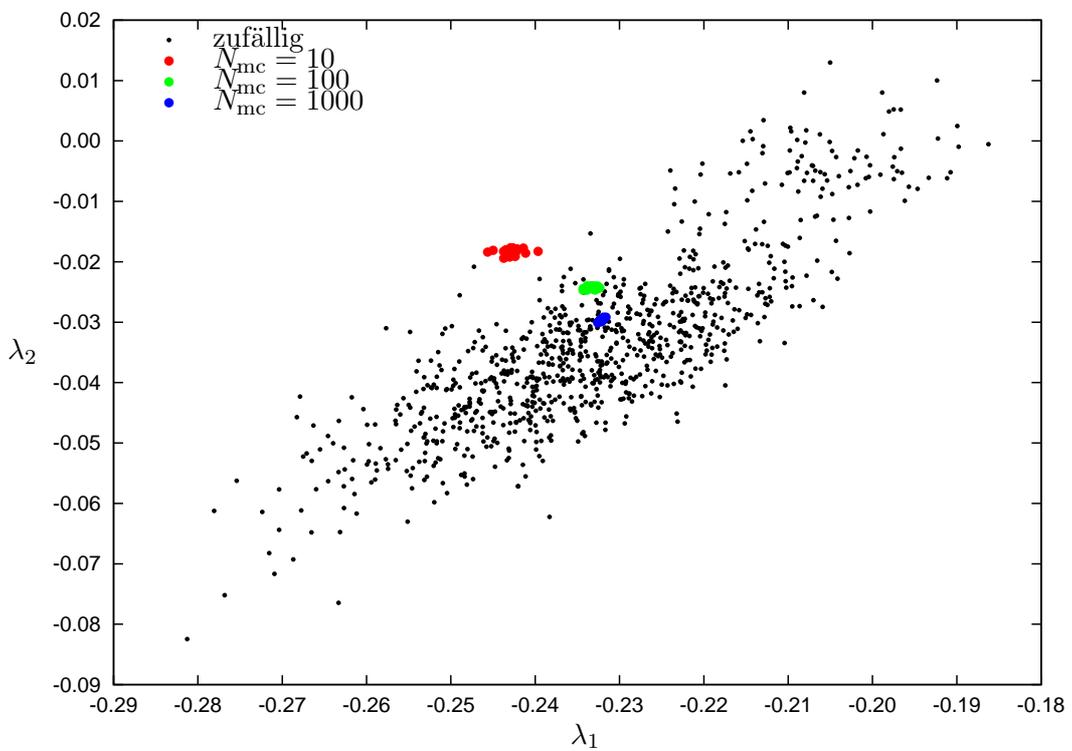


Abbildung 10.18: Kanonischer Dämon auf $N_{YM} = 3000$ Konfigurationen

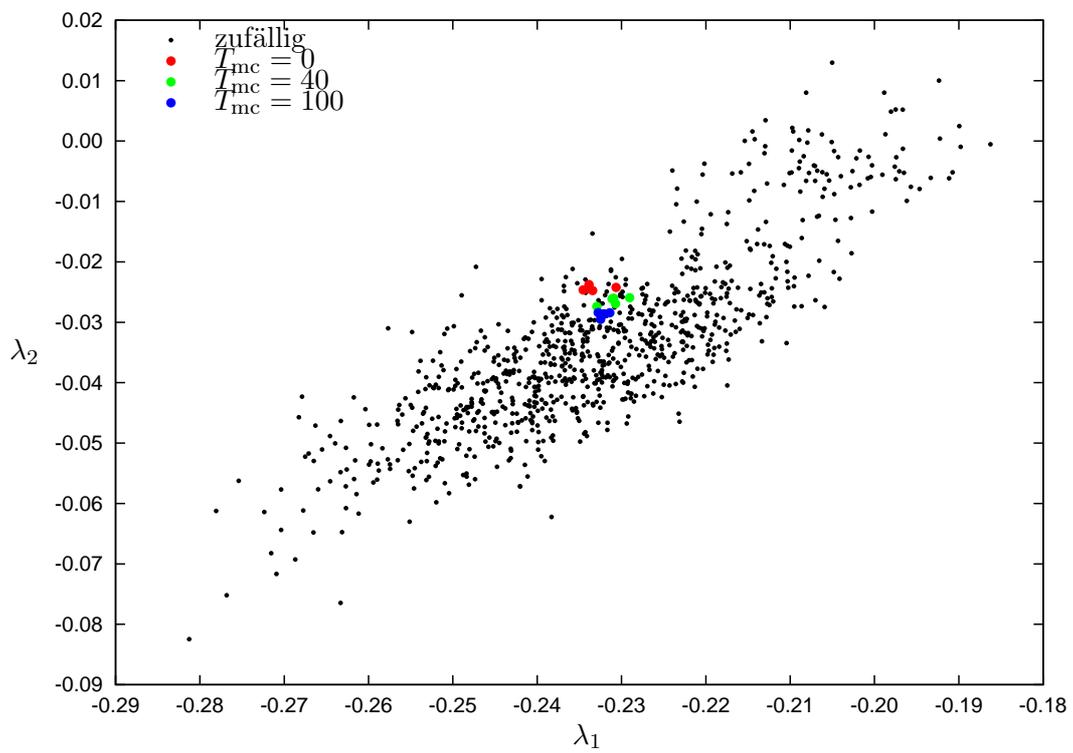


Abbildung 10.19: Kanonischer Dämon auf $N_{YM} = 1000$ Konfigurationen mit $N_{mc} = 100$ und mikrokanonischer Thermalisierung T_{mc}

10.3.2 Entwicklung des Polyakov-Loops

Nun wird der Polyakov-Loop in Abhängigkeit von der mikrokanonischen Statistik und der Anzahl der Konfigurationen N_{YM} betrachtet. In Abb. 10.20 ist der Polyakov-Loop über der gesamten mikrokanonischen Statistik $N_{\text{mc,ges}}$ aufgetragen ($N_{\text{mc,ges}} = N_{\text{YM}} \cdot N_{\text{mc}}$). Dabei wurden für festes N_{YM} 20 verschiedene Konfigurationssätze aus dem Yang-Mills-Ensemble benutzt, um die Streuung zu bestimmen. Es ist zu sehen, dass die Streuung von der Gesamtstatistik abhängt. Benutzt man zu wenige Konfigurationen N_{YM} oder eine zu kleine mikrokanonische Statistik N_{mc} erhält man die bereits erwähnten systematischen Fehler.

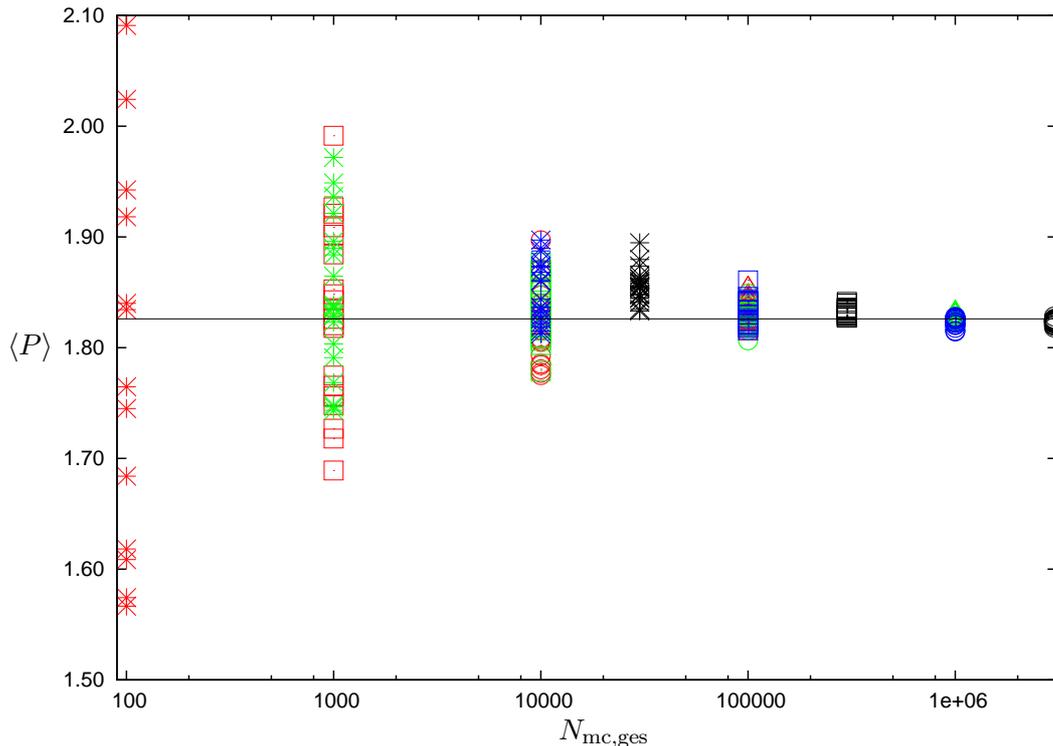


Abbildung 10.20: Polyakov-Loop über gesamter mikrokanonischer Statistik (rot: $N_{\text{YM}} = 10$, grün: $N_{\text{YM}} = 100$, rot: $N_{\text{YM}} = 1000$, schwarz: $N_{\text{YM}} = 3000$)

Als Letztes wird noch der Polyakov-Loop über der mikrokanonischen MC-Zeit betrachtet (Abb. 10.21). Es wurden Simulationen mit $N_{\text{YM}}=100$ und $N_{\text{mc}} = 10000$ (also insgesamt eine Millionen mikrokanonische Konfigurationen) durchgeführt und anschließend die effektive Theorie simuliert.

Es ist zu sehen, dass es zwischen den einzelnen Konfigurationen aus dem Yang-Mills-Ensemble keine relevanten Thermalisierungszeiten gibt. Lediglich am Anfang sollten einige Yang-Mills-Konfigurationen verworfen werden. Weiter ist der Mittelwert des Polyakov-Loops in der Yang-Mills-Theorie und in der effektiven Theorie dargestellt. Dazu wurde der Mittelwert über die mikrokanonischen Konfigurationen berechnet. Er stimmt mit dem Erwartungswert aus dem Yang-Mills-Ensemble überein.

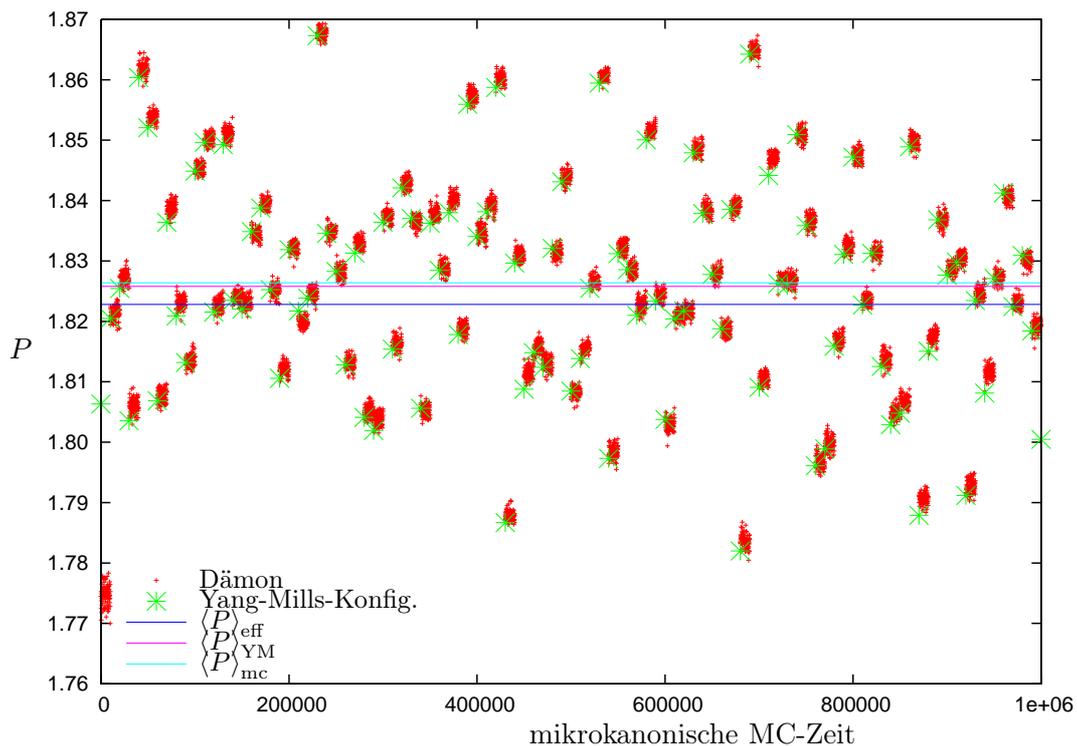


Abbildung 10.21: Polyakov-Loop über mikrokanonischer MC-Zeit

10.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden untersucht, wie der mikrokanonische und der kanonische Dämon anzuwenden sind. Hierbei hat sich ergeben, dass es mit dem mikrokanonischen Dämon nur möglich ist den Polyakov-Loop auf der verwendeten Konfiguration mit großer Genauigkeit zu reproduzieren. Der Erwartungswert des Polyakov-Loops aus dem Yang-Mills-Ensemble ist jedoch (wie zu erwarten war) mit dieser Methode nicht zu erreichen. Eine Verbesserung erreicht man durch *gut thermalisierte* Konfigurationen aus dem Yang-Mills-Ensemble, die geringere Schwankungen der Kopplungen aufweisen als zufällig ausgewählte Konfigurationen.

Der kanonische Dämon stellt eine Verbesserung dar, weil es mit ihm möglich ist, Erwartungswerte aus dem Yang-Mills-Ensemble zu reproduzieren. Insgesamt zeigt sich, dass mit zunehmender mikrokanonischer Statistik eine immer genauere Approximation der Werte möglich ist. Für den kanonischen Dämon ist dies jedoch ein sehr zeitaufwendiger Prozess, da auf jeder einzelnen Konfiguration eine hohe Statistik notwendig ist um systematische Fehler (die aus langreichweitigen Thermalisierungseffekten im mikrokanonischen Ensemble resultieren) in der Bestimmung der Kopplungen zu vermeiden. Die Anzahl der Konfigurationen aus dem Yang-Mills-Ensemble reduziert lediglich die Streuung der erhaltenen Kopplungen, systematische Fehler gibt es hier nicht.

Nach diesen grundlegenden Untersuchungen der Dämon-Methode soll sie nun im folgenden Kapitel auf zwei verschiedene Phasenübergänge sowie verschiedene Gitter angewendet und mit Schwinger-Dyson-Gleichungen verglichen werden.

11 Vergleich von SDG- und Dämonmethode

Nachdem in den letzten Kapiteln die beiden *IMC*-Methoden Schwinger-Dyson-Gleichungen und Dämon vorgestellt wurden, sollen sie jetzt an zwei verschiedenen Modellen getestet und miteinander verglichen werden. Das eine Modell ist der Confinement-Deconfinement Phasenübergang in der reinen $SU(3)$ -Yang-Mills-Theorie, das andere der Zentrums-Antizentrums-Phasenübergang in der erweiterten Yang-Mills-Theorie. Im Anschluss wird ein Ausblick auf $SU(N)$ -Yang-Mills gegeben.

11.1 Der Confinement-Deconfinement-Übergang

Als erstes werden die *IMC*-Methoden auf den Confinement-Deconfinement-Phasenübergang in der $SU(3)$ -Yang-Mills Theorie bei verschiedenen Gittergrößen angewendet und verglichen. Die verwendete effektive Wirkung ist das vorher besprochene 3-Kopplungsmodell.

11.1.1 Das $6^3 \times 2$ -Gitter

Wie in [49] gezeigt wurde, liefern die Schwinger-Dyson-Gleichungen auf kleinen Gittern sehr gute Ergebnisse in der Reproduktion des Polyakov-Loops. Auf dem $6^3 \times 2$ -Gitter sollen deshalb insbesondere die Unterschiede zwischen SDG und kanonischem Dämon mit verschiedenen Parametern verglichen werden. Ein Anwenden des mikrokanonischen Dämons macht aufgrund des starken Tunnelns zwischen den $Z(3)$ -Kopien auf diesem kleinen Gitter keinen Sinn, weil der Polyakov-Loop auf den *gut thermalisierten* Konfigurationen aus der Yang-Mills-Theorie überhaupt nicht mit dem Mittelwert des Polyakov-Loops übereinstimmt. Die Dämon-Energien betragen wie im vorherigen Kapitel $E_{\max}^1 = 1000$, $E_{\max}^2 = 500$ und $E_{\max}^3 = 500$. Variiert werden für den kanonischen Dämon die Anzahl N_{YM} der Konfigurationen aus dem Yang-Mills-Ensemble sowie die mikrokanonische Statistik N_{mc} und Thermalisierungszeit T_{mc} . Im Einzelnen sind dies folgende Parametersätze für den kanonischen Dämon:

Name	kan. 1	kan. 2	kan. 3	kan. 4	kan. 5
N_{YM}	150	1500	1500	15000	15000
N_{mc}	10000	1000	10000	100	1000
T_{mc}	0	0	0	0	1000
$N_{\text{mc,ges}}$	1.500.000	1.500.000	15.000.000	1.500.000	15.000.000

In Abb. 11.1 ist der rotierte Polyakov-Loop in Abhängigkeit von der Kopplung β dargestellt.

Es ist zu sehen, dass der kanonische Dämon für große Statistik den Phasenübergang besser wiedergeben kann als die Schwinger-Dyson-Gleichungen, jedoch sind die erhaltenen Werte für den rotierten Polyakov-Loop weniger glatt als für die Schwinger-Dyson-Gleichungen. Mit zunehmender Anzahl von Konfigurationen und zunehmender Anzahl mikrokanonischer Statistik werden die Fluktuationen kleiner. Wie die Simulation mit 150

11 Vergleich von SDG- und Dämonmethode

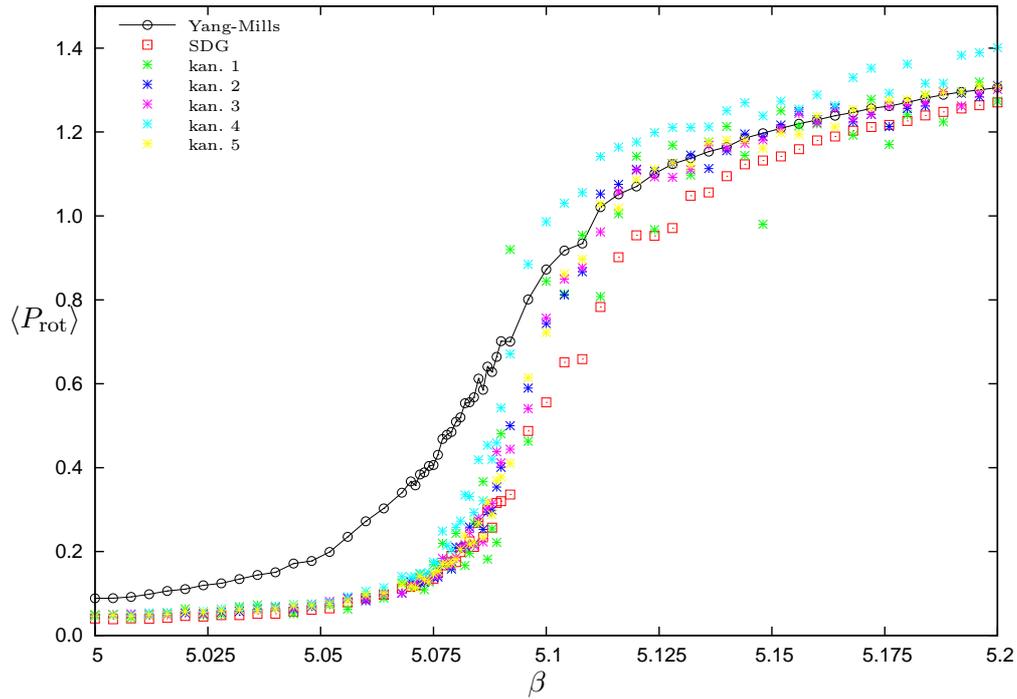


Abbildung 11.1: Vergleich *IMC* auf dem $6^3 \times 2$ -Gitter am Confinement-Deconfinement-Übergang

Konfigurationen aus dem Yang-Mills-Ensemble zeigt, reicht es aber nicht die gesamte mikrokanonische Statistik $N_{\text{mc,ges}}$ zu betrachten, weil die Ergebnisse mit kleiner Zahl von Konfigurationen N_{YM} trotz großer Statistik pro Konfiguration schlechter abschneiden als eine vergleichbare Gesamtstatistik mit mehr YM-Konfigurationen. Dies ist verständlich, weil in der Nähe eines Phasenübergangs die Werte des Polyakov-Loops sich auf den einzelnen Konfigurationen stark unterscheiden und auch zur Berechnung des Mittelwertes eine höhere Statistik (in YM) notwendig ist. Nachdem gezeigt wurde, dass beide Methoden den Phasenübergang gut reproduzieren können, werden in den Abb. 11.2 bis 11.4 die erhaltenen Kopplungen betrachtet.

Hierbei fällt auf, dass die Kopplungen die durch Schwinger-Dyson-Gleichungen erhalten werden wesentlich glatter verlaufen, was aufgrund des Polyakov-Loops auch zu erwarten war. Allerdings stimmen sie nicht mit den Kopplungen aus dem kanonischen Dämon überein. Dies ist besonders deutlich für die führende Kopplung λ_1 zu erkennen, wodurch sich auch die Verschiebung des Phasenübergangs zu größerer Kopplung β gegenüber dem Yang-Mills-Übergang und den durch die Dämonmethode erhaltenen Phasenübergang erklären lässt.

11.1 Der Confinement-Deconfinement-Übergang

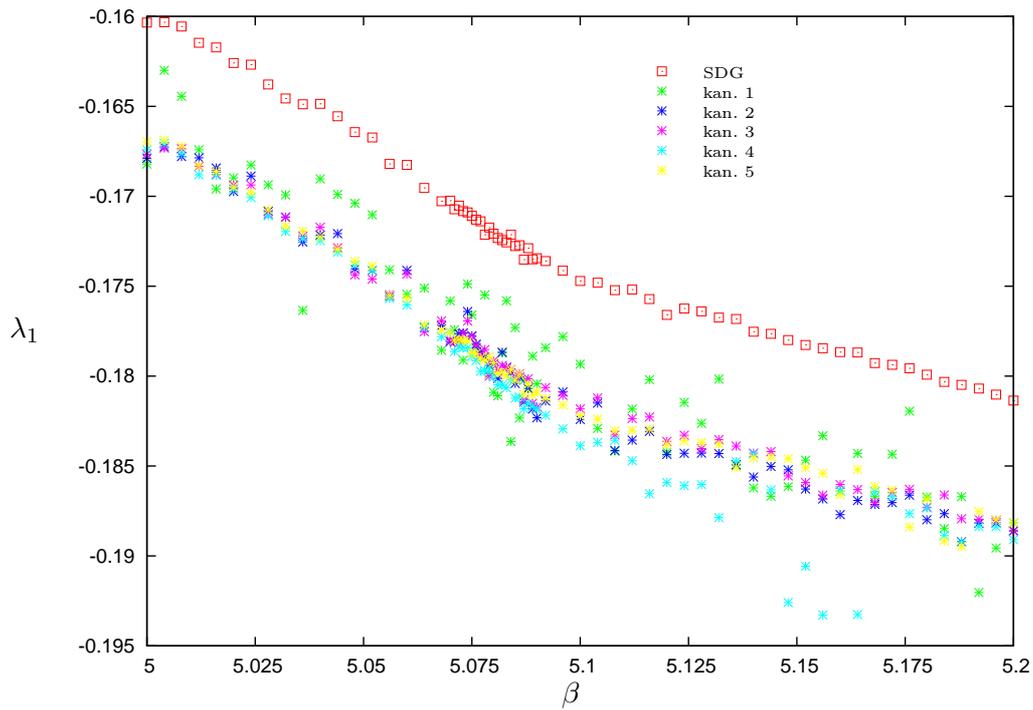


Abbildung 11.2: Vergleich der Kopplungen auf dem $6^3 \times 2$ -Gitter am Confinement-Deconfinement-Übergang

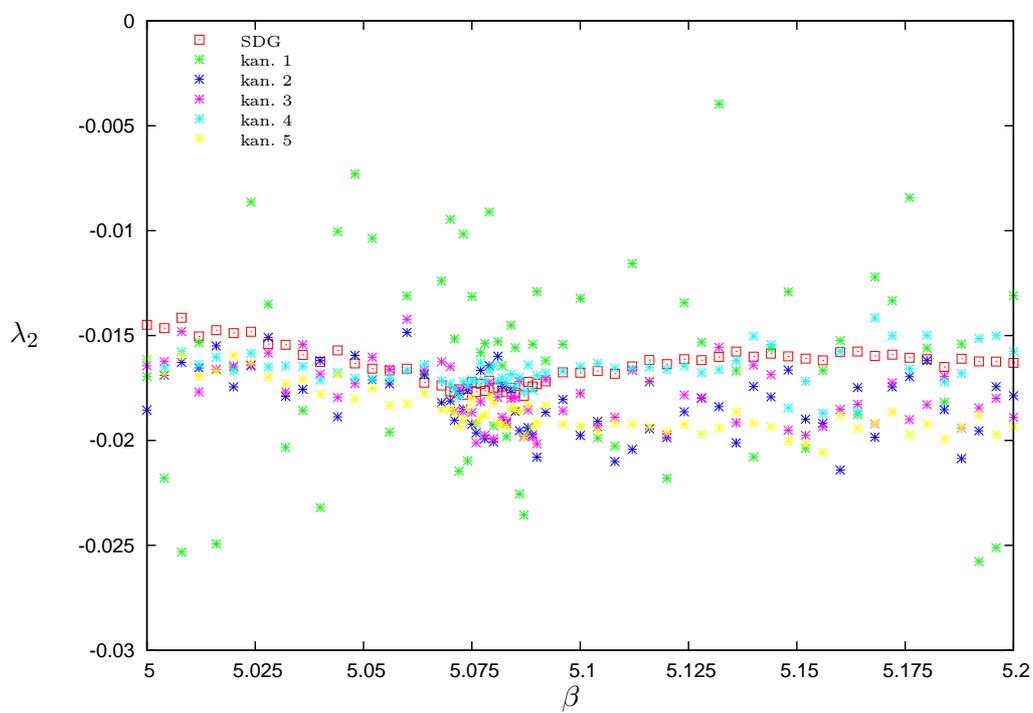


Abbildung 11.3: Vergleich der Kopplungen auf dem $6^3 \times 2$ -Gitter am Confinement-Deconfinement-Übergang

11 Vergleich von SDG- und Dämonmethode

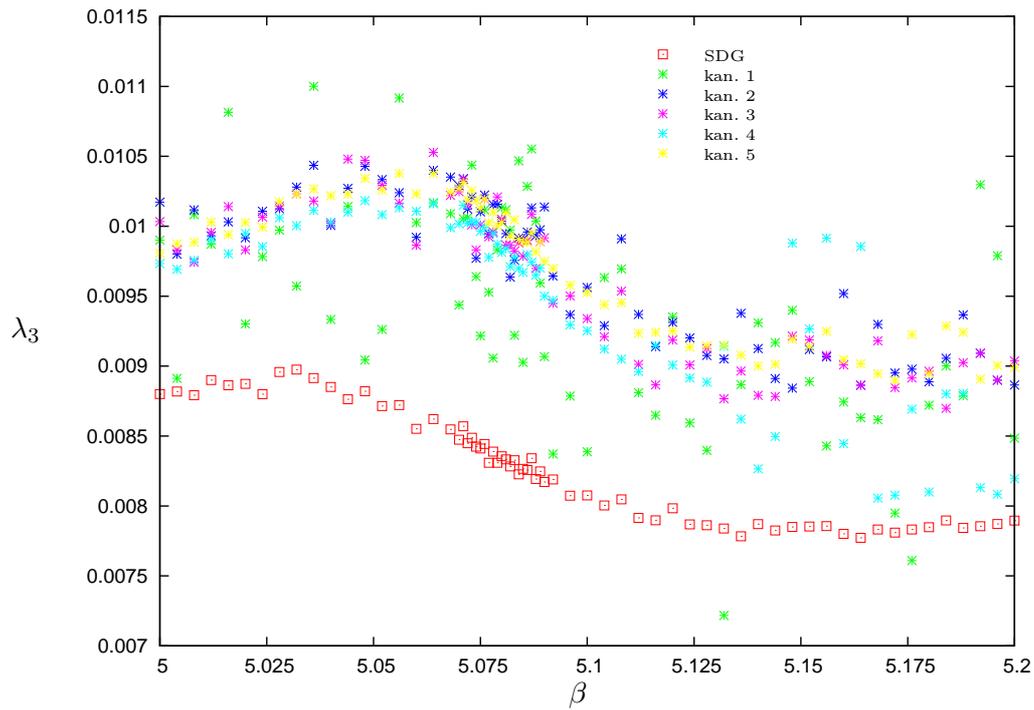


Abbildung 11.4: Vergleich der Kopplungen auf dem $6^3 \times 2$ -Gitter am Confinement-Deconfinement-Übergang

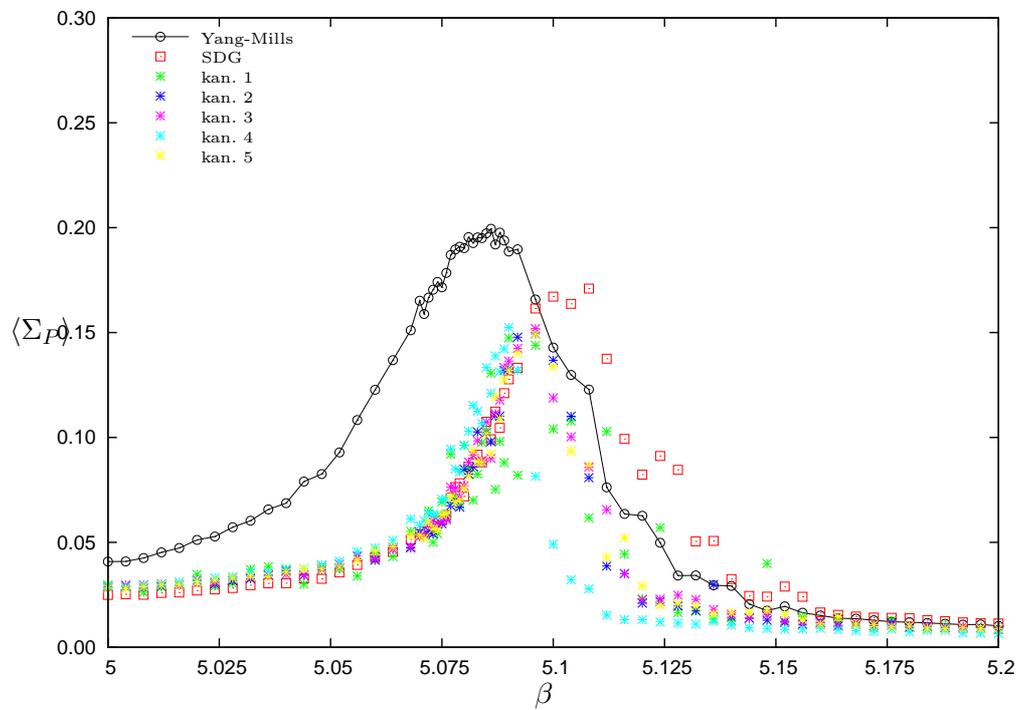


Abbildung 11.5: Vergleich der Suszeptibilität auf dem $6^3 \times 2$ -Gitter am Confinement-Deconfinement-Übergang

11.1 Der Confinement-Deconfinement-Übergang

Mit Hilfe der Suszeptibilität (Abb. 11.5) soll nun noch die kritische Kopplung des Phasenübergangs bestimmt werden. Es ergeben sich folgende Werte

Methode	YM	SDG	kan. 1	kan. 2	kan. 3	kan. 4	kan. 5
β_c	5.086(5)	5.10(1)	5.088(10)	5.094(10)	5.094(5)	5.089(5)	5.094(5)

11.1.2 Das $12^3 \times 2$ -Gitter

Nachdem auf dem $6^3 \times 2$ -Gitter im Wesentlichen der kanonische Dämon mit verschiedenen Parametern untersucht wurde, sollen auf dem $12^3 \times 2$ -Gitter nun der mikrokanonische, der kanonische sowie die Schwinger-Dyson-Gleichungen miteinander verglichen werden. Die Parameter für mikrokanonischen und kanonischen Dämon wurden dabei so gewählt, dass sie auf der betrachteten β -Skala optimal sind. Im Einzelnen sind dies

- $N_{mc} = 1.000.000$ (mikrokanonischer Dämon)
- $N_{YM} = 500$ und $N_{mc} = 1000$ pro YM-Konfiguration (kanonischer Dämon)

In Abbildung 11.6 ist der rotierte Polyakov-Loop dargestellt. Es ist zu sehen, dass sowohl der mikrokanonische als auch der kanonische Dämon den Punkt des Phasenübergangs besser treffen als die Schwinger-Dyson-Gleichungen. Die SGD liefern dagegen einen stabileren Übergang. Der Wert des Polyakov-Loops liegt aber auch bei $\beta = 5.2$ noch deutlich unterhalb des Wertes für den Polyakov-Loop erhalten durch die Dämon-Methoden. Auch die Kopplungen in Abb. 11.7 bis 11.9 fluktuieren weniger stark als die Resultate der Dämon-Methoden, zeigen jedoch wieder die auf dem kleinen Gitter bereits beobachtete Abweichung.

11 Vergleich von SDG- und Dämonmethode

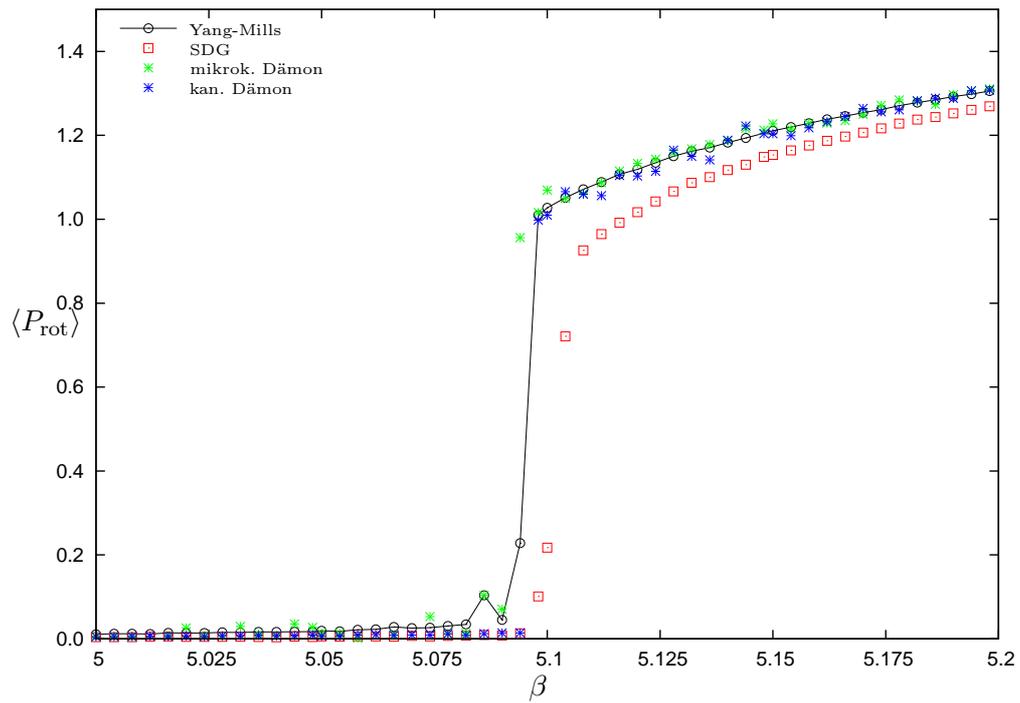


Abbildung 11.6: Vergleich *IMC* auf dem $12^3 \times 2$ -Gitter am Confinement-Deconfinement-Übergang

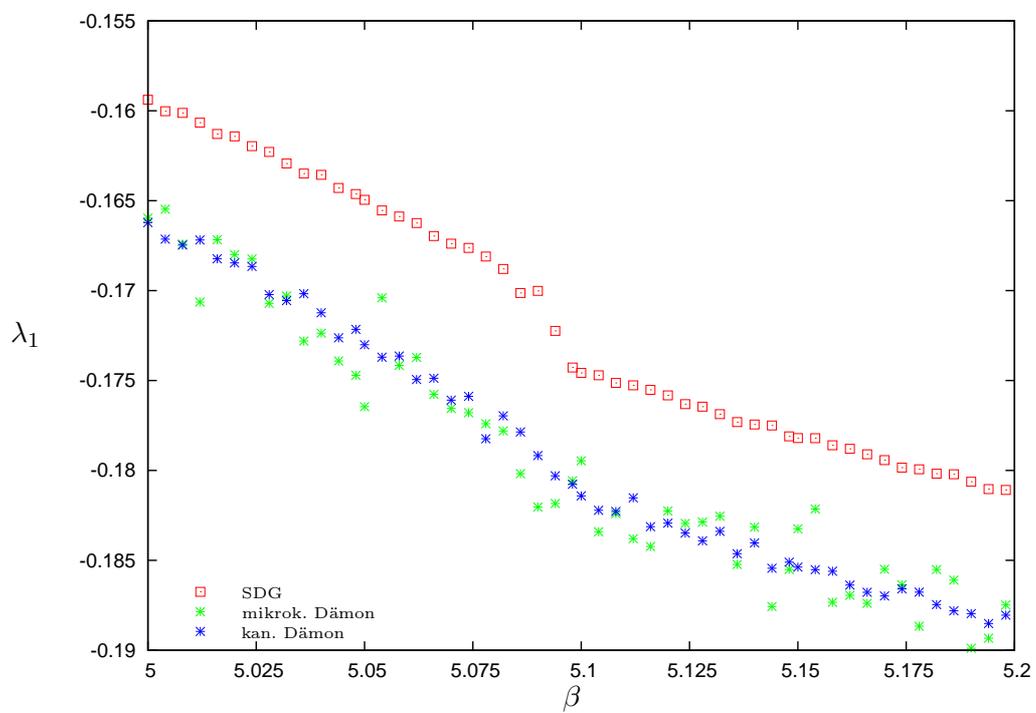


Abbildung 11.7: Vergleich der Kopplungen auf dem $12^3 \times 2$ -Gitter am Confinement-Deconfinement-Übergang

11.1 Der Confinement-Deconfinement-Übergang

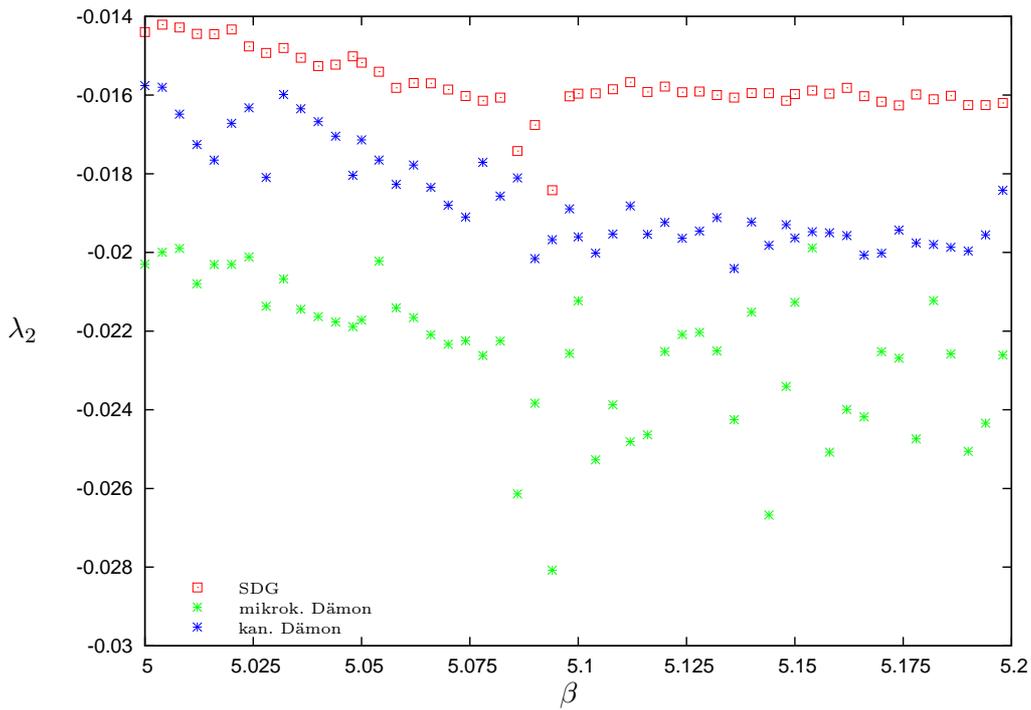


Abbildung 11.8: Vergleich der Kopplungen auf dem $12^3 \times 2$ -Gitter am Confinement-Deconfinement-Übergang

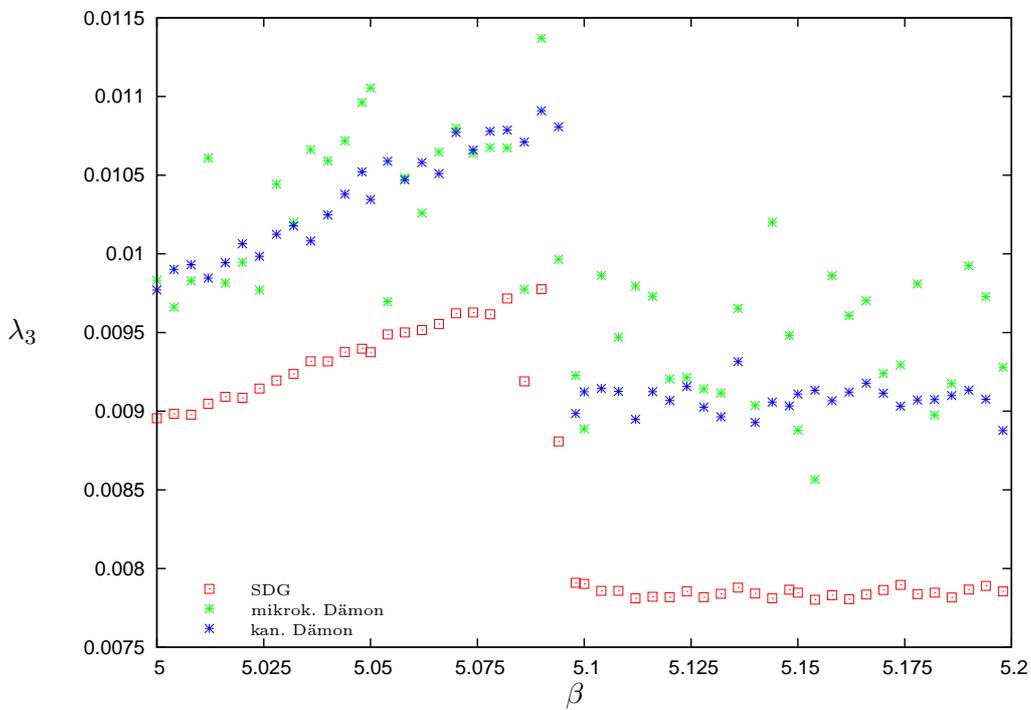


Abbildung 11.9: Vergleich der Kopplungen auf dem $12^3 \times 2$ -Gitter am Confinement-Deconfinement-Übergang

11.1.3 Das $16^3 \times 4$ -Gitter

Auf dem $16^3 \times 4$ -Gitter wurden folgende Parametersätze betrachtet

- SDG : Schwinger-Dyson-Gleichungen
- mikro.: mikrokanonischer Dämon mit $N_{\text{mc}} = 10000$.
- kan. 1: kanonischer Dämon mit $N_{\text{YM}} = 100$, $N_{\text{mc}} = 10000$ und $T_{\text{mc}} = 0$
- kan. 2: kanonischer Dämon mit $N_{\text{YM}} = 1000$, $N_{\text{mc}} = 1000$ und $T_{\text{mc}} = 1000$

Die Schwinger-Dyson-Gleichungen zeigen im untersuchten Bereich keinen Phasenübergang mehr an, während der kanonische Dämon und mikrokanonische Dämon eine Phasenübergang durchlaufen (Abb. 11.10). Die Fluktuationen des Polyakov-Loops sind jedoch wesentlich größer als auf kleineren Gittern, so dass sich keine glatte Kurve mehr ergibt. Im Unterschied hierzu zeigen die Kopplungen der effektiven Theorie (Abb. 11.11 bis 11.13) einen glatten Verlauf. Die Fluktuationen des Polyakov-Loops werden verständlich wenn man berücksichtigt, dass sich die effektive Theorie auch oberhalb des Yang-Mills-Phasenübergangs noch an einem 1. Ordnungsübergang befindet. Belegt wird dies durch Polyakov-Loop-Histogramme, die starkes Tunneln zwischen $Z(3)$ -Kopien und der symmetrischen Phase zeigen (siehe Abb. 11.15 $\beta = 5.8$ auf Seite 115). Die Suszeptibilität in Abb. 11.14 zeigt an, dass die Dämon-Methoden Kopplungen in der Nähe eines Phasenübergangs liefern. Für die SDG ist hingegen kein Peak zu erkennen.

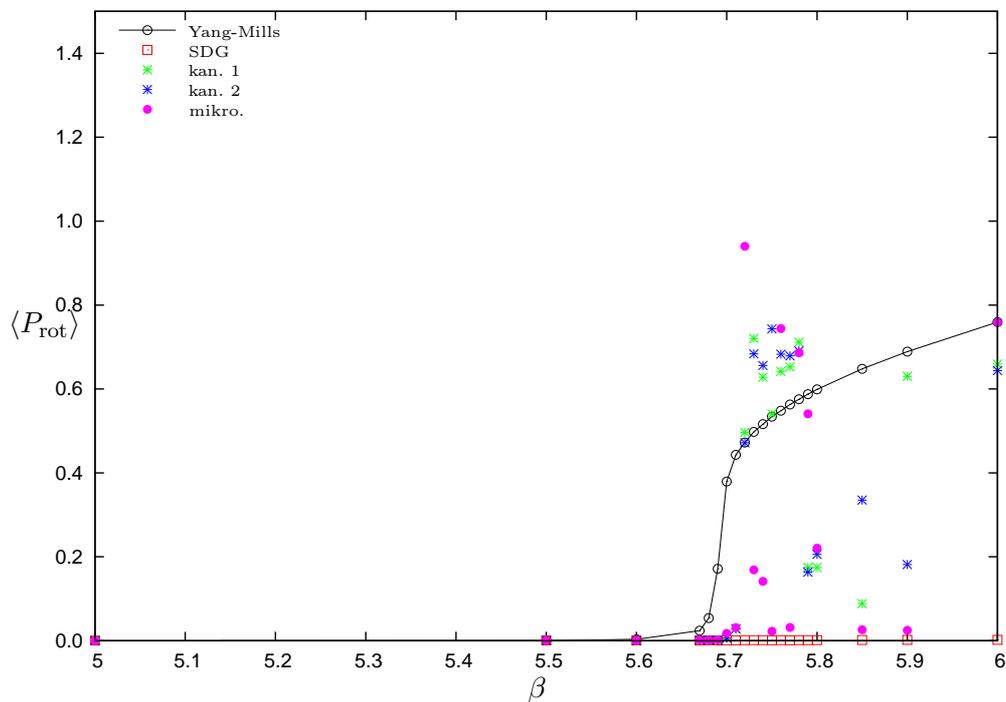


Abbildung 11.10: Vergleich *IMC* auf dem $16^3 \times 4$ -Gitter am Confinement-Deconfinement-Übergang

11.1 Der Confinement-Deconfinement-Übergang

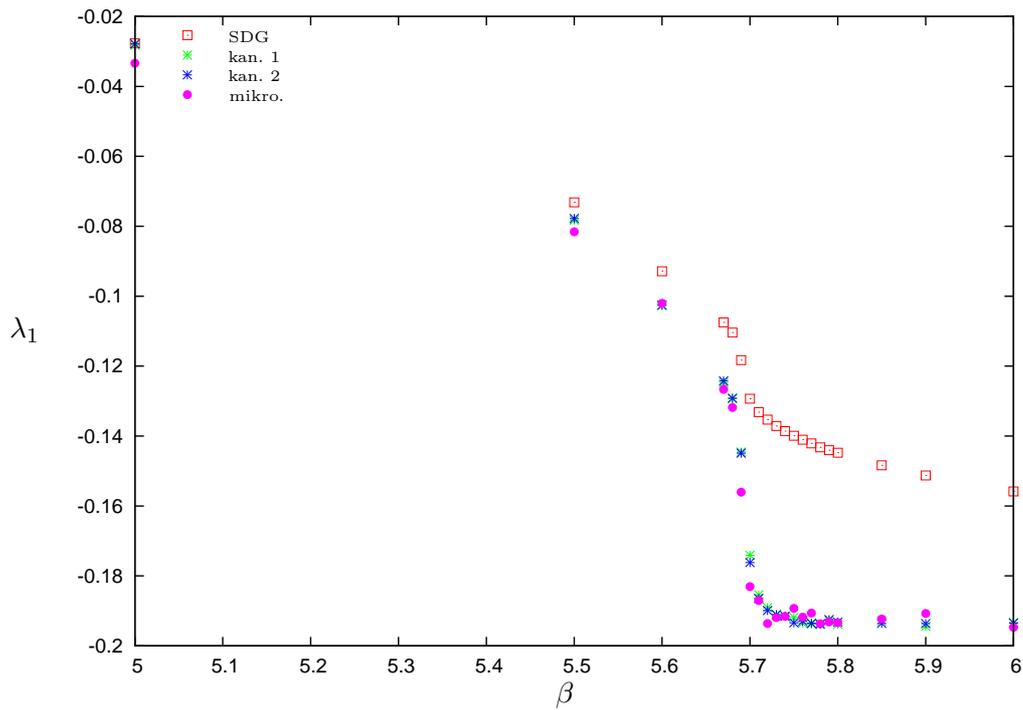


Abbildung 11.11: Vergleich der Kopplungen auf dem $16^3 \times 4$ -Gitter am Confinement-Deconfinement-Übergang

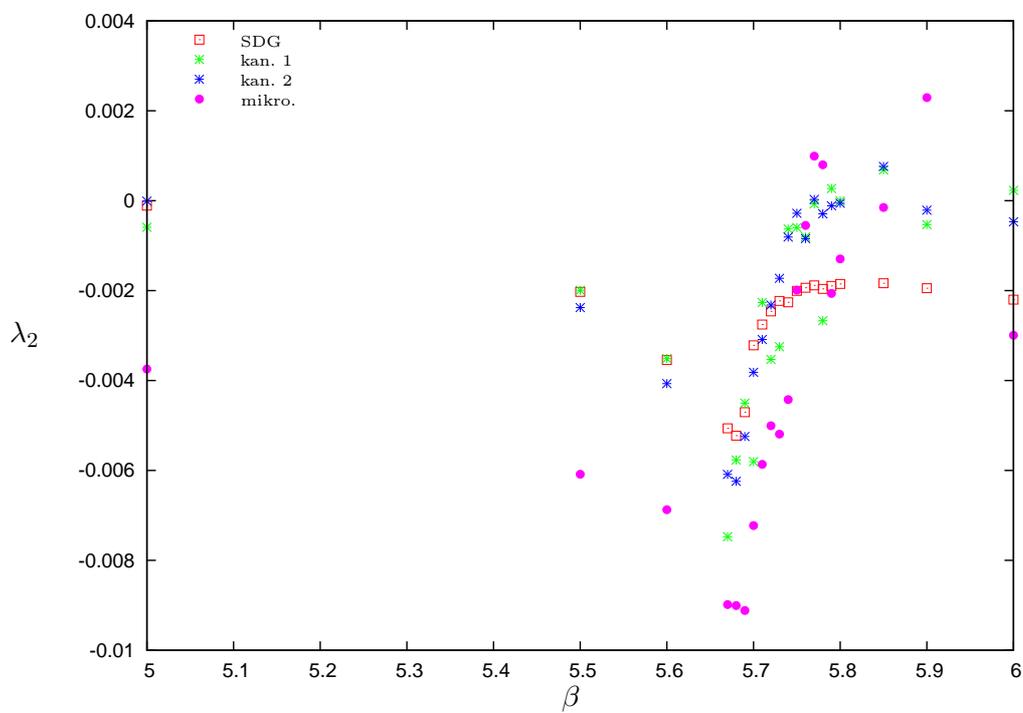


Abbildung 11.12: Vergleich der Kopplungen auf dem $16^3 \times 4$ -Gitter am Confinement-Deconfinement-Übergang

11 Vergleich von SDG- und Dämonmethode

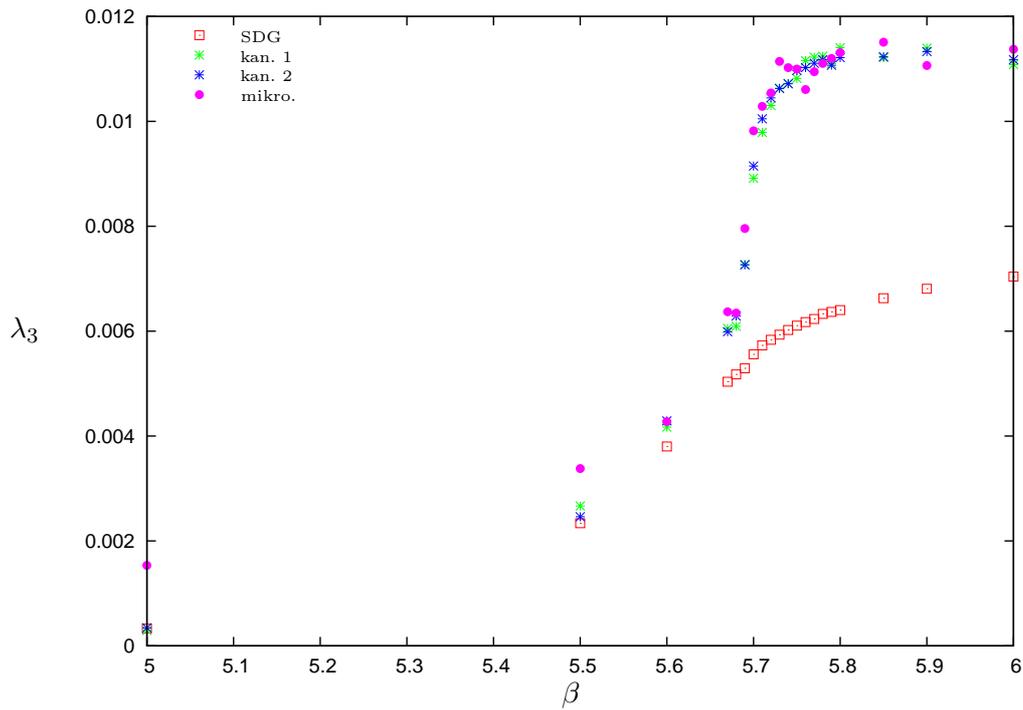


Abbildung 11.13: Vergleich der Kopplungen auf dem $16^3 \times 4$ -Gitter am Confinement-Deconfinement-Übergang

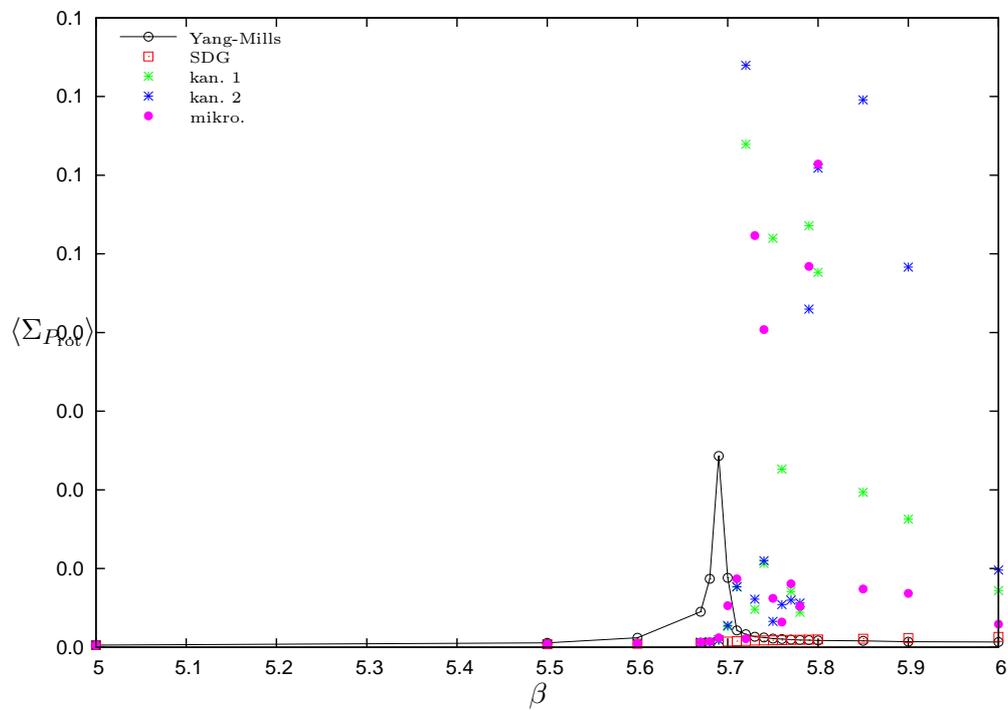


Abbildung 11.14: Vergleich der Suszeptibilität auf dem $16^3 \times 4$ -Gitter am Confinement-Deconfinement-Übergang

11.1.4 Polyakov-Loop-Histogramme

Zum Vergleich mit den Ergebnissen aus der Yang-Mills-Theorie werden in Abb. 11.15 auf Seite 115 Polyakov-Loop-Histogramme der effektiven Theorie auf dem $6^3 \times 2$ sowie dem $16^3 \times 4$ gezeigt. Auch hier ist zu sehen, dass der Übergang auf dem kleinen Gitter wesentlich stabiler reproduziert werden kann, während auf dem großen Gitter der Übergang in der effektiven Theorie zwar nur wenig zu großen Kopplungen β verschoben ist, dafür aber auch bei $\beta = 5.8$ immer noch eine Koexistenz der beiden Phasen vorliegt.

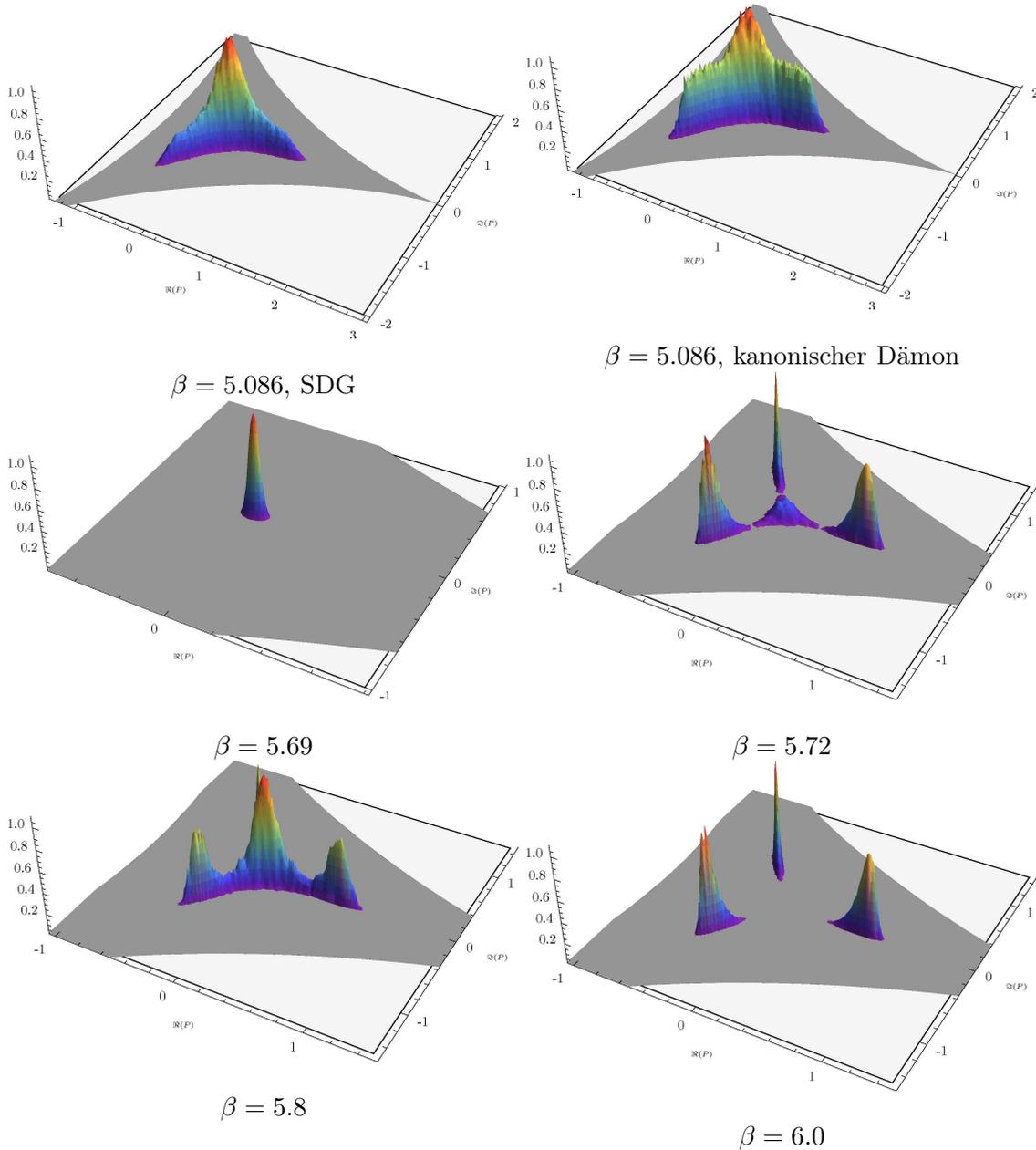


Abbildung 11.15: Polyakov-Loop Histogramme der effektiven Theorie am Confinement-Deconfinement-Übergang (oben: $6^3 \times 2$ -Gitter, mitte und unten: $16^3 \times 4$ -Gitter)

11.2 Die Antizentrumsphase

Nachdem gezeigt wurde, dass beide Methoden einen Confinement-Deconfinement-Übergang wiedergeben können, sollen sie jetzt auch auf den Zentrums-Antizentrumsübergang der erweiterten $SU(3)$ -Yang-Mills Theorie angewendet werden.

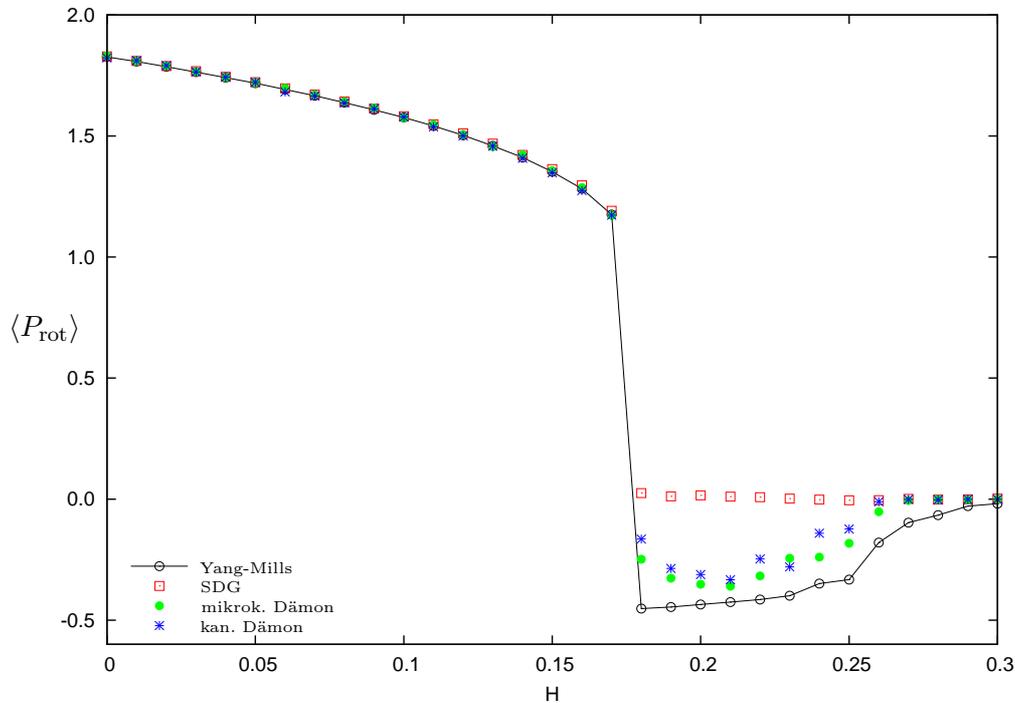


Abbildung 11.16: Vergleich *IMC* auf dem $12^3 \times 2$ -Gitter in der Antizentrumsphase

Wie in Abb. 11.16 zu sehen ist, können sowohl der kanonische als auch der mikrokanonische Dämon die Antizentrumsphase reproduzieren. Die Schwinger-Dyson-Gleichungen liefern hier jedoch ein komplett anderes Verhalten. Sie bringen die Theorie direkt in eine Confinement-Phase anstatt in eine Antizentrumsphase. Dieses Problem konnte auch durch die Hinzunahme von weiteren Termen der starken Kopplungsentwicklung sowie verschiedenen zentrumssymmetrischen Potentialtermen und übernächsten Nachbarwechselwirkungen nicht gelöst werden. Wie in den Abb. 11.17 bis 11.19 zu sehen ist, liefern die SDG insbesondere für den führenden Beitrag zur Wirkung im Vergleich zur Dämon-Methode stark abweichende Kopplungen. Trotz des nicht korrekt wiedergegebenen Polyakov-Loops sind die Ergebnisse dennoch stabiler als die der Dämon-Methode, die insbesondere in der Antizentrumsphase stark fluktuieren. In der Deconfinement-Phase zeigen alle Methoden hervorragende Ergebnisse in der Reproduktion des Polyakov-Loops. Einer der Gründe für das Versagen der SGD und die stark fluktuierenden Ergebnisse der Dämon-Methode ist, dass sich die effektive Theorie, auch wenn sich die Yang-Mills-Theorie tief in der Antizentrumsphase befindet, immer in der Nähe eines Phasenübergangs befindet. Dies wird deutlich wenn man die erhaltenen Kopplungen im Phasendiagramm der effektiven Theorie betrachtet (Abb 11.20). Gezeigt sind die Trajektorien der Kopplungen der effektiven Theorie für den kanonischen Dämon sowie die SDG bei $\beta = 6.05$ und $H = 0 \dots 0.3$. Zum Vergleich ist in Abb. 11.21 die Verteilung von Kopplungen aus dem mikrokanonischen Dämon bei $\beta = 6.05$ und $H = 0.2$ auf zufälligen Konfigurationen aus dem Yang-Mills-Ensemble gezeigt. Die Kopplungen liegen hier sowohl in der symmetrischen Phase als auch

in der Antizentrums- und Deconfinement-Phase.

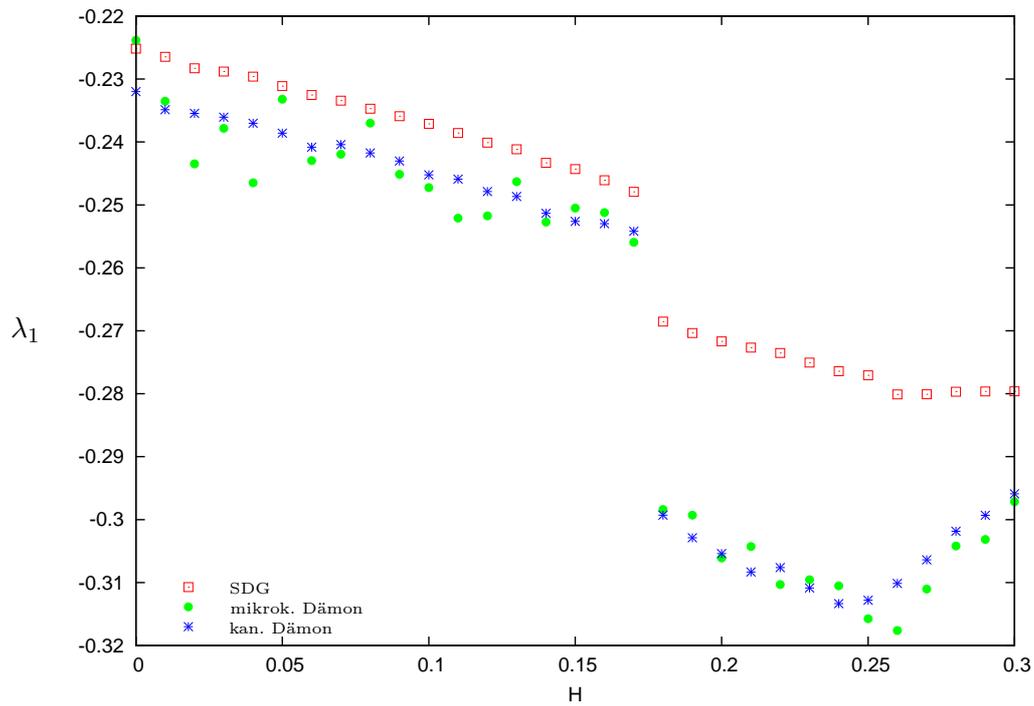


Abbildung 11.17: Vergleich der Kopplungen auf dem $12^3 \times 2$ -Gitter am Antizentrums-Übergang

11 Vergleich von SDG- und Dämonmethode

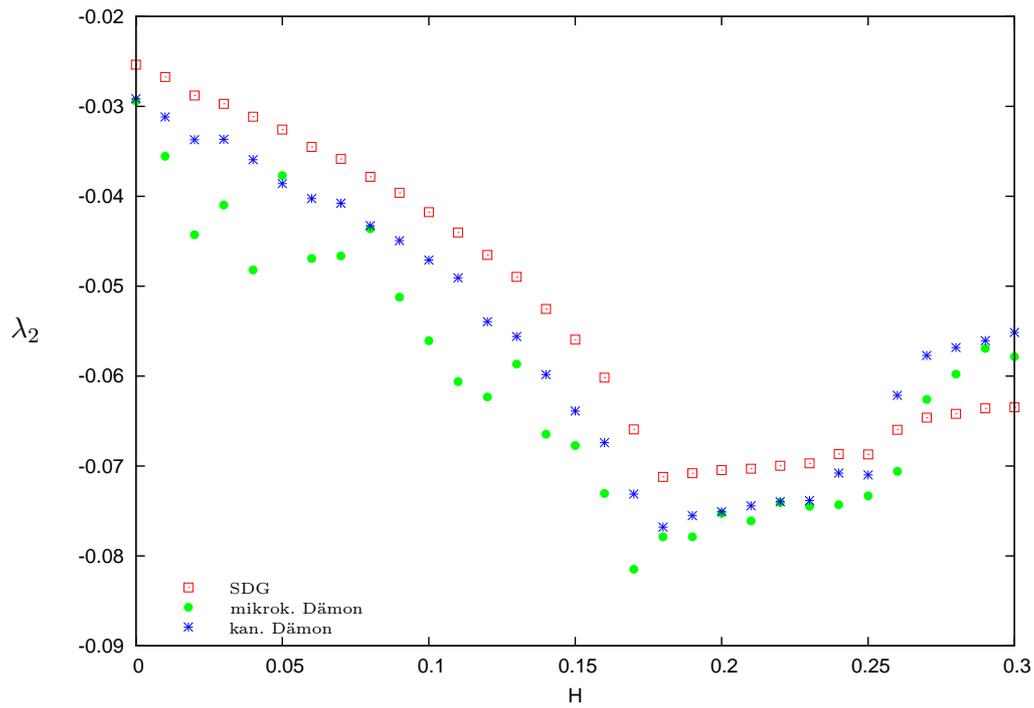


Abbildung 11.18: Vergleich der Kopplungen auf dem $12^3 \times 2$ -Gitter am Antizentrumsübergang

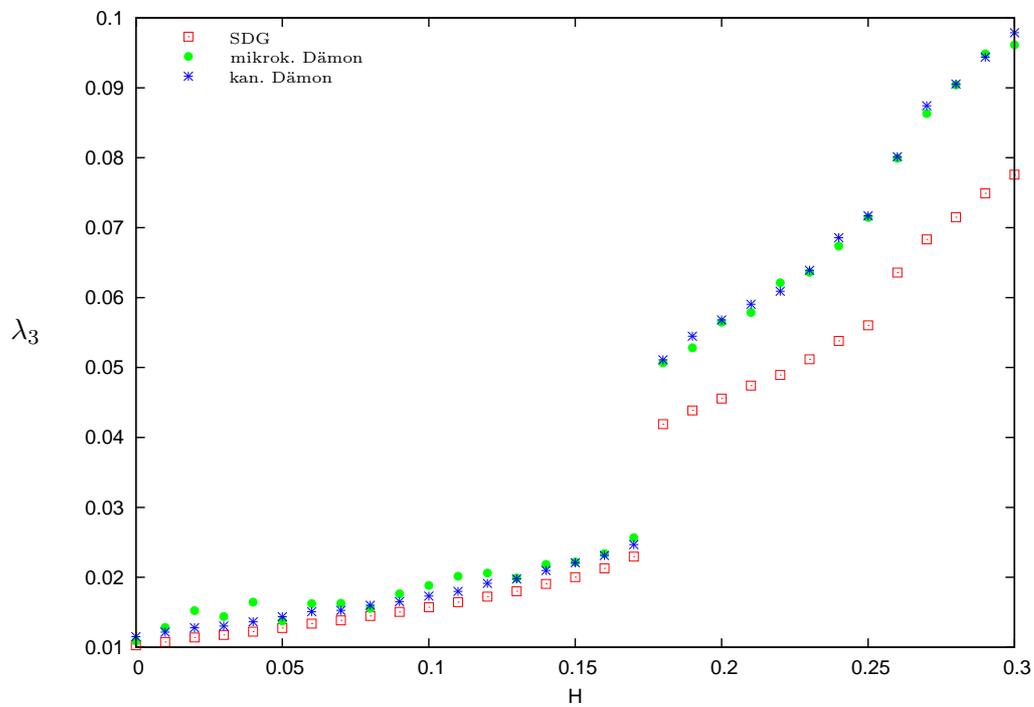


Abbildung 11.19: Vergleich der Kopplungen auf dem $12^3 \times 2$ -Gitter am Antizentrumsübergang

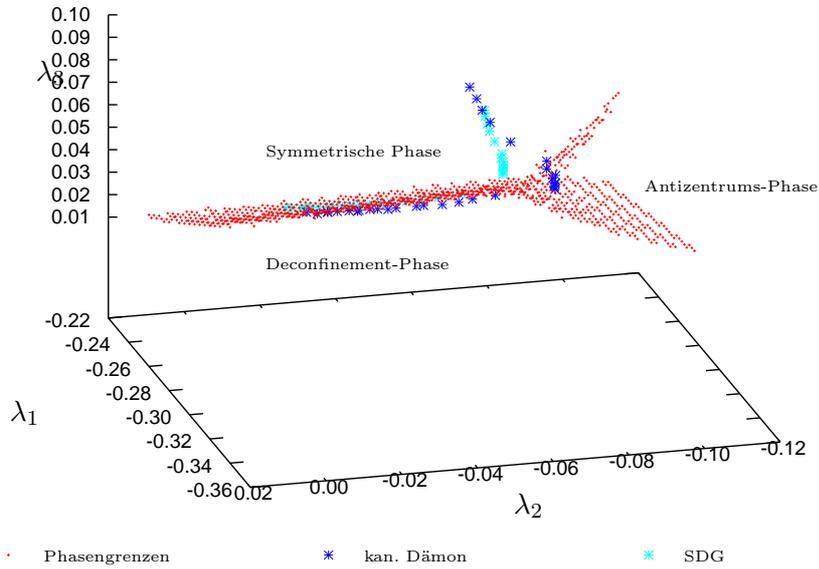


Abbildung 11.20: Vergleich der Kopplungen von SDG und kanonischem Dämon bei $\beta = 6.05$

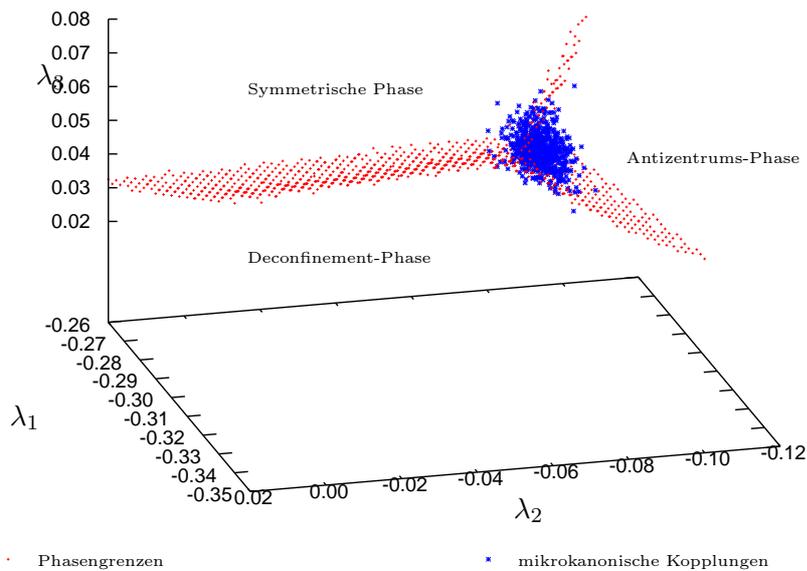


Abbildung 11.21: mikrokanonische Kopplungen für $\beta = 6.05$ und $H = 0.2$

11.2.1 nicht-zentrumsinvariante Wirkungen

Mit einer zentrumssymmetrischen Wirkung war es nicht möglich mit Schwinger-Dyson-Gleichungen die Antizentrumsphase zu reproduzieren. Wie im Abschnitt zuvor angesprochen befindet sich die effektive Theorie immer in der Nähe eines Phasenübergangs, auch wenn die Yang-Mills-Theorie sich tief in der Antizentrumsphase befindet. Dies sieht anders aus, wenn man nicht-zentrumsinvariante Wirkungen betrachtet.

$$\begin{aligned}
 S_{\text{eff}} = & \lambda_1 \sum_{\langle x,y \rangle} (\chi_{(1,0)}(\mathcal{P}_x)\chi_{(0,1)}(\mathcal{P}_y) + c.c.) + \lambda_2 \sum_{\langle x,y \rangle} (\chi_{(2,0)}(\mathcal{P}_x)\chi_{(0,2)}(\mathcal{P}_y) + c.c.) \\
 & + \lambda_3 \sum_{\langle x,y \rangle} (\chi_{(1,0)}(\mathcal{P}_x)\chi_{(0,1)}(\mathcal{P}_y) + c.c.)^2 + \lambda_4 \sum_{\langle x,y \rangle} (\chi_{(1,1)}(\mathcal{P}_x)\chi_{(1,1)}(\mathcal{P}_y) + c.c.) \\
 & + \lambda_5 \sum_x \Re \chi_{(1,0)}(\mathcal{P}_x)
 \end{aligned} \tag{11.1}$$

Durch den Term $\sum_x \Re \chi_{(1,0)}(\mathcal{P}_x)$ wird ein Potential addiert, welches das Phasendiagramm so verschiebt, dass die erhaltenen Kopplungen durch Schwinger-Dyson-Gleichungen jetzt auch in der effektiven Theorie in einer Antizentrumsphase liegen. Die übrigen Terme entsprechen der starken Kopplungsentwicklung bis zur 2. Ordnung. Der Term in der adjungierten Darstellung ist hier notwendig, es handelt sich also um ein minimales Modell (im Sinne der starken Kopplungsentwicklung) zur Reproduktion der Antizentrumsphase mit Schwinger-Dyson-Gleichungen. Die Simulationsergebnisse sind in Abb. 11.22 zu sehen.

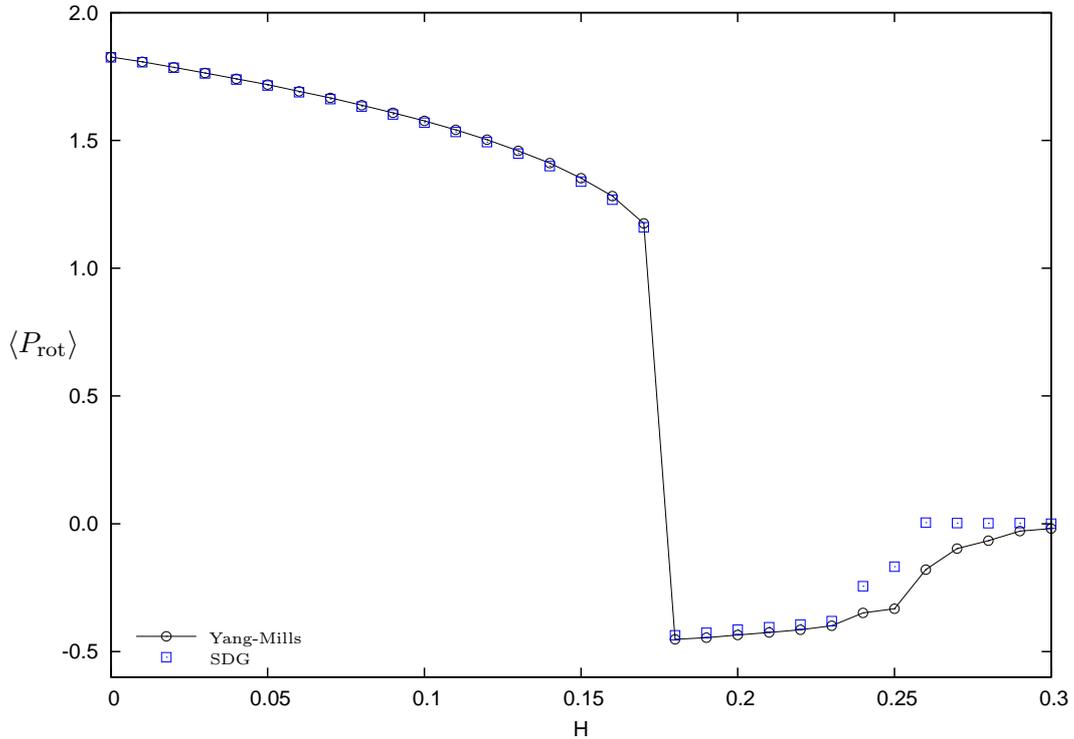


Abbildung 11.22: SDG auf dem $12^3 \times 2$ -Gitter in der Antizentrumsphase mit nichtzentrumssymmetrischer Wirkung

Mit diesem Modell liefern also auch die Schwinger-Dyson-Gleichungen eine effektive Theorie für die Antizentrumsphase der erweiterten Yang-Mills-Theorie. Dieses Modell wird

jedoch nicht weiter betrachtet, weil die Zentrumssymmetrie in der Wirkung bereits explizit gebrochen wird und es deshalb nicht helfen kann, Confinement und spontane Symmetriebrechung der Zentrumssymmetrie zu beschreiben. Versuche *ähnliche* Potentialterme, die jedoch invariant unter Zentrumstransformationen sind (wie z.B. $\left(\chi_{(1,0)}^3\right)^{\frac{1}{3}}$) zu addieren lieferten nicht die gewünschten Resultate. Damit muss es in dieser Arbeit eine offene Frage bleiben, ob die SDG mit einer anderen zentrumssymmetrischen Trunkierung der effektiven Wirkung (die nicht notwendigerweise aus der starken Kopplungsentwicklung folgen muss) nicht doch die Antizentrumsphase reproduzieren können.

11.2.2 Polyakov-Loop-Histogramme

Nun soll noch die Verteilung der Polyakov-Loops, berechnet durch die effektive Theorie, in der Antizentrumsphase bei $\beta = 6.05$ und $H = 0.2$ betrachtet werden. In Abb. 11.23 sind Polyakov-Loop-Histogramme, erhalten durch den kanonischen und den mikrokanonischen Dämon sowie die SDG, für das 3-Kopplungsmodell sowie Histogramme für die SDG mit der nichtzentrumssymmetrischen Wirkung dargestellt. Die besten Ergebnisse in Bezug auf die Verteilung in Yang-Mills liefert hier eindeutig die nicht-zentrumssymmetrische Wirkung mit den SDG. Beide Dämonmethoden liefern praktisch identische Ergebnisse in der Antizentrumsphase. In den Histogrammen der SDG mit zentrumssymmetrischen Wirkungen ist kein Anzeichen einer Antizentrumsphase zu erkennen.

Damit sind die Untersuchungen von effektiven Modellen für $SU(3)$ -Eichtheorien in dieser Arbeit abgeschlossen.

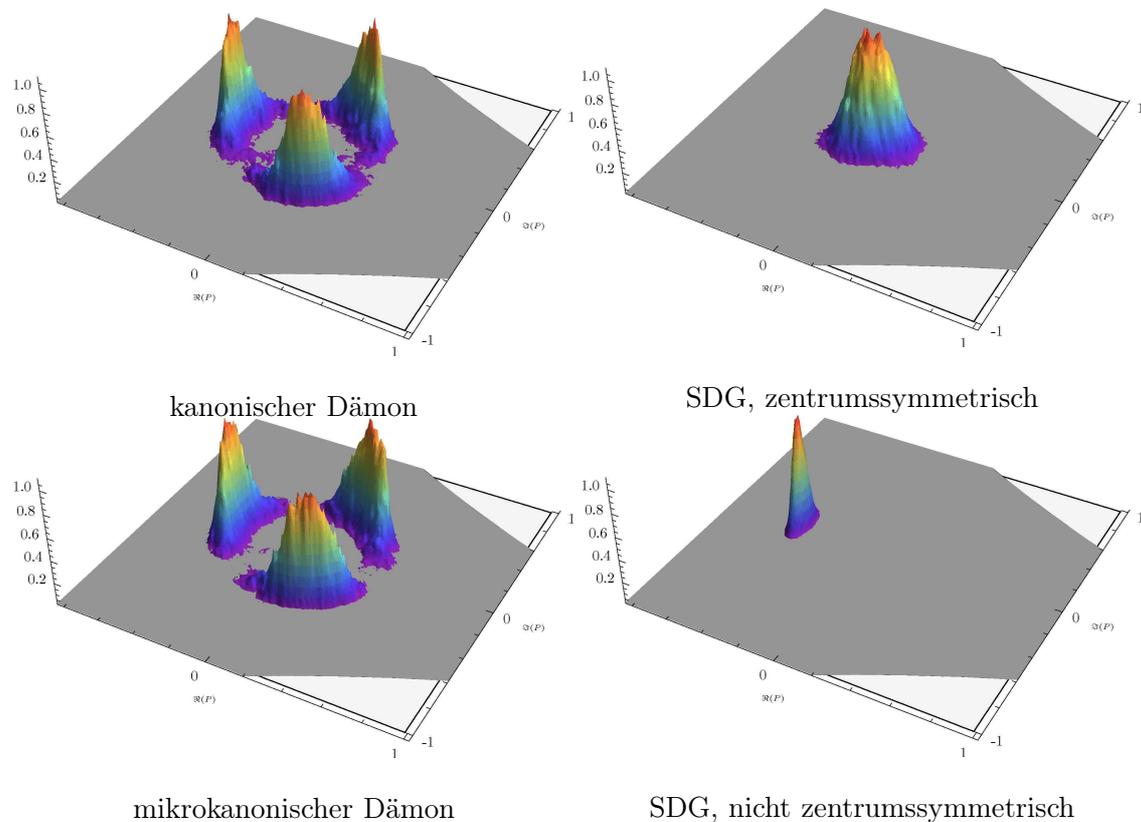


Abbildung 11.23: Polyakov-Loop Histogramme der effektiven Theorie in der Antizentrumsphase bei $\beta = 6.05$ und $H = 0.2$

11.3 $SU(N)$ -Yang-Mills

Zum Schluß soll hier noch ein Ausblick auf $SU(N)$ -Yang-Mills gegeben werden. Dazu wird der Deconfinement-Phasenübergang von $SU(4)$ -Yang-Mills betrachtet.

11.3.1 Effektive Wirkungen

Die effektive Wirkung folgt aus einer Trunkierung der starken Kopplungsentwicklung, die die erste Ordnung der Entwicklung und Terme aus der zweiten Ordnung enthält. Es wurde wieder ein minimaler Ansatz gewählt.

$$\begin{aligned}
 S_{\text{eff}} = & \lambda_1 \sum_{\langle x,y \rangle} (\chi_{(1,0,0)}(\mathcal{P}_x)\chi_{(0,0,1)}(\mathcal{P}_y) + c.c.) + \lambda_2 \sum_{\langle x,y \rangle} (\chi_{(0,1,0)}(\mathcal{P}_x)\chi_{(0,1,0)}(\mathcal{P}_y) + c.c.) \\
 & + \lambda_3 \sum_{\langle x,y \rangle} (\chi_{(2,0,0)}(\mathcal{P}_x)\chi_{(0,0,2)}(\mathcal{P}_y) + c.c.) + \lambda_3 \sum_{\langle x,y \rangle} (\chi_{(1,0,0)}(\mathcal{P}_x)\chi_{(0,0,1)}(\mathcal{P}_y) + c.c.)^2
 \end{aligned}
 \tag{11.2}$$

11.3.2 $SU(4)$ -Phasenübergang

Die $SU(4)$ -Yang-Mills-Theorie wurde auf einem $6^3 \times 2$ -Gitter mit einer Statistik von 100000 Konfigurationen simuliert und Kopplungen der effektiven Theorie mit dem kanonischen Dämon berechnet. Es ist zu sehen (Abb. 11.24), dass der Phasenübergang der vollen Theorie stabil wiedergegeben werden kann. Dies ist auch in den Histogrammen des Polyakov-Loops über dem Fundamentalebene (Abb. 11.25) sichtbar.

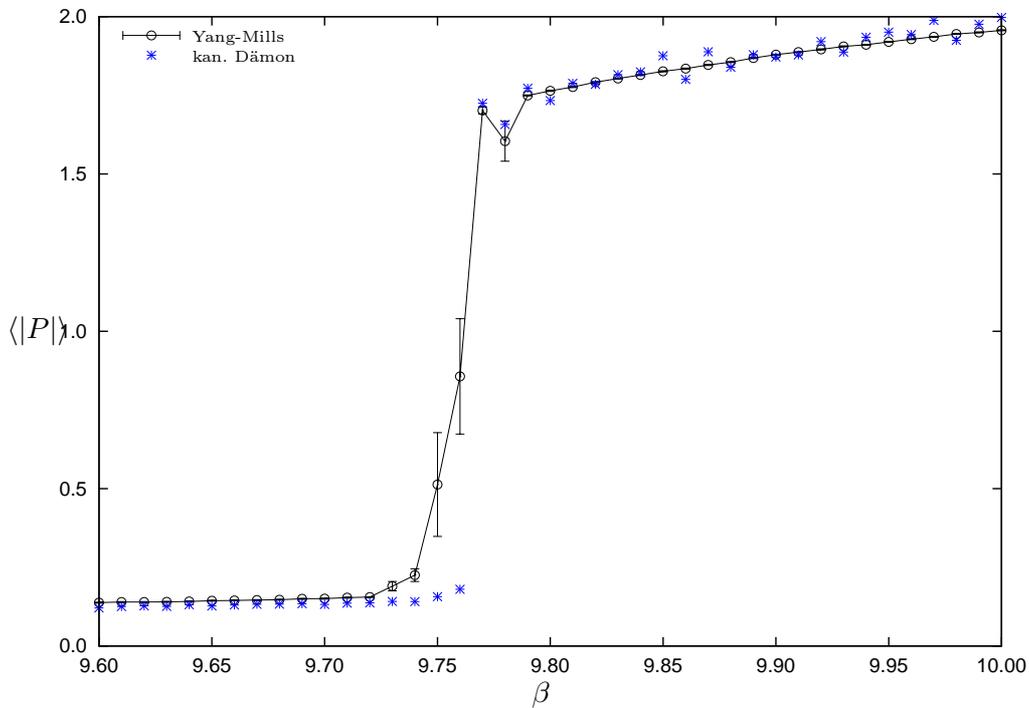


Abbildung 11.24: $SU(4)$ Confinement-Deconfinement-Übergang

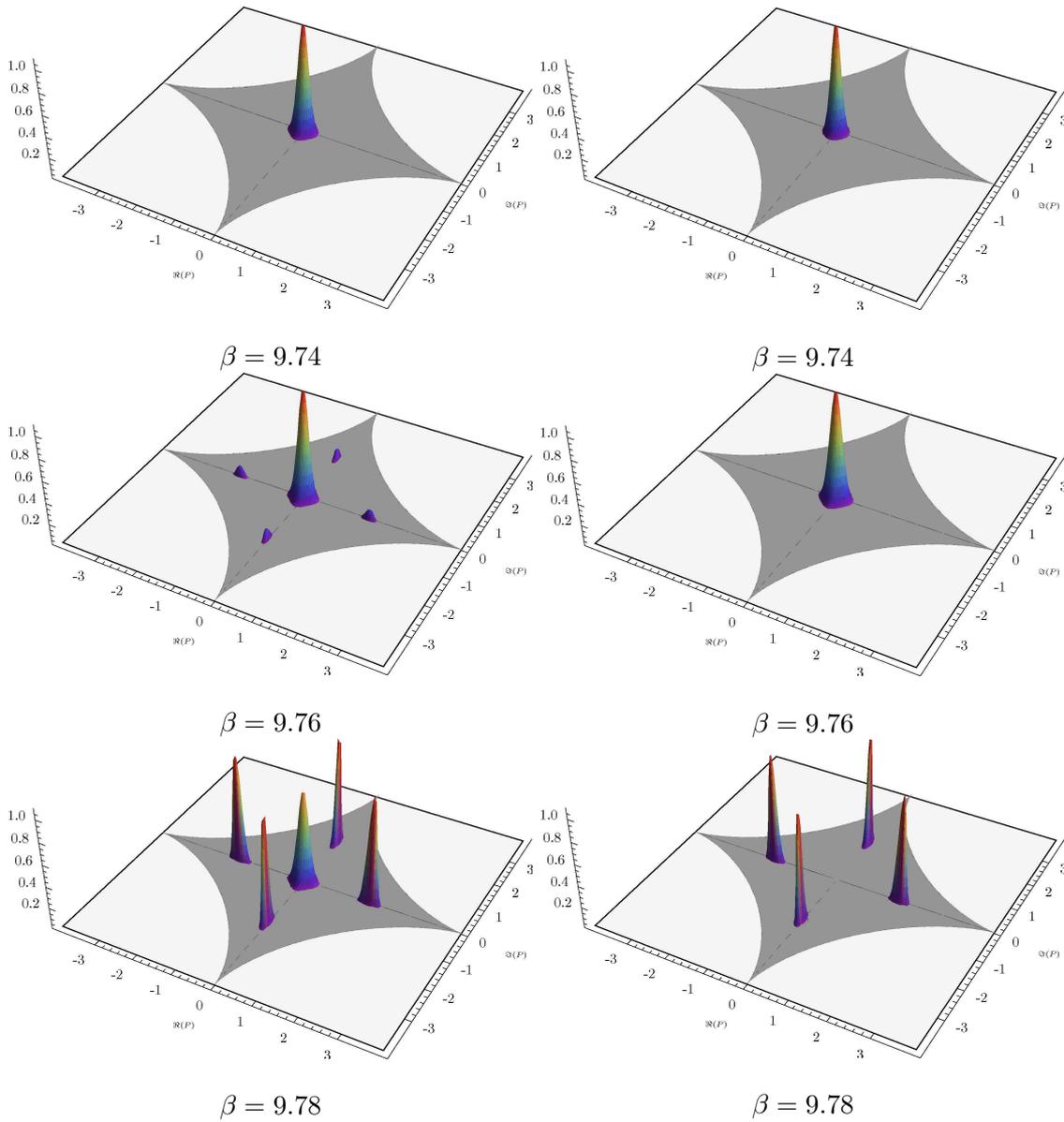


Abbildung 11.25: Polyakov-Loop Histogramme der $SU(4)$ -Yang-Mills-Theorie (links) und der effektiven Theorie (rechts) am Confinement-Deconfinement-Übergang

11.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden *inverse Monte-Carlo-Methoden* auf Confinement-Deconfinement-Übergänge in $SU(3)$ - und $SU(4)$ -Yang-Mills-Theorie sowie auf die Antizentrumsphase der um einen Potentialterm erweiterten $SU(3)$ -Yang-Mills-Theorie angewendet. Es wurden dabei verschiedene Gittergrößen betrachtet. Für die in dieser Arbeit gewählte Trunkierung der effektiven Wirkung haben Simulationen ergeben, dass der mikrokanonische sowie der kanonische Dämon den Schwinger-Dyson-Gleichungen in der Reproduktion des Polyakov-Loops am Confinement-Deconfinement-Übergang, insbesondere in der Bestimmung des kritischen Punktes des Phasenübergangs, überlegen sind. Mit zunehmender Gittergröße bleibt die Dämon-Methode nahezu gleich gut, während die Schwinger-Dyson-Gleichungen, in Übereinstimmung mit den Ergebnissen von [49], keine stabilen Ergebnisse mehr liefern. Ein Nachteil der Dämon-Methode gegenüber den Schwinger-Dyson-Gleichungen ist der wesentlich größere Zeitaufwand in der Bestimmung der Kopplungen, da mit zunehmender Gittergröße die Kopplungen immer genauer bestimmt werden müssen und damit eine immer höhere mikrokanonische Statistik erforderlich ist.

Für den Deconfinement-Antizentrums-Übergang hat sich ergeben, dass die Schwinger-Dyson-Gleichungen die Antizentrumsphase nicht reproduzieren können, während die Dämon-Methoden Polyakov-Loop-Werte im Antizentrum liefern. In der gewählten Trunkierung befindet sich die effektive Theorie in der Antizentrumsphase immer in der Nähe eines Phasenübergangs, was die Bestimmung der Kopplungen erheblich erschwert und die starken Fluktuationen der Dämon-Methoden in dieser Phase erklärt. Tief in der Deconfinement-Phase liefern sowohl Schwinger-Dyson-Gleichungen als auch Dämon-Methoden stabile Ergebnisse. Weiter hat sich gezeigt, dass der kanonische Dämon mit einer geeigneten Trunkierung der effektiven Wirkung auch den Confinement-Deconfinement-Übergang in $SU(4)$ -Yang-Mills reproduzieren kann.

Nachdem nun verstanden wurde, wie Dämon-Methoden in der $SU(N)$ -Yang-Mills-Theorie anzuwenden sind, soll im weiteren Verlauf der Arbeit zu einer anderen Eichgruppe, der exceptionellen Lie-Gruppe G_2 übergegangen werden. Hier soll auch gezeigt werden, dass *IMC*-Methoden anwendbar sind zur Bestimmung von Kopplungen in einer effektiven Wirkung.

12 Yang-Mills-Theorie mit Eichgruppe G_2

Als ein weiteres Modell einer Eichtheorie soll in diesem Kapitel die Yang-Mills-Theorie mit Eichgruppe G_2 untersucht werden. Motivationen für das Betrachten dieser Eichgruppe liegen in Zusammenhängen zwischen G_2 -Yang-Mills, $SU(3)$ -Yang-Mills und QCD. In den letzten Kapiteln wurde immer wieder der Zusammenhang zwischen Zentrumssymmetrie und Confinement deutlich. Da die Gruppe G_2 ein triviales Zentrum hat, aber trotzdem eine Art von Farb-Confinement besitzt, bietet diese Eichtheorie eine weitere Möglichkeit, ein Verständnis für Confinement-Mechanismen zu entwickeln. Zunächst werden jetzt anhand von gruppentheoretischen Überlegungen die grundlegenden Eigenschaften von G_2 -Eichtheorie zusammengestellt, um dann im Anschluss diese Fakten mit Hilfe von Monte-Carlo-Simulationen zu bestätigen. Ziel soll es dann sein, auch für G_2 -Yang-Mills eine effektive Wirkung zu finden, die eine Anpassung der Theorie mit Hilfe von inversen Monte-Carlo-Methoden erlaubt.

12.1 Theorie

12.1.1 Confinement in G_2 -Eichtheorie

In diesem Abschnitt soll mit Hilfe von gruppentheoretischen Überlegungen gezeigt werden, was die Unterschiede zwischen Confinement in G_2 -Eichtheorie und $SU(3)$ -Eichtheorie sind (nach einer Arbeit von [30]). Dazu wird zunächst noch einmal kurz zusammengefasst, wie sich Confinement in $SU(3)$ darstellt. Die Quarks in $SU(3)$ transformieren unter der fundamentalen 3-dimensionalen Darstellung. Farbe kann nur durch Teilchen abgeschirmt werden, die in Darstellungen mit N-ality ungleich Null transformieren, also insbesondere nicht durch Gluonen. In einer Confinement-Phase von $SU(3)$ kann also der Flussschlauch zwischen zwei statischen Testquarks nicht reißen und das statische Quark-Antiquark-Potential wächst linear mit dem Abstand zwischen den Quarks, womit die freie Energie eines einzelnen Quarks also gegen unendlich geht und damit der Polyakov-Loop gegen Null. Der Polyakov-Loop ist somit auf der einen Seite ein Ordnungsparameter für einen Confinement-Deconfinement-Phasenübergang und andererseits aufgrund der Zentrumssymmetrie auch ein Ordnungsparameter für einen Übergang von einer symmetrischen Phase in eine Zentrumsphase. Wie sieht dieses Bild nun in G_2 -Eichtheorie aus? Dazu werden zunächst Tensorprodukte und ihre Zerlegung nach irreduziblen Darstellungen betrachtet:

$$(7) \otimes (7) = (1) \oplus (7) \oplus (14) \oplus (27) \quad (12.1)$$

$$(7) \otimes (7) \otimes (7) = (1) \oplus 4 \cdot (7) \oplus 2 \cdot (14) \oplus 3 \cdot (27) \oplus 2 \cdot (64) \oplus (77) \quad (12.2)$$

$$(14) \otimes (14) = (1) \oplus (14) \oplus (27) \oplus (77) \oplus (77') \quad (12.3)$$

$$(14) \otimes (14) \otimes (14) = (1) \oplus (7) \oplus 5 \cdot (14) \oplus 3 \cdot (27) \oplus 2 \cdot (64) \\ \oplus 4 \cdot (77) \oplus 3 \cdot (77') \oplus (182) \oplus 3 \cdot (189) \oplus (273) \oplus 2 \cdot (448) \quad (12.4)$$

$$(7) \otimes (14) = (7) \oplus (27) \oplus (64) \quad (12.5)$$

Die G_2 -Quarks, im folgenden einfach Quarks genannt, transformieren in der 7 - dimensionalen Darstellung, G_2 -Gluonen, Gluonen genannt, in der 14-dimensionalen adjungierten

Darstellung. Da alle Darstellungen von G_2 reell sind, gibt es keinen Unterschied zwischen Teilchen und Antiteilchen. Genauso wie für $SU(3)$ bilden zwei Quarks (Quark und Antiquark in $SU(3)$) einen farbneutralen Zustand (Farbsingulett (1), ein Meson) wie in Gl. (12.1) zu sehen ist. Ebenso bilden drei Quarks ein farbneutrales Baryon (Gl. 12.2).

Da das Zentrum von G_2 trivial ist, existiert das Konzept der N-ality zur Charakterisierung von Darstellungen nicht mehr. Dies hat insbesondere zur Folge, dass die Farbladung eines Quarks auch durch drei dynamisch erzeugte Gluonen abgeschirmt werden kann, es existieren also farbneutrale Bindungszustände aus Quarks und Gluonen, was in den Tensorprodukten daran ersichtlich ist, dass die rechte Seite von Gl. (12.4) eine (7)-Darstellung enthält. Daraus ergibt sich

$$(7) \otimes (14) \otimes (14) \otimes (14) = (1) \oplus \dots \quad (12.6)$$

Dies bedeutet, dass auch in einer Confinement-Phase der reinen Eichtheorie der Fluss-schlauch zwischen zwei Quarks aufgrund der dynamischen Erzeugung von Gluonen reißt und damit der Polyakov-Loop auch in der Confinement-Phase der Theorie einen Wert verschieden von Null annimmt. Damit ist der Polyakov-Loop kein Ordnungsparameter mehr für einen Confinement-Deconfinement-Phasenübergang. Dies zeigt auch, dass die Definitionen von Confinement in $SU(3)$ und in G_2 nicht dieselben sein können. In $SU(3)$ ist Confinement verbunden mit der Existenz einer von Null verschiedenen asymptotischen String-Tension. Diese ist in G_2 jedoch immer identisch Null. Confinement in G_2 bedeutet deshalb immer die Abwesenheit von freien Farbladungen im physikalischen Spektrum der Theorie. Aufgrund der fehlenden Zentrumssymmetrie lassen sich auch keine Aussagen über die Art eines Confinement-Deconfinement-Übergangs machen. In [30] wird vermutet, dass es sich entweder um einen Crossover oder einen schwachen 1. Ordnungsübergang handelt.

12.1.2 Darstellungen von G_2 unter $SU(3)$ -Transformationen

Schränkt man die G_2 -Eichgruppe auf ihre $SU(3)$ -Untergruppe ein, kann man die fundamentalen Darstellungen nach irreduziblen Darstellungen der Untergruppe zerlegen. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} (7) &= (3) \oplus (\bar{3}) \oplus (1) \\ (14) &= (8) \oplus (3) \oplus (\bar{3}) \end{aligned} \quad (12.7)$$

Ein G_2 -Quark zerfällt also in ein $SU(3)$ -Quark, ein $SU(3)$ -Antiquark und ein Farbsingulett, die Gluonen in die normalen $SU(3)$ -Gluonen in der (8)-Darstellung plus 6 weitere Eichbosonen in (3)- und ($\bar{3}$)-Darstellungen, die damit dieselbe Farbquantenzahl wie $SU(3)$ -Quark und Antiquark besitzen. Dadurch erhält man ähnliche Effekte wie in der QCD, in der der Fluss-schlauch zwischen Testquarks durch die Erzeugung von leichten dynamischen Quark-Antiquark-Paaren aus dem Vakuum reißt. Dieser Aspekt wird jedoch später in dieser Arbeit mit Hilfe eines Eich-Higgs-Modells näher untersucht. Nun wird noch gezeigt, wie sich die Charaktere in den fundamentalen Darstellungen unter $Z(3)$ -Zentrumstransformationen in der $SU(3)$ Untergruppe verhalten. Dazu wird eine beliebige Matrix $\Omega \in G_2$ geschrieben als

$$\Omega = \mathcal{S} \cdot \mathcal{U} \quad (12.8)$$

mit

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} U & 0 & 0 \\ 0 & U^* & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S} = \begin{pmatrix} C & D^* & K \\ D & C^* & K^* \\ -K^\dagger & -K^T & d \end{pmatrix} \quad (12.9)$$

In diesen Betrachtungen wird von einer komplexen Darstellung der G_2 ausgegangen, die Charaktere sind aber weiterhin reell. Zentrumsэлеmente \mathcal{Z} von $SU(3)$ haben die Form

$$\mathcal{Z} = \begin{pmatrix} z\mathbb{1}_3 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{z}\mathbb{1}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad z = \exp\left(i\frac{2\pi k}{3}\right), k = 0, 1, 2 \quad (12.10)$$

Damit ergibt sich in der (7)-Darstellung

$$\begin{aligned} \chi_7 &= \text{tr}(\mathcal{S}\mathcal{U}\mathcal{Z}) = \text{tr}\left(\begin{pmatrix} C & D^* & K \\ D & C^* & K^* \\ -K^\dagger & -K^T & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} zU & 0 & 0 \\ 0 & \bar{z}U^* & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \text{tr}(CzU) + \text{tr}(C^*\bar{z}U^*) + d = z \text{tr}(CU) + \bar{z} \text{tr}(C^*U^*) + d \\ &= \Re\{2z \text{tr}(CU) + d\} \end{aligned} \quad (12.11)$$

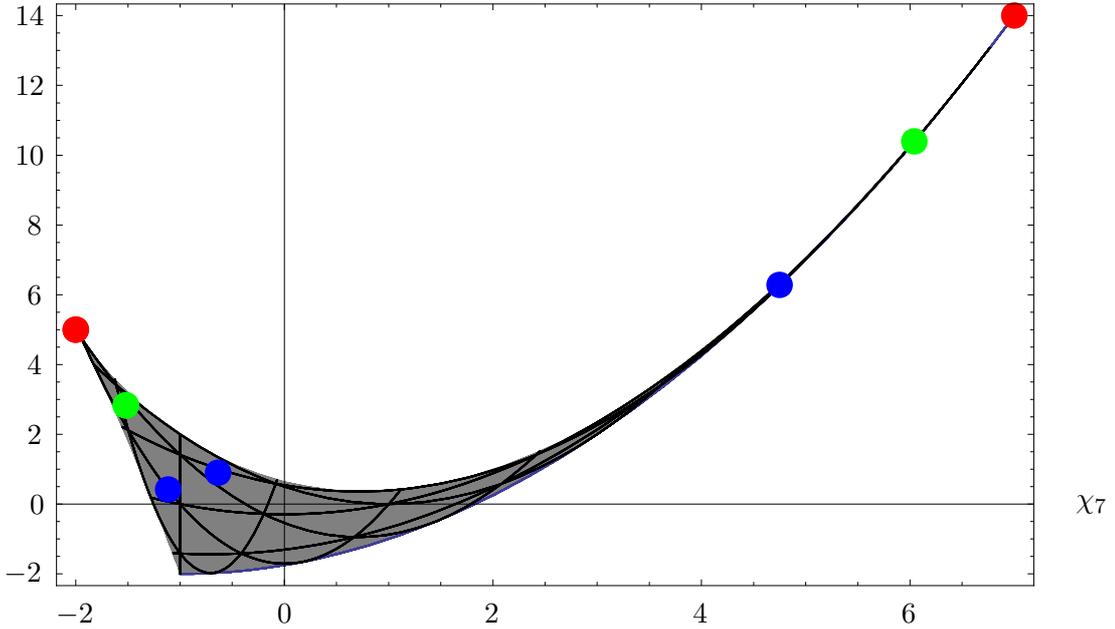
und in der adjungierten Darstellung

$$\begin{aligned} \chi_{14} &= \sum_{a=1}^{14} \text{tr}\left(T_a \mathcal{S}\mathcal{U}\mathcal{Z}T_a \mathcal{Z}^\dagger \mathcal{U}^\dagger \mathcal{S}^\dagger\right) \\ &= \underbrace{\sum_{a=1}^8 \text{tr}\left(T_a \mathcal{S}\mathcal{U}T_a \mathcal{U}^\dagger \mathcal{S}^\dagger\right)}_{\chi_8} + \sum_{a=9}^{14} \text{tr}\left(T_a \mathcal{S}\mathcal{U}\mathcal{Z}T_a \mathcal{Z}^\dagger \mathcal{U}^\dagger \mathcal{S}^\dagger\right) \end{aligned} \quad (12.12)$$

Interessant ist hier der Fall mit $\mathcal{S}\mathcal{U} = \mathbb{1}_7$, weil er einem Polyakov-Loop in der voll ausgerichteten Deconfinement-Phase entspricht. Es ergibt sich ($z = \exp(i\frac{2\pi}{3})$)

$$\chi = (7, 14), \quad {}^z\chi = (-2, 5), \quad {}^{\bar{z}}\chi = (-2, 5) \quad (12.13)$$

Beide Transformationen z und \bar{z} bilden das e -Element also auf denselben Punkt ab. Dies ist allgemein der Fall für $\mathcal{S} = \mathbb{1}_7$ und $U \in SU(3)$ mit $\text{tr}U \in \mathbb{R}$, was sich auch aus Gl. (12.7) ergibt. Für beliebige Gruppenelemente ist dies jedoch nicht der Fall, wie in Abb. 12.1 zu sehen ist.

χ_{14}

 Abbildung 12.1: Z_3 -Zentrumstransformationen im Fundamentalbereich von G_2

12.2 Ein Algorithmus zur Simulation von Eichtheorien

Um G_2 -Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter numerisch untersuchen zu können ist ein Monte-Carlo-Update-Algorithmus erforderlich, der Verteilungen nach Haarmaß \times Boltzmannfaktor erzeugt. Für $SU(N)$ konnte von Cabibbo und Marinari [52] aufgrund der Struktur der Eichgruppe ein Wärmebad-Algorithmus konstruiert werden, der in dieser Arbeit benutzt wurde. Für die Eichgruppe G_2 ist dieser Algorithmus jedoch nicht anwendbar, da er spezielle Eigenschaften der Gruppe $SU(N)$ benutzt. Es existiert zwar eine Modifikation dieses Algorithmus für G_2 [45], jedoch soll hier ein Algorithmus konstruiert werden, der für verschiedene Eichgruppen universell anwendbar ist. Ein Ansatzpunkt hierfür ist der in [61, 62, 63] beschriebene Hybrid-Monte-Carlo Algorithmus, der hier an die Gruppenstruktur der Theorie angepasst wird. Dazu müssen zunächst geeignete Freiheitsgrade der Theorie gefunden werden. Jede Matrix $\mathcal{U} \in G$ lässt sich schreiben als

$$\mathcal{U}(t) = \exp(i\mathfrak{A}(t)) = \exp\left(i\frac{1}{\sqrt{\gamma}}u_a(t)\mathfrak{T}^a\right) \quad (12.14)$$

mit $\mathfrak{A} \in \mathfrak{g}$ und \mathfrak{T}^a als den Generatoren der Algebra \mathfrak{g} . Die zeitabhängigen Freiheitsgrade sind also die Variablen $u_a(t)$. Damit lässt sich eine fiktive Hamiltonfunktion wie folgt aufschreiben

$$H[u, p] = \frac{1}{2} \sum_{x, \mu, a} p_{x, \mu, a}^2 + S_W[u_{x, \mu, a}] \quad (12.15)$$

Die Hamilton'schen kanonischen Gleichungen ergeben

$$\dot{u}_{x, \mu, a} = \frac{\partial H}{\partial p_{x, \mu, a}} = p_{x, \mu, a} \quad (12.16)$$

Ableiten von Gl. (12.14) ergibt

$$\dot{\mathcal{U}}(t) = i \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \dot{u}_a(t) \mathfrak{T}^a \mathcal{U}(t) = i \frac{1}{\sqrt{\gamma}} p_a(t) \mathfrak{T}^a \mathcal{U}(t) \quad (12.17)$$

Diese Differentialgleichung wird durch folgenden Ansatz erfüllt

$$\mathcal{U}(t) = \mathcal{T} \exp \left(\frac{i}{\sqrt{\gamma}} \int_{t_0}^t p_a(\tau) d\tau \mathfrak{T}^a \right) \mathcal{U}(t_0) \quad (12.18)$$

Das Symbol \mathcal{T} bedeutet hier das zeitgeordnete Produkt der Matrizen. Mit der Einführung von matrixwertigen Impulsen

$$\mathfrak{P}_{x,\mu} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} p_{x,\mu,a} \mathfrak{T}^a \quad (12.19)$$

lässt sich die Hamiltonfunktion auch schreiben als

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \sum_{x,\mu} \text{tr} \mathfrak{P}_{x,\mu}^2 + S_W[\mathcal{U}_{x,\mu}] \\ &= \text{tr} \left(\frac{1}{2} \sum_{x,\mu} \mathfrak{P}_{x,\mu}^2 + \underbrace{\frac{\beta}{2N_c} \sum_{x,\mu\nu} \{2N_c - \mathcal{U}_{x,\mu\nu} - \mathcal{U}_{x,\mu\nu}^\dagger\}}_S \right) \end{aligned} \quad (12.20)$$

Gleichung (12.17) ist eine erste Bewegungsgleichung des Systems. Eine Zweite ergibt sich direkt aus $\dot{H} = 0$

$$\begin{aligned} \dot{H} &= \sum_{x,\mu} \text{tr} \left\{ \mathfrak{P}_{x,\mu} \dot{\mathfrak{P}}_{x,\mu} + \dot{\mathcal{S}} \right\} \\ &= \sum_{x,\mu} \text{tr} \left\{ \mathfrak{P}_{x,\mu} \dot{\mathfrak{P}}_{x,\mu} - \frac{\beta}{2N_c} \left(\dot{\mathcal{U}}_{x,\mu} R_{x,\mu} + R_{x,\mu}^\dagger \dot{\mathcal{U}}_{x,\mu}^\dagger \right) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (12.21)$$

wobei $R_{x,\mu}$ die Summe der unvollständigen Plaketten ist, die den Link $\mathcal{U}_{x,\mu}$ enthalten (Staple). Mit (12.17) folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{x,\mu} \text{tr} \left\{ \mathfrak{P}_{x,\mu} \dot{\mathfrak{P}}_{x,\mu} - \frac{i\beta}{2N_c} \left(\mathfrak{P}_{x,\mu} \mathcal{U}_{x,\mu} R_{x,\mu} - R_{x,\mu}^\dagger \mathcal{U}_{x,\mu}^\dagger \mathfrak{P}_{x,\mu}^\dagger \right) \right\} \\ &= \sum_{x,\mu} \text{tr} \left\{ \mathfrak{P}_{x,\mu} \left[\dot{\mathfrak{P}}_{x,\mu} - \frac{i\beta}{2N_c} \left(\mathcal{U}_{x,\mu} R_{x,\mu} - R_{x,\mu}^\dagger \mathcal{U}_{x,\mu}^\dagger \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (12.22)$$

Eine mögliche Lösung dieser Gleichung ist das Verschwinden der eckigen Klammer. Als zusätzliche Freiheit hat man die Möglichkeit, eine Matrix $G_{x,\mu}$ zu addieren, für die gilt $\text{tr}(\mathfrak{P}_{x,\mu} G_{x,\mu}) = 0$. Damit ergibt sich das zu lösende Gleichungssystem zu

$$\dot{\mathcal{U}}_{x,\mu} = i \mathfrak{P}_{x,\mu} \mathcal{U}_{x,\mu} \quad (12.23)$$

$$\dot{\mathfrak{P}}_{x,\mu} = i \frac{\beta}{2N_c} \left(\mathcal{U}_{x,\mu} R_{x,\mu} - R_{x,\mu}^\dagger \mathcal{U}_{x,\mu}^\dagger \right) - G_{x,\mu} := F_{x,\mu} - G_{x,\mu} \quad (12.24)$$

$$0 = \text{tr}(\mathfrak{P}_{x,\mu} G_{x,\mu}) \quad (12.25)$$

Die Freiheit in Gleichung (12.24) ist notwendig, weil $\mathfrak{P}_{x,\mu} \in \mathfrak{g}$ in der Algebra der Gruppe liegt, aber $F_{x,\mu}$ im Allgemeinen nicht. Es kann jedoch immer ein $G_{x,\mu}$ gefunden werden, welches die Bedingung (12.25) erfüllt und dafür sorgt, dass $\mathfrak{P}_{x,\mu} \in \mathfrak{g}$, was durch folgende explizite Konstruktion gezeigt werden kann:

$$G_{x,\mu} = F_{x,\mu} - \frac{1}{\gamma} \operatorname{tr}(F_{x,\mu} \mathfrak{T}_a) \mathfrak{T}^a \quad (12.26)$$

Nachrechnen zeigt ($\mathfrak{P}_{x,\mu} = p_{x,\mu,a} \mathfrak{T}^a$)

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(\mathfrak{P}_{x,\mu} G_{x,\mu}) &= \operatorname{tr}(\mathfrak{P}_{x,\mu} F_{x,\mu}) - \frac{1}{\gamma} \operatorname{tr}(F_{x,\mu} \mathfrak{T}_a) \operatorname{tr}(p_{x,\mu,b} \mathfrak{T}^b \mathfrak{T}^a) \\ &= \operatorname{tr}(\mathfrak{P}_{x,\mu} F_{x,\mu}) - \frac{1}{\gamma} \operatorname{tr}(F_{x,\mu} \mathfrak{T}_a) p_{x,\mu,b} \gamma \delta^{ab} \\ &= \operatorname{tr}(\mathfrak{P}_{x,\mu} F_{x,\mu}) - \operatorname{tr}(F_{x,\mu} \underbrace{p_{x,\mu,b} \mathfrak{T}^b}_{\mathfrak{P}_{x,\mu}}) = 0 \end{aligned}$$

Mit dieser Wahl der Matrix $G_{x,\mu}$ liegt $\mathfrak{P}_{x,\mu}$ offensichtlich immer in der Algebra und damit bleiben auch die Impulse $\mathfrak{P}_{x,\mu}$ immer in \mathfrak{g} . Für die Algebra $\mathfrak{su}(N)$ genügt es $F_{x,\mu}$ spurfrei zu machen, also

$$G_{x,\mu} = \frac{\operatorname{tr} F_{x,\mu}}{N} \mathbb{1}$$

zu wählen.

Die Gleichungen (12.23) bis (12.25) sind die gesuchten Bewegungsgleichungen. Sie müssen im HMC-Algorithmus integriert werden, wobei die Impulse $p_{x,\mu,a}$ gaußverteilt initialisiert werden müssen. Integriert man die Bewegungsgleichungen global, so muss für jeden Link und für jeden Integrationsschritt der Stapel $R_{x,\mu}$ neu berechnet werden. Da dies aber sehr zeitintensiv ist, ist der HMC in dieser globalen Variante für Eichtheorien unpraktikabel. Durch eine Modifikation zu einem lokalen Update-Algorithmus kann dieser Nachteil jedoch umgangen werden.

Lokaler Hybrid-Monte-Carlo (IHMC)

Der lokale HMC (IHMC) stellt im Prinzip einen verbesserten Metropolis-Algorithmus dar. Die Bewegungsgleichungen werden nicht simultan für alle dynamischen Variablen gelöst, sondern nur lokal für eine Variable. Der Pseudocode sieht wie folgt aus:

1. Erzeuge Startkonfiguration $\mathcal{C}(\mathcal{U}_{x,\mu})$
2. Wähle Link $\mathcal{U}_{x,\mu}$
3. Ziehe Impulse p_a gaußverteilt
4. Berechne $H = H(p_a, \mathcal{U}_{x,\mu})$
5. Integriere Hamilton'sche Bewegungsgleichungen von $t = 0$ bis $t = T$
6. Berechne $H' = H(p'_a, \mathcal{U}'_{x,\mu})$ und $\delta H = H' - H$
7. Akzeptiere den neuen Link $\mathcal{U}'_{x,\mu}$ mit Wahrscheinlichkeit $p = \min(1, e^{-\delta H})$
8. wiederhole ab 2 bis alle Variablen einmal gewählt wurden

9. neue Konfiguration $\mathcal{C}'(\mathcal{U}_{x,\mu})$, beginne wieder bei 2

Für eine Akzeptanz von 1, also exakter Energieerhaltung, würde dieser Algorithmus also einem Wärmebad-Algorithmus entsprechen. Allerdings muss bei einem HMC darauf geachtet werden, dass die Integrationslänge T nicht zu klein ist, damit unabhängige Konfigurationen erzeugt werden. Dies erhöht normalerweise die Energieverletzung und senkt damit die Akzeptanz. Im Folgenden wird kurz der verwendete Integrator, ein Leap-Frog, vorgestellt.

Leap-Frog-Integrator

Der Leap-Frog-Integrator ist ein symplektischer zweiter-Ordnungs-Integrator, der zeitumkehrinvariant ist. Er verwendet folgendes Integrationschema:

$$\mathfrak{P}_{x,\mu}\left(\tau + \frac{\Delta\tau}{2}\right) = \mathfrak{P}_{x,\mu}(\tau) + \frac{\Delta\tau}{2}\dot{\mathfrak{P}}_{x,\mu}(\tau) \quad (12.27)$$

$$\mathcal{U}_{x,\mu}(\tau + \Delta\tau) = \exp\left\{i\Delta\tau\mathfrak{P}_{x,\mu}\left(\tau + \frac{\Delta\tau}{2}\right)\right\}\mathcal{U}_{x,\mu}(\tau) \quad (12.28)$$

$$\mathfrak{P}_{x,\mu}(\tau + \Delta\tau) = \mathfrak{P}_{x,\mu}\left(\tau + \frac{\Delta\tau}{2}\right) + \frac{\Delta\tau}{2}\dot{\mathfrak{P}}_{x,\mu}(\tau + \delta\tau) \quad (12.29)$$

Die Zeitordnung in Gleichung (12.18) kann hier fallengelassen werden, weil die Impulse über einen Zeitschritt $\Delta\tau$ als konstant angenommen werden. Der Fehler, der dabei gemacht wird, ist von Ordnung $O(\Delta\tau^2)$. Das Exponentieren der Algebra in Gleichung (12.28) ist sehr zeitaufwendig. Da der Integrator jedoch nur bis zur Ordnung $O(\Delta\tau^2)$ exakt ist, reicht es im Prinzip die Exponentialfunktion bis zur zweiten Ordnung zu entwickeln. Dies hat jedoch den Nachteil, dass das so erhaltene \mathcal{U} nicht mehr in der Gruppe liegen muss, was zu Problemen führt die im Anhang A.4 zu dieser Arbeit noch genauer untersucht werden. Der IHMC hat zwei freie Parameter, die Integrationslänge T und die Feinheit der Diskretisierung $\Delta\tau$. Diese müssen für jede Anwendung entsprechend optimal eingestellt werden. Richtwerte sind Integrationslängen in der Größenordnung von $T = 1$, so dass etwa eine Akzeptanz von 70% erreicht wird (für HMC). Selbst wenn die Exponentialfunktion z.B. über eine Spektralzerlegung exakt berechnet wird, kann es jedoch durch numerische Fehler dazu kommen, dass insbesondere für größere Matrizen sich diese Fehler nach vielen Sweeps über das Gitter so summieren, dass die Links nicht mehr in der jeweiligen Eichgruppe liegen. Es ist deshalb notwendig, einen Link nach einigen Sweeps wieder zurück in die Gruppe zu projizieren. Im Anhang A.2 werden Methoden gezeigt, wie dies für die Gruppen $SU(N)$ und G_2 möglich ist. Damit der Algorithmus für G_2 ausreichend schnell für Simulationen ist, muss eine Möglichkeit gefunden werden, die Exponentialfunktion effizient zu berechnen. Hierfür wird nun eine Methode konstruiert, die von einer speziellen Zerlegung von G_2 -Matrizen und der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel Gebrauch macht.

12.3 Die Berechnung der Exponentialabbildung

In diesem Abschnitt wird eine Abbildung von der Algebra \mathfrak{g}_2 in die Gruppe G_2 konstruiert, die die Exponentialabbildung in zweiter Ordnung nähert, dabei aber die Gruppe nicht verlässt und mit deutlich weniger Zeitaufwand auszuführen ist als das exakte Berechnen der Exponentialfunktion. Hierzu wird wieder die Beschreibung der S_6 als Coset-Space von $G_2/SU(3)$ benutzt. Deshalb zunächst noch einmal als Erinnerung: $\mathfrak{u} = \mathfrak{su}(3)$ ist eine

Unteralgebra von \mathfrak{g}_2 . Die Algebra von G_2 lässt sich schreiben als Summe von Vektorräumen $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{u} + \mathfrak{s}$ und es gelten folgende Kommutatorrelationen

$$[\mathfrak{u}, \mathfrak{u}] \subset \mathfrak{u}, \quad [\mathfrak{u}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s}, \quad [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{u} + \mathfrak{s} \quad (12.30)$$

Damit lässt sich jedes Element der Gruppe G_2 schreiben als $\Omega = \mathcal{S}\mathcal{U}$. Im Folgenden bezeichnen \mathfrak{U}_a die Generatoren der Unteralgebra \mathfrak{u} , also $\mathfrak{U}_a \in \mathfrak{u}$ und \mathfrak{S}_a die übrigen Generatoren von \mathfrak{g}_2 , also $\mathfrak{S}_a \in \mathfrak{s}$. Damit gilt für ein beliebiges Element aus G_2

$$\Omega = \exp \{ \delta\tau(\hat{s}_a \mathfrak{S}^a + \hat{u}_a \mathfrak{U}^a) \} = \exp \{ \delta\tau s_a \mathfrak{S}_a \} \exp \{ \delta\tau u_a \mathfrak{U}^a \} \quad (12.31)$$

Die ungepunkteten Indizes laufen über die Generatoren von \mathfrak{s} , also $x = 9 \dots 14$, die gepunkteten über die Generatoren von \mathfrak{u} , also $\dot{x} = 1 \dots 8$.

Die Exponentiale auf der rechten Seite der Gleichung lassen sich wie später gezeigt wird explizit angeben. Ziel ist es also, die Koeffizienten s_a und u_a aus \hat{s}_a und \hat{u}_a zu berechnen. Dies ist möglich mit Hilfe der Hausdorff-Formel

$$\begin{aligned} H(A, B) &= \ln(\exp \{A\} \exp \{B\}) \\ &= A + B + \frac{1}{2} [A, B] + \frac{1}{12} [A, [A, B]] + \frac{1}{12} [B, [B, A]] \\ &\quad + \frac{1}{24} [[A, B], [A, B]] + \dots \end{aligned} \quad (12.32)$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \delta\tau(\hat{s}_a \mathfrak{S}^a + \hat{u}_a \mathfrak{U}^a) &= H(\delta\tau s_a \mathfrak{S}_a, \delta\tau u_a \mathfrak{U}^a) \\ &= \delta\tau (s_a \mathfrak{S}_a + u_a \mathfrak{U}^a) + \frac{1}{2} \delta\tau^2 u_a s_a [\mathfrak{S}^a, \mathfrak{U}^a] \\ &\quad + \frac{1}{12} \delta\tau^3 \left(s_a s_b u_a [\mathfrak{S}^a, [\mathfrak{S}^b, \mathfrak{U}^a]] + s_a u_a u_b [\mathfrak{U}^a, [\mathfrak{U}^b, \mathfrak{S}^a]] \right) \\ &\quad + \frac{1}{24} \delta\tau^4 s_a s_b u_a u_b [[\mathfrak{S}^a, \mathfrak{U}^a], [\mathfrak{S}^b, \mathfrak{U}^a]] + \dots \end{aligned} \quad (12.33)$$

Mit den oben angegebenen Kommutatorrelationen lässt sich weiter schreiben

$$\begin{aligned} \delta\tau(\hat{s}_a \mathfrak{S}^a + \hat{u}_a \mathfrak{U}^a) &= \delta\tau (s_a \mathfrak{S}_a + u_a \mathfrak{U}^a) + \frac{1}{2} \delta\tau^2 u_a s_a f^{a\dot{a}}{}_c \mathfrak{S}^c \\ &\quad + \frac{1}{12} \delta\tau^3 \left(s_a s_b u_a f^{b\dot{a}}{}_c [\mathfrak{S}^a, \mathfrak{S}^c] + s_a u_a u_b f^{b\dot{a}}{}_c f^{\dot{a}c}{}_d \mathfrak{S}^d \right) \\ &\quad + \frac{1}{24} \delta\tau^4 s_a s_b u_a u_b f^{a\dot{a}}{}_c f^{b\dot{b}}{}_d [\mathfrak{S}^c, \mathfrak{S}^d] + \dots \end{aligned} \quad (12.34)$$

Die Kommutatoren zwischen \mathfrak{s} und \mathfrak{s} liegen in $\mathfrak{u} + \mathfrak{s} = \mathfrak{g}_2$. Die Generatoren von \mathfrak{g}_2 werden mit \mathfrak{T}^α bezeichnet, wobei griechische Indizes von $1 \dots 14$ laufen. Damit ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} \delta\tau(\hat{s}_a \mathfrak{S}^a + \hat{u}_a \mathfrak{U}^a) &= \delta\tau (s_a \mathfrak{S}_a + u_a \mathfrak{U}^a) + \frac{1}{2} \delta\tau^2 u_a s_a f^{a\dot{a}}{}_c \mathfrak{S}^c \\ &\quad + \frac{1}{12} \delta\tau^3 \left(s_a s_b u_a f^{b\dot{a}}{}_c f^{ac}{}_\alpha \mathfrak{T}^\alpha + s_a u_a u_b f^{b\dot{a}}{}_c f^{\dot{a}c}{}_d \mathfrak{S}^d \right) \\ &\quad + \frac{1}{24} \delta\tau^4 s_a s_b u_a u_b f^{a\dot{a}}{}_c f^{b\dot{b}}{}_d f^{cd}{}_\alpha \mathfrak{T}^\alpha + \dots \end{aligned} \quad (12.35)$$

Im nächsten Schritt werden mit Hilfe der Orthogonalität der Generatoren die Koeffizienten auf der linken Seite der Gleichung isoliert. Es folgt

$$\begin{aligned}\delta\tau\hat{s}_x &= \delta\tau s_x + \frac{1}{2}\delta\tau^2 u_{\dot{a}} s_a f^{a\dot{a}}{}_x \\ &+ \frac{1}{12}\delta\tau^3 \left(s_a s_b u_{\dot{a}} f^{b\dot{a}}{}_c f^{ac}{}_x + s_a u_{\dot{a}} u_{\dot{b}} f^{b\dot{a}}{}_c f^{ac}{}_x \right) \\ &+ \frac{1}{24}\delta\tau^4 s_a s_b u_{\dot{a}} u_{\dot{b}} f^{a\dot{a}}{}_c f^{b\dot{b}}{}_d f^{cd}{}_x + \dots\end{aligned}\quad (12.36)$$

und

$$\begin{aligned}\delta\tau\hat{u}_{\dot{x}} &= \delta\tau u_{\dot{x}} + \frac{1}{12}\delta\tau^3 s_a s_b u_{\dot{a}} f^{b\dot{a}}{}_c f^{ac}{}_{\dot{x}} \\ &+ \frac{1}{24}\delta\tau^4 s_a s_b u_{\dot{a}} u_{\dot{b}} f^{a\dot{a}}{}_c f^{b\dot{b}}{}_d f^{cd}{}_{\dot{x}} + \dots\end{aligned}\quad (12.37)$$

Im Folgenden werden nur noch Terme bis zur Ordnung $O(\delta\tau^2)$ betrachtet und es entsteht nach Umbenennen einiger Summationsindizes folgendes Gleichungssystem

$$\hat{s}_x = s_x + \frac{1}{2}\delta\tau u_{\dot{a}} s_a f^{a\dot{a}}{}_x + \frac{1}{12}\delta\tau^2 s_a u_{\dot{a}} f^{a\dot{a}}{}_b \left(s_c f^{cb}{}_x - u_c f^{cb}{}_x \right) \quad (12.38)$$

$$\hat{u}_{\dot{x}} = u_{\dot{x}} + \frac{1}{12}\delta\tau^2 s_a s_b u_{\dot{a}} f^{b\dot{a}}{}_c f^{ac}{}_{\dot{x}} \quad (12.39)$$

Dies ist ein Gleichungssystem mit 14 nichtlinearen Gleichungen für die Variablen s_x und $u_{\dot{x}}$. Im nächsten Schritt wird dieses System bis zur Ordnung $O(\delta\tau^2)$ gelöst.

Lösen des Gleichungssystems bis zur Ordnung $O(\delta\tau^2)$

Eine Lösung ist deshalb einfach möglich, weil Gleichung (12.39) keine Terme in 1. Ordnung in $\delta\tau$ enthält und in $u_{\dot{x}}$ linear ist. Sie lässt sich schreiben als

$$\hat{u}_{\dot{x}} = \left(\delta_{\dot{x}}^{\dot{y}} + \frac{1}{12}\delta\tau^2 s_a s_b f^{b\dot{y}}{}_c f^{ac}{}_{\dot{x}} \right) u_{\dot{y}} = X^{-1}{}_{\dot{x}}{}^{\dot{y}} u_{\dot{y}} \quad (12.40)$$

Die Inverse einer Matrix der Form $\mathbb{1} + \delta\tau A + \delta\tau^2 B$ ist bis zur Ordnung $O(\delta\tau^2)$ gegeben durch

$$\frac{1}{\mathbb{1} + \delta\tau A + \delta\tau^2 B} = \mathbb{1} - \delta\tau A + \delta\tau^2 (A^2 - B) + O(\delta\tau^3) \quad (12.41)$$

Damit folgt also

$$u_{\dot{x}} = \left(\delta_{\dot{x}}^{\dot{y}} - \frac{1}{12}\delta\tau^2 s_a s_b f^{b\dot{y}}{}_c f^{ac}{}_{\dot{x}} \right) \hat{u}_{\dot{y}} \quad (12.42)$$

Einsetzen in Gleichung (12.38) und streichen von allen Termen mit Ordnung > 2 in $\delta\tau$ zeigt, dass in 2. Ordnung die s_x nur von $\hat{u}_{\dot{x}}$, nicht aber von $u_{\dot{x}}$ abhängen. Damit entkoppeln die Gleichungen und können separat gelöst werden. Es bleibt also folgende Gleichung zu lösen, die als Summe eines linearen und eines nichtlinearen Teils geschrieben werden kann:

$$\hat{s}_x = \left(\delta_x^y + \frac{1}{2} \delta\tau \hat{u}_a f^{y\dot{a}}_x - \frac{1}{12} \delta\tau^2 \hat{u}_a \hat{u}_c f^{y\dot{a}}_b f^{cb}_x \right) s_y + \frac{1}{12} \delta\tau^2 \hat{u}_a f^{y\dot{a}}_b f^{cb}_x s_c s_y \quad (12.43)$$

Die Struktur der Gleichung ist die folgende

$$\hat{s}_x = (\mathbf{1} + \delta\tau A + \delta\tau^2 B)_{xy} s_y + \delta\tau^2 F_{xyz} s_y s_z \quad (12.44)$$

Der nichtlineare Teil ist von 2. Ordnung. Findet man eine Lösung für den linearen Part, dann ist der Rest mindestens von 1. Ordnung in $\delta\tau$. Es wird also der folgende Ansatz gemacht:

$$s_x = \xi_x + \delta\tau \epsilon_x \quad (12.45)$$

mit

$$(\mathbf{1} + \delta\tau A + \delta\tau^2 B)_{xy} \xi_y = \hat{s}_x \quad (12.46)$$

Einsetzen liefert also

$$0 = (\mathbf{1} + \delta\tau A + \delta\tau^2 B)_{xy} \epsilon_y + \delta\tau F_{xyz} (\xi_y \xi_z + \delta\tau (\xi_y \epsilon_z + \xi_z \epsilon_y) + \delta\tau^2 \epsilon_y \epsilon_z) \quad (12.47)$$

Lässt man hier wieder nur Terme bis zur 2. Ordnung zu, so ergibt sich eine lineare Gleichung für ϵ_x .

$$\left\{ (\mathbf{1} + \delta\tau A + \delta\tau^2 B)_{xy} + \delta\tau^2 \xi_z (F_{xzy} + F_{xyz}) \right\} \epsilon_y = \delta\tau F_{xyz} \xi_y \xi_z \quad (12.48)$$

In zweiter Ordnung hat sie die Lösung

$$\epsilon_x = \left\{ \delta_x^y - \frac{1}{2} \delta\tau \hat{u}_a f^{y\dot{a}}_x + \frac{1}{4} \delta\tau^2 \left(\hat{u}_a \hat{u}_c (f^{y\dot{c}}_z f^{z\dot{a}}_x - \frac{1}{3} f^{y\dot{a}}_b f^{b\dot{c}}_x) - \frac{1}{3} \hat{u}_a \xi_z (f^{z\dot{a}}_b f^{yb}_x + f^{y\dot{a}}_b f^{zb}_x) \right) \right\} \frac{1}{12} \delta\tau \hat{u}_a f^{c\dot{a}}_b f^{zb}_y \xi_c \xi_z \quad (12.49)$$

und ξ_x berechnet sich durch

$$\xi_x = \left\{ \delta_x^y - \delta\tau \frac{1}{2} \hat{u}_a f^{y\dot{a}}_x + \frac{1}{4} \delta\tau^2 \hat{u}_a \hat{u}_c \left(f^{y\dot{c}}_z f^{z\dot{a}}_x - \frac{1}{3} f^{y\dot{a}}_b f^{b\dot{c}}_x \right) \right\} \hat{s}_y \quad (12.50)$$

Auf diese Art lässt sich also die Zerlegung durchführen. Wie die Matrix \mathcal{S} auszurechnen ist, wird im Anhang A.2 gezeigt. Im Folgenden muss also nur noch die Matrix $\exp(u_a \mathcal{U}^a)$ berechnet werden.

Berechnung der Exponentialabbildung von $\mathfrak{su}(3)$

Die Exponentierung einer Matrix aus $\mathfrak{su}(3)$ ist in [64] angegeben.

$$\mathcal{U} = e^{\mathfrak{H}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathfrak{H}^n \quad \text{mit} \quad \mathfrak{H} \in \mathfrak{su}(3) \quad (12.51)$$

Mittels des Cayley-Hamilton-Theorems kann diese unendliche Reihe von Matrizen in eine unendliche Reihe von Koeffizienten umgeschrieben werden

$$\mathfrak{H}^3 = b_0 \mathfrak{H} + c_0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{H}^{3+i} = a_i \mathfrak{H}^2 + b_i \mathfrak{H} + c_i \quad (12.52)$$

mit den Rekursionsrelationen

$$a_{i+1} = b_i \quad , \quad b_{i+1} = a_i b_0 + c_i \quad , \quad c_{i+1} = a_i c_0 \quad (12.53)$$

$$a_0 = 0 \quad , \quad -b_0 = xy + xz + yz \quad , \quad c_0 = xyz \quad (12.54)$$

wobei x , y und z die Eigenwerte der Matrix \mathfrak{H} sind ($x + y + z = 0$). Damit lässt sich \mathcal{U} schreiben als

$$\begin{aligned} m\mathcal{U} &= m \left(\mathbb{1}_3 + \mathfrak{H} + \frac{1}{2} \mathfrak{H}^2 \right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{m a_n}{(n+3)!} \right) \mathfrak{H}^2 \\ &+ \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{m b_n}{(n+3)!} \right) \mathfrak{H} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{m c_n}{(n+3)!} \right) \\ m &= (x-y)(x-z)(y-z) \end{aligned} \quad (12.55)$$

Diese Rekursionsrelationen lassen sich lösen und es ergibt sich für \mathcal{U}

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \frac{1}{m} \{ (yz(y-z)e^x + xz(z-x)e^y + xy(x-y)e^z) \mathbb{1}_3 \\ &+ (x(y-z)e^x + y(z-x)e^y + z(x-y)e^z) \mathfrak{H} \\ &+ ((y-z)e^x + (z-x)e^y + (x-y)e^z) \mathfrak{H}^2 \} \end{aligned} \quad (12.56)$$

Die Eigenwerte einer antihermiteschen 3×3 -Matrix können ebenfalls analytisch angegeben werden und damit ist dieses Problem gelöst. Das Exponentieren einer beliebigen Matrix aus \mathfrak{g}_2 bis zur zweiten Ordnung ist damit auf das Lösen eines Gleichungssystems und einer Multiplikation von zwei 7×7 -Matrizen zurückgeführt. Dieses Verfahren ist etwa 10-mal schneller als das direkte Exponentieren der Matrix und vermeidet systematische Fehler einer Taylor-Entwicklung der Exponentialfunktion (siehe Anhang A.4).

12.4 Simulationsergebnisse

Nachdem jetzt also ein Algorithmus zur Verfügung steht mit dem es möglich ist, G_2 -Eichtheorie zu simulieren, werden in diesem Abschnitt die numerischen Ergebnisse zusammengefasst. Die Yang-Mills-Theorie mit Eichgruppe G_2 wurde auf verschiedenen Gittern

mit dem beschriebenen Algorithmus simuliert. Dabei wurden als Observablen die über das Gitter und alle Richtungen (μ, ν) gemittelten Plakette W

$$W = \frac{1}{7 \cdot 6 \cdot V} \sum_x \sum_{\mu\nu} \text{tr} \mathcal{U}_{x, \mu\nu} \quad (12.57)$$

sowie der Polyakov-Loop betrachtet.

12.4.1 Das $12^3 \times 2$ -Gitter

Auf diesem Gitter wurden für jede Kopplung β 10000 Konfigurationen (in der Nähe des Phasenübergangs, also $\beta = 8.6 \dots 9.9$, 20000 bzw. 50000 Konfigurationen) erzeugt. In Abb. 12.2 ist die über das Gitter gemittelte Plakette, die proportional zur Wirkung ist, über der Kopplung β aufgetragen und in Abb. 12.4 die dazugehörige Suszeptibilität. Die Ergebnisse zeigen, dass es bei $\beta_c = 9.081(2)$ einen Phasenübergang in der Theorie gibt, der durch einen kleinen Wert des Polyakov-Loops (Abb. 12.3) in der Phase mit schwacher Kopplung β und einen ausgerichteten (in der Nähe des 1-Elementes der Gruppe) Polyakov-Loop für starke Kopplungen charakterisiert werden kann. Dieser Phasenübergang wird in Übereinstimmung sowohl von der Suszeptibilität der Plakette als auch der des Polyakov-Loops angezeigt. Auch wenn nach den theoretischen Überlegungen der Polyakov-Loop keinen exakten Ordnungsparameter darstellt, scheint er sich auf diesem Gitter dennoch in guter Näherung als Unterscheidungskriterium der beiden Phasen zu eignen. Deshalb werden seine Histogramme (Abb. 12.5) zur Bestimmung der Art des Phasenübergangs benutzt.

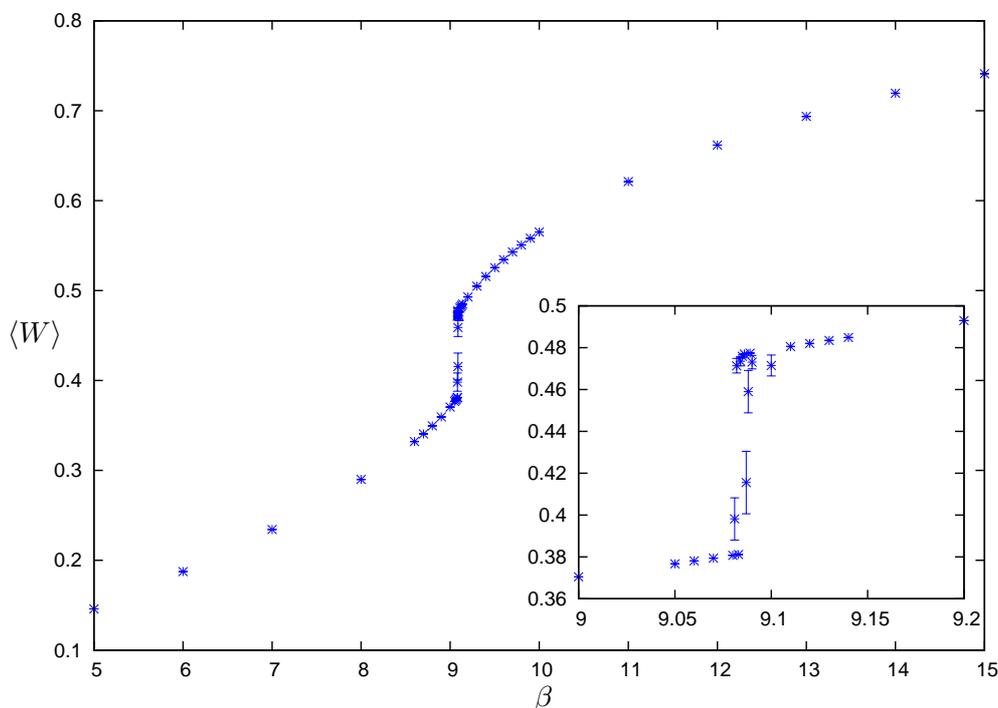


Abbildung 12.2: Plakette in Abhängigkeit von β auf dem $12^3 \times 2$ -Gitter

Die Histogramme zeigen, dass es sich um einen Phasenübergang 1. Art handeln könnte. Zur genaueren Bestimmung werden im Folgenden größere Gitter betrachtet.

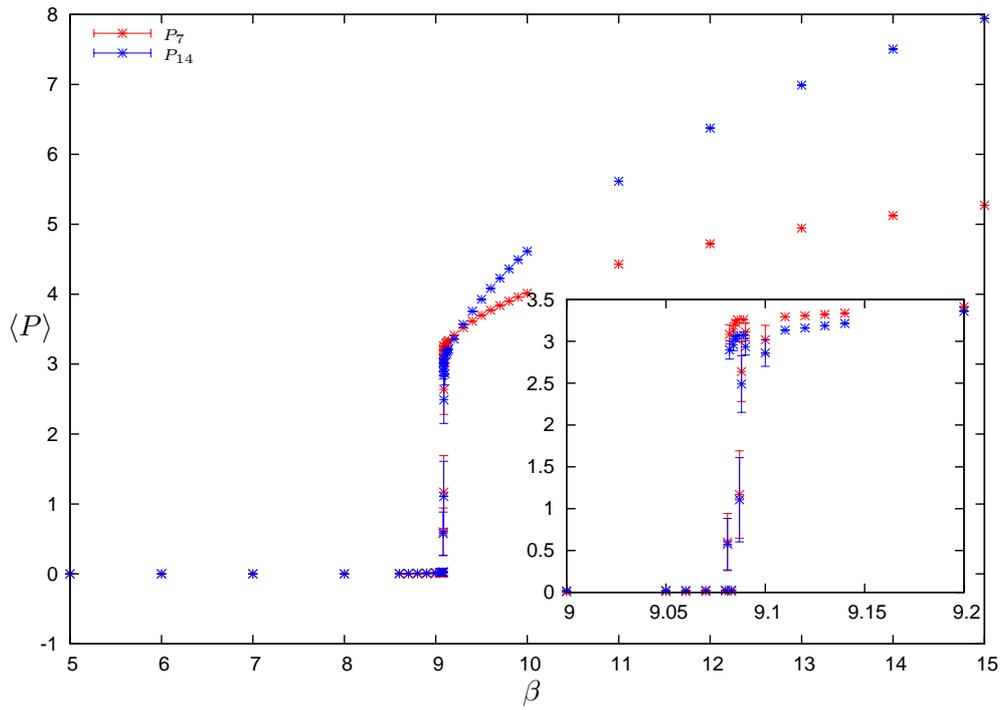


Abbildung 12.3: Polyakov-Loop in 7- und 14-dimensionaler Darstellung in Abhängigkeit von β auf dem $12^3 \times 2$ -Gitter

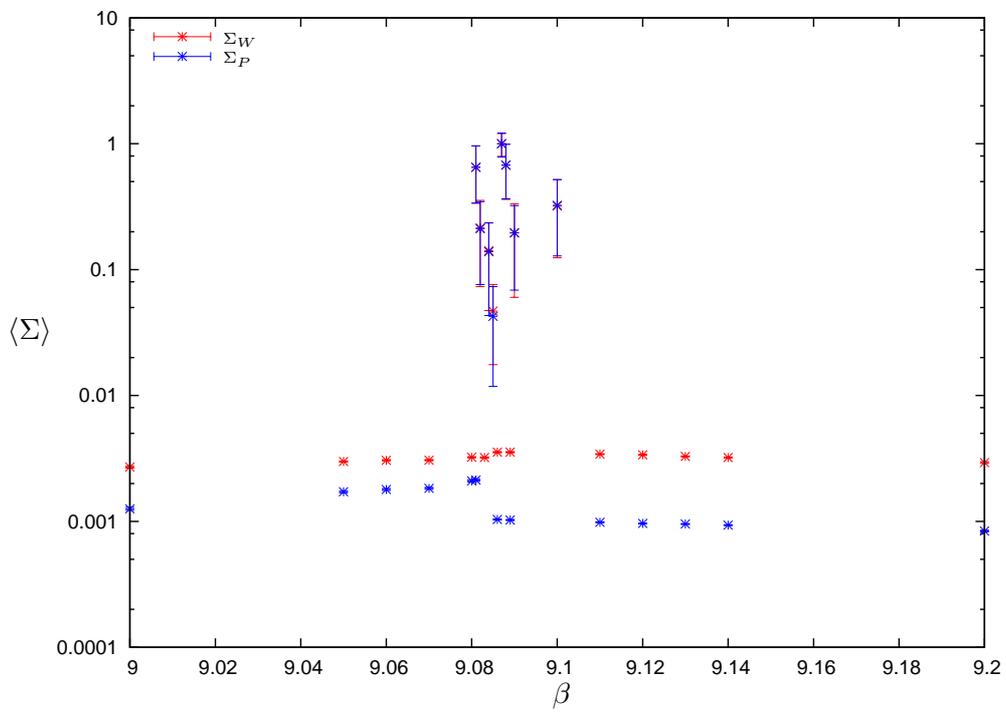


Abbildung 12.4: Suszeptibilität der Plakette und des Polyakov-Loops (reskaliert) in Abhängigkeit von β auf dem $12^3 \times 2$ -Gitter

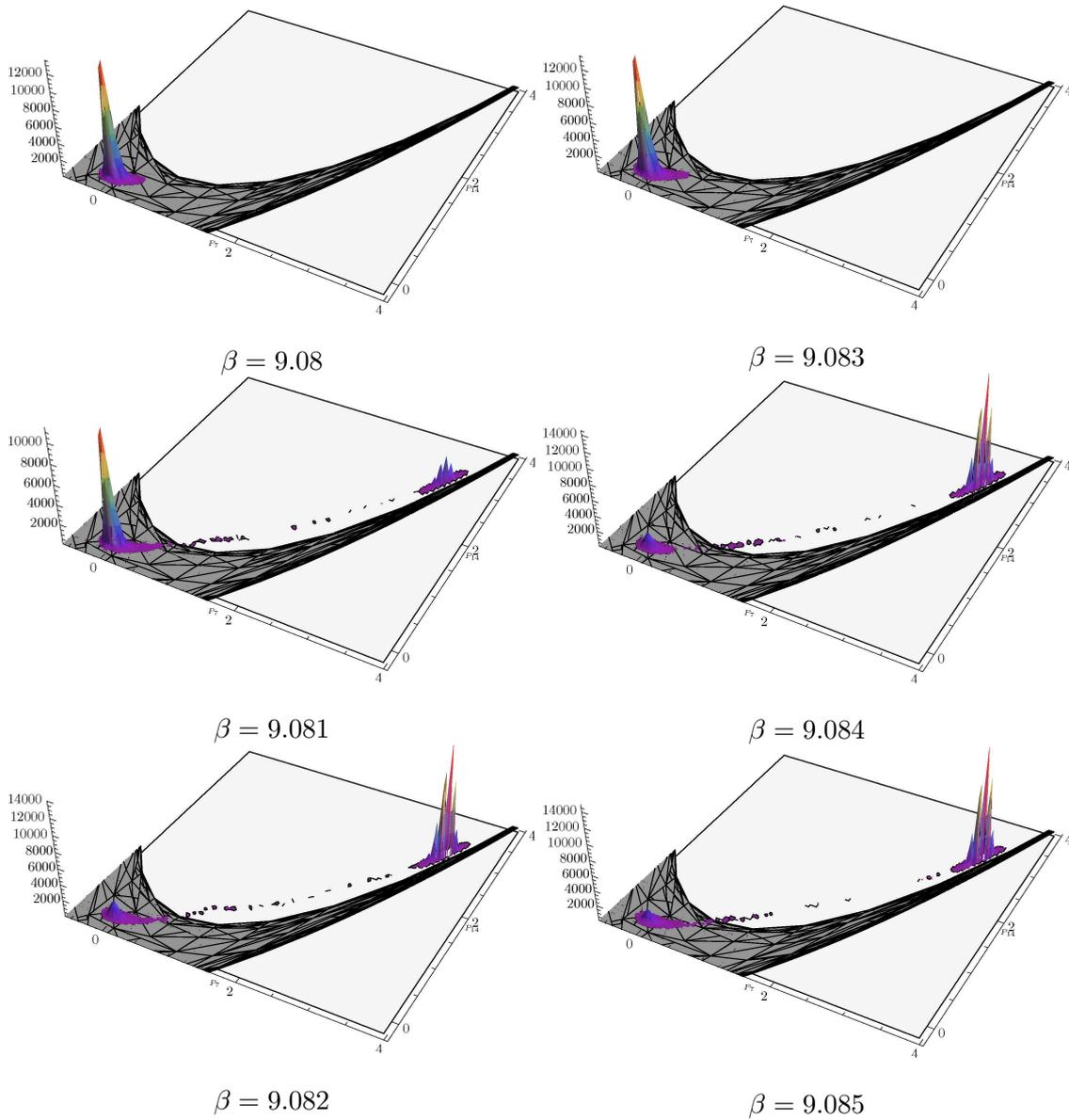


Abbildung 12.5: Histogramme des Polyakov-Loops auf dem $12^3 \times 2$ -Gitter

12.4.2 Das $16^3 \times 4$ -Gitter

Die Simulationen auf diesem Gitter wurden mit einer Statistik von 10000 Konfigurationen durchgeführt. Die Ergebnisse sind in den Abb. 12.6 und 12.7 zu sehen.

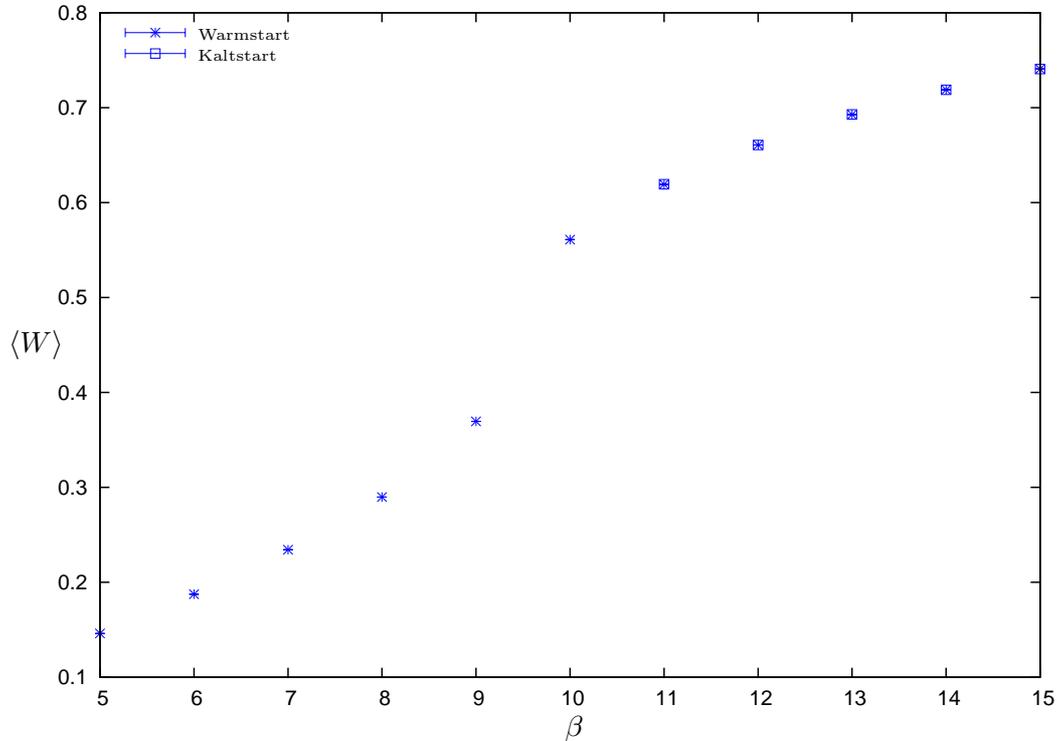


Abbildung 12.6: Plakette in Abhängigkeit von β auf dem $16^3 \times 4$ -Gitter

Auch auf diesem Gitter ist der Phasenübergang sowohl im Polyakov-Loop als auch in der Plakette zusehen. Die kritische Kopplung liegt in Übereinstimmung der beiden Observablen (in der gewählten Auflösung und Statistik) bei $\beta_c = 9(1)$. In der Hochtemperaturphase gibt es jedoch einen Unterschied zum 2-er Gitter. Der Polyakov-Loop in der 7-Darstellung nimmt sowohl positive als auch negative Werte an, während in der Plakette im Rahmen der Statistik kein Unterschied zwischen diesen Phasen mit negativem bzw. positivem Polyakov-Loop zu erkennen ist. Ein Vergleich mit Werten der analytischen Betrachtung von Zentrumstransformationen in der $SU(3)$ -Untergruppe zeigt, dass es sich bei dieser Phase um ein Relikt der $SU(3)$ -Zentrumssymmetrie handeln könnte, die jedoch für G_2 keine exakte Symmetrie sein kann. Dies wird in Abschnitt 12.4.4 genauer untersucht werden. Auf diesem Gitter wurden für jede Kopplung Simulationen sowohl mit Warmstart (zufällige Anfangsverteilung) als auch mit Kaltstart (Anfangsverteilung mit allen Links auf der Einheit) durchgeführt. Für einen Kaltstart läuft die Theorie immer in die Phase mit positivem Polyakov-Loop während der Warmstart zu beiden Phasen führt. Dies ist verständlich da der Polyakov-Loop in einer Deconfinement-Phase mit positivem Wert in der Nähe der Einheit liegt.

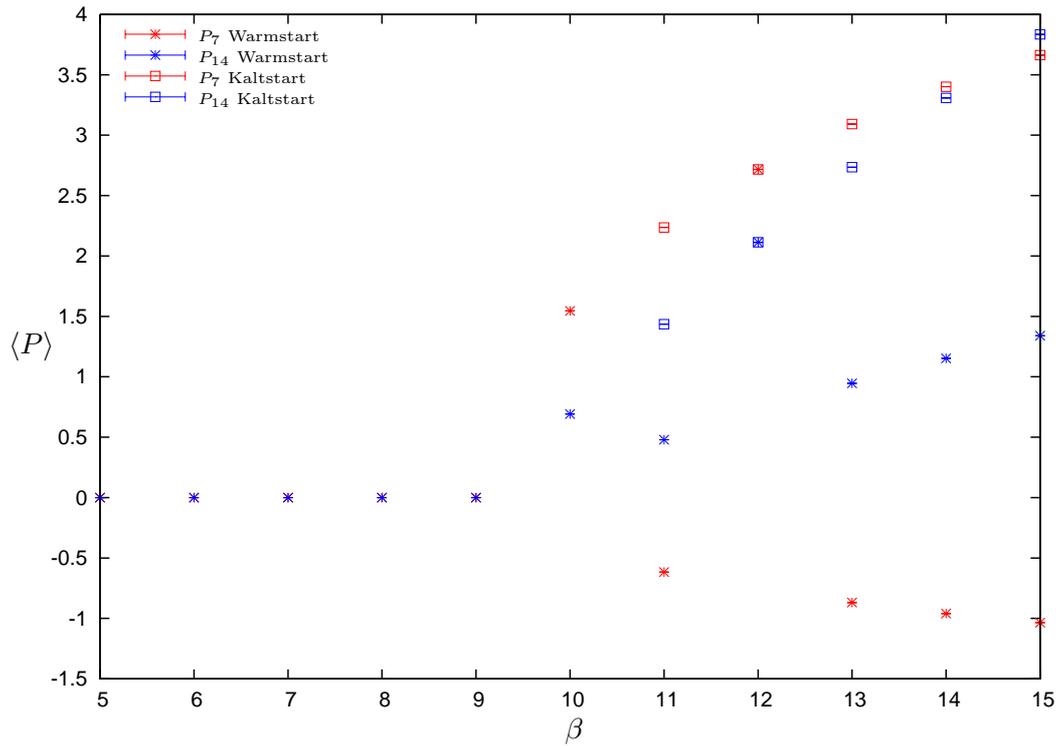


Abbildung 12.7: Polyakov-Loop in 7- und 14-dimensionaler Darstellung in Abhängigkeit von β auf dem $16^3 \times 4$ -Gitter

12.4.3 Das $16^3 \times 6$ -Gitter

Auf diesem Gitter wurde die Yang-Mills-Theorie mit einer Statistik von 100000 Konfigurationen untersucht. Die Ergebnisse für den Polyakov-Loop sind in Abb. 12.9, die für die Plakette in Abb. 12.8 zu sehen. Die Peaks in der Suszeptibilität von Polyakov-Loop und Plakette (Abb. 12.10) liegen nicht mehr bei derselben Kopplung β . Dies stimmt mit den Ausführungen in [65] überein, die zeigen, dass es in G_2 -Yang-Mills auf dem Gitter neben dem Confinement-Deconfinement-Phasenübergang bei $\beta_c = 9.765(5)$ einen sogenannten Bulk-Übergang bei $\beta = 9.45(5)$ gibt, der den physikalischen Confinement-Deconfinement-Phasenübergang auf kleinen Gittern überdeckt. In der Suszeptibilität der Plakette ist am physikalischen Phasenübergang ein wesentlich kleinerer Peak zu sehen, der mit dem Peak in der Polyakov-Loop-Suszeptibilität übereinstimmt, aber nur mit mehr Statistik genauer aufzulösen ist. Weiter ist zu bemerken, dass auch auf diesem Gitter in der Hochtemperaturphase der Polyakov-Loop sowohl positive als auch negative Werte annimmt. Nun soll in der Nähe des Phasenübergangs die Monte-Carlo-Zeitentwicklung des Polyakov-Loops (Abb. 12.11) betrachtet werden um die Art des Phasenübergangs zu bestimmen. Es zeigt sich, dass es sich um einen Phasenübergang 1. Art (auf diesem Gitter) handelt, weil der Polyakov-Loop zwischen der Confinement- und der Deconfinement-Phase springt. Es gibt also am Phasenübergang eine Koexistenz der beiden Phasen. Der Polyakov-Loop springt auf einer Skala von etwa 10000 Konfigurationen zwischen den beiden Phasen.

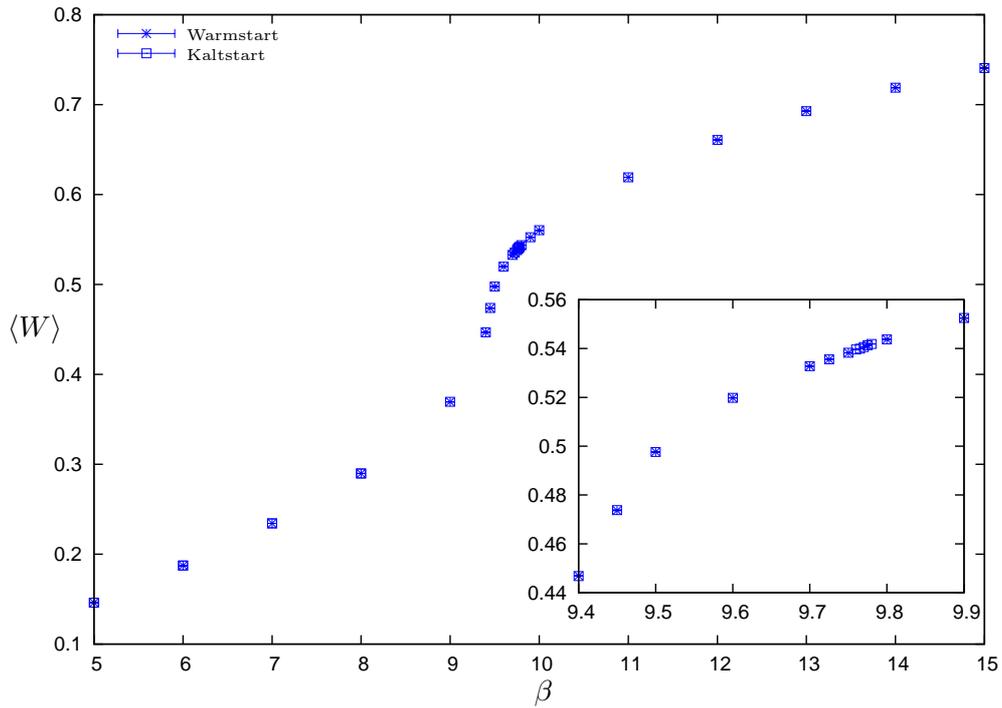


Abbildung 12.8: Plakette in Abhängigkeit von β auf dem $16^3 \times 6$ -Gitter

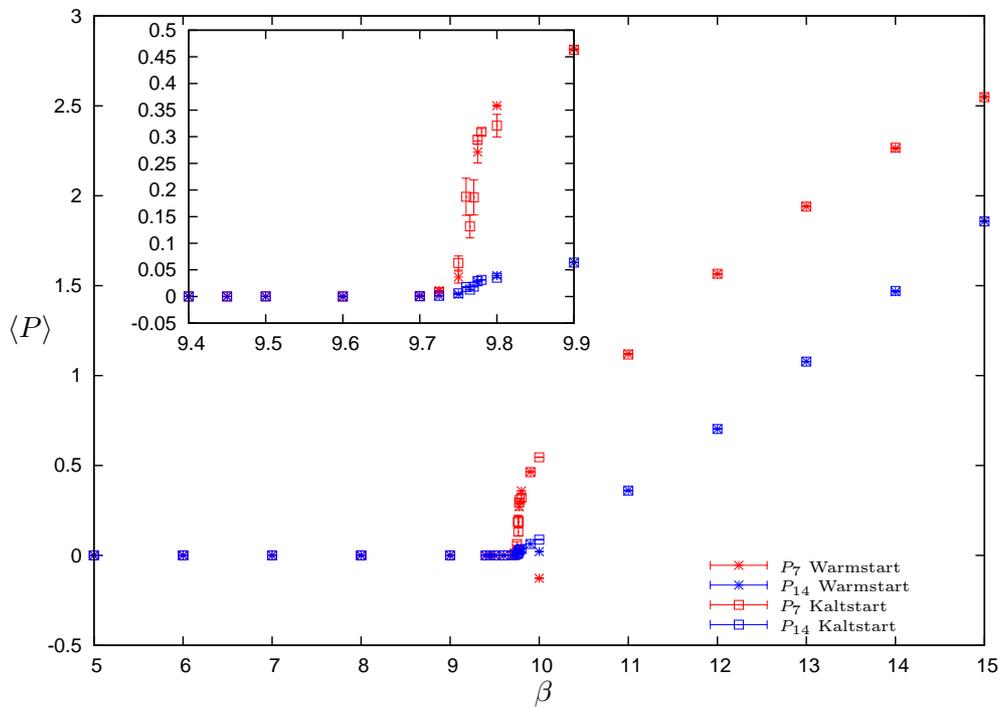


Abbildung 12.9: Polyakov-Loop in 7- und 14-dimensionaler Darstellung in Abhängigkeit von β auf dem $16^3 \times 6$ -Gitter

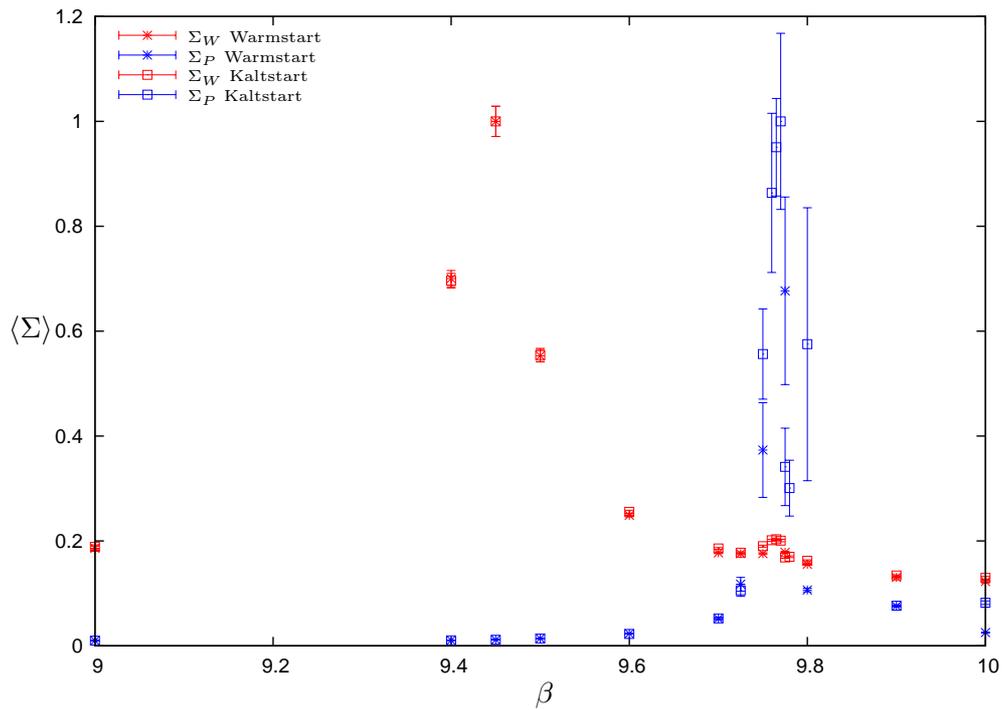


Abbildung 12.10: Suszeptibilität der Plakette und des Polyakov-Loops (reskaliert) in Abhängigkeit von β auf dem $16^3 \times 6$ -Gitter

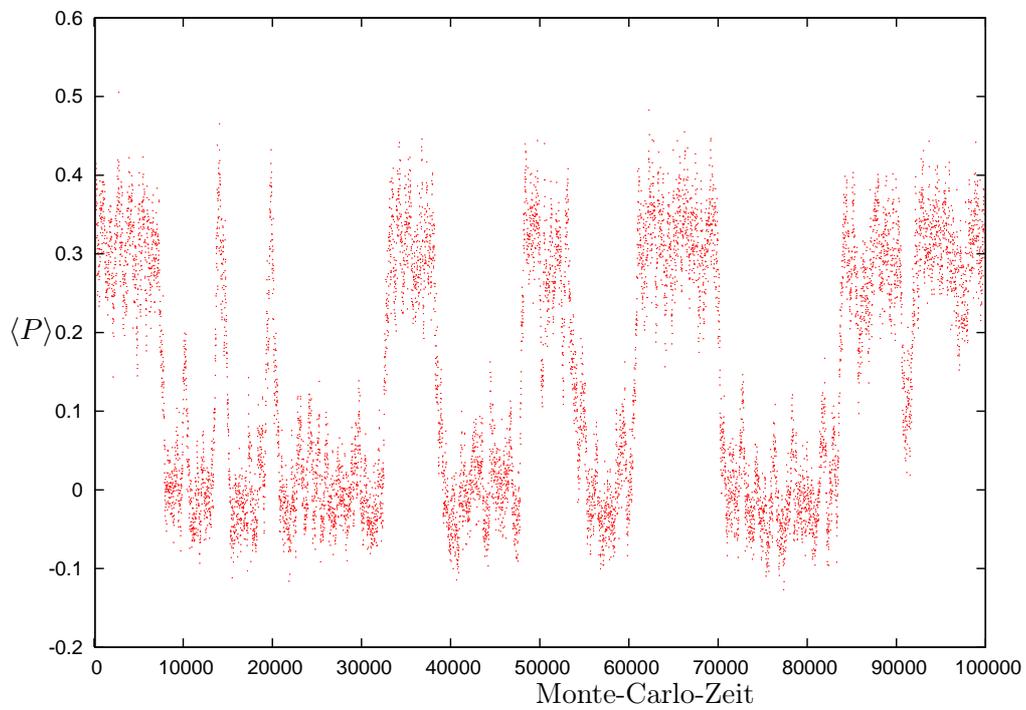


Abbildung 12.11: Polyakov-Loop über Monte-Carlo-Zeit für $\beta = 9.765$ auf dem $16^3 \times 6$ -Gitter

12.4.4 Untersuchung der nicht exakten $Z(3)$ -Zentrumssymmetrie

Um den Ursprung der Phase mit negativem Polyakov-Loop näher zu untersuchen, wird auf einem $12^3 \times 4$ -Gitter eine Hysteresekurve erstellt. Dazu wird während der Simulation die Kopplung zunächst von der Deconfinement-Phase bis kurz unterhalb des Phasenübergangs runtergefahren und danach wieder langsam erhöht. Zwischen dem Ändern der Kopplungen wird dem System Zeit zum Thermalisieren gegeben. Insgesamt wurden 500000 Konfigurationen erzeugt und die Thermalisierungszeit zwischen dem Ändern der Kopplung beträgt 1000 Konfigurationen. Damit ergeben sich 250 verschiedene Kopplungen zwischen $\beta = 9 \dots 13$. Da die Phase mit negativem Polyakov-Loop untersucht werden soll, muss das System am Anfang in diese Phase gebracht werden. Als Auslöser hierfür haben sich Zentrumstransformationen in der $SU(3)$ -Untergruppe bewährt. Um die Abhängigkeit von einem bestimmten Satz an Zufallszahlen zu reduzieren, wurden 2 verschiedene Seeds gerechnet. Die Ergebnisse sind in Abb. 12.12 und 12.13 zu sehen.

In Abb. 12.12 ist der Polyakov-Loop in der $(1, 0)$ - und in der $(0, 1)$ -Darstellung für beide Seeds über der Kopplung β (entspricht der Monte-Carlo-Zeit) aufgetragen. Er beginnt in der Phase mit negativer $(1, 0)$ -Darstellung. Kurz vor dem Erreichen der symmetrischen Phase springt er in beiden Seeds in die Phase mit positivem Wert in der $(1, 0)$ -Darstellung. Nach dem Durchlaufen der symmetrischen Phase läuft er in beiden Seeds in die Phase mit positivem Wert. Dies entspricht den Beobachtungen, dass in der Nähe des Phasenübergangs immer der positive Wert angenommen wird. Erst für große Kopplungen ist die Phase mit negativem Wert stabil genug. Dies zeigt, dass es sich nicht um eine exakte Symmetrie handelt, sondern, wenn man nur lange genug wartet, immer die Phase mit positivem Polyakov-Loop angenommen wird. Ein Tunneln zwischen diesen beiden Phasen wurde bei Simulationen bisher nicht beobachtet. Abb. 12.13 zeigt den Weg des Polyakov-Loops in der $7 - 14$ -Ebene. Dabei wurden immer Konfigurationen mit derselben Kopplung zusammengefasst (in einer Farbe und Punktart dargestellt). Hier ist ebenfalls zu sehen, dass der Polyakov-Loop nicht kontinuierlich größer wird sondern dass die Hoch- und Tieftemperaturphase klar durch einen Sprung voneinander getrennt sind und es sich damit also um einen 1. Art Phasenübergang handelt (auf diesem endlichen Gitter, es wurde hier kein Kontinuumslimes durchgeführt).

Wie im Abschnitt 12.1.2 gezeigt, können die $Z(3)$ -Kopien auch zu unterschiedlichen Punkten im Fundamentalbereich von G_2 führen. Es könnte also ebenfalls eine 3-Peak-Struktur in Histogrammen auftauchen. Dies wird jetzt auf einem kleinen Gitter ($6^3 \times 2$) untersucht. Dazu werden für verschiedene Eichkopplungen β oberhalb des Confinement-Deconfinement-Übergangs Histogramme des Polyakov-Loops betrachtet (Abb. 12.14 auf Seite 146 und Abb. 12.15 auf Seite 147). Es wurden dabei für jede Kopplung 1000 verschiedene Seeds gerechnet. Für $\beta = 9.081$ und $\beta = 9.1$ erkennt man zwei Peaks, einer entspricht der Confinement-Phase und der andere der Deconfinement-Phase. Die Koexistenz der beiden Phasen ist auf diesem kleinen Gitter sehr stark ausgeprägt. Bei $\beta = 9.5$ und $\beta = 10$ sind zwei Deconfinement-Peaks zu erkennen. Hier fallen also zwei $Z(3)$ -Kopien aufeinander (vgl. 12.1.2). Für $\beta = 15$ ist ein dritter Peak zu erkennen, der bei $\beta = 20$ noch stärker ausgeprägt ist. Der Polyakov-Loop in der adjungierten Darstellung ist hier auch negativ. Für große β lassen sich auf diesem Gitter also alle $Z(3)$ -Kopien des Polyakov-Loops dieser nicht exakten $SU(3)$ -Zentrumssymmetrie beobachten.

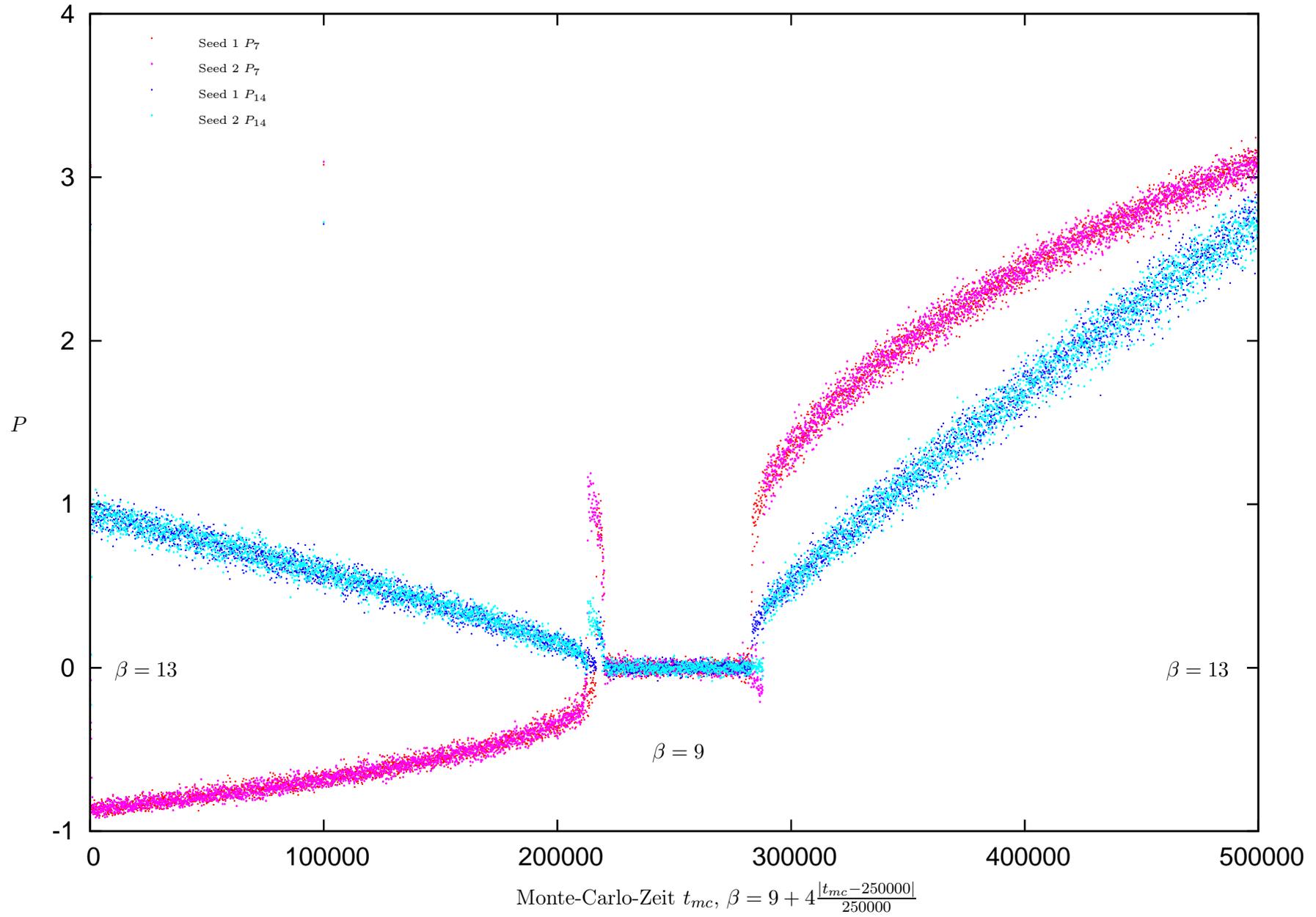


Abbildung 12.12: Hysteresekurve des Polyakov-Loops auf einem $12^3 \times 4$ -Gitter

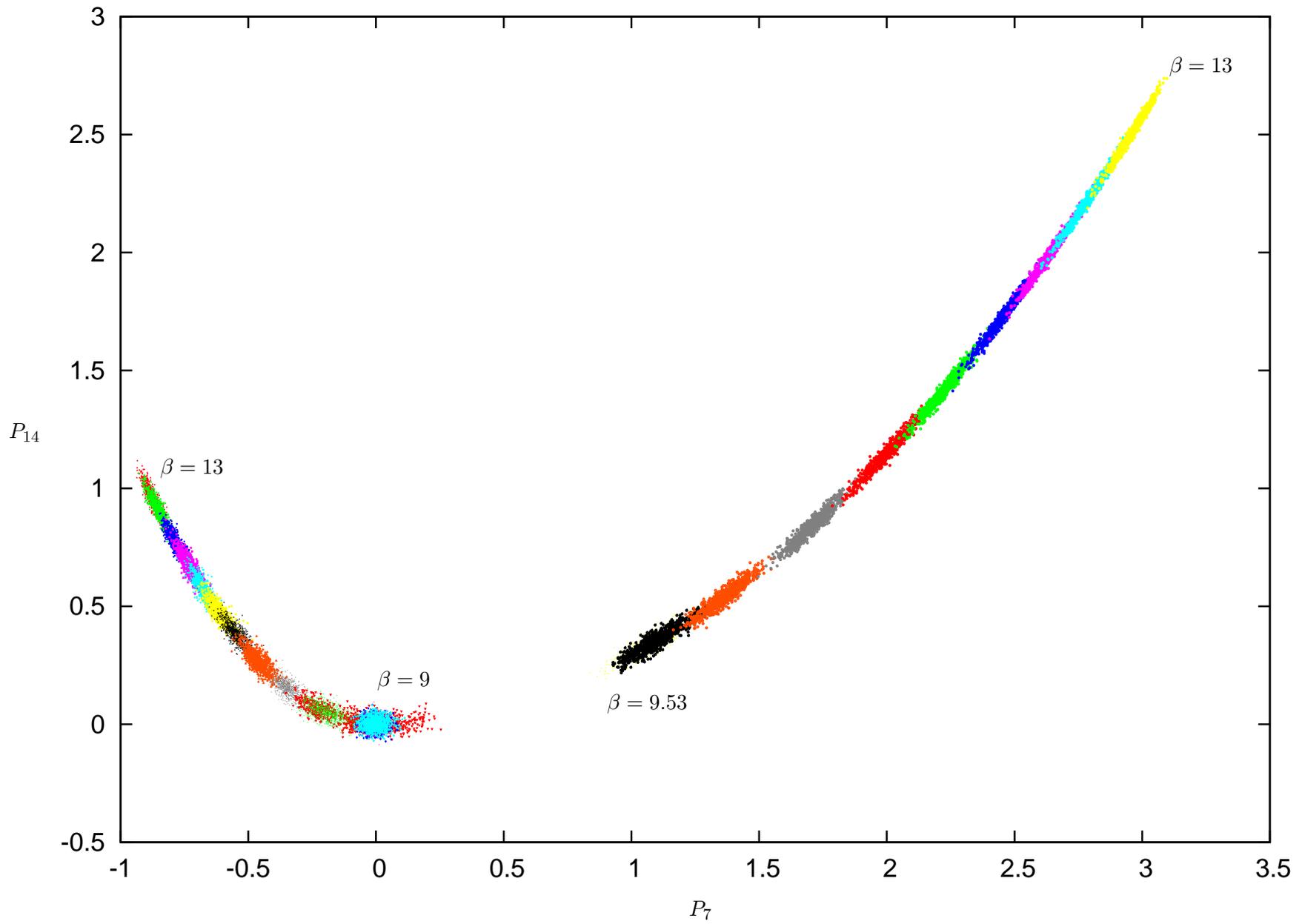


Abbildung 12.13: Hysteresekurve auf einem $12^3 \times 4$ -Gitter (im Fundamentalbereich von G_2)

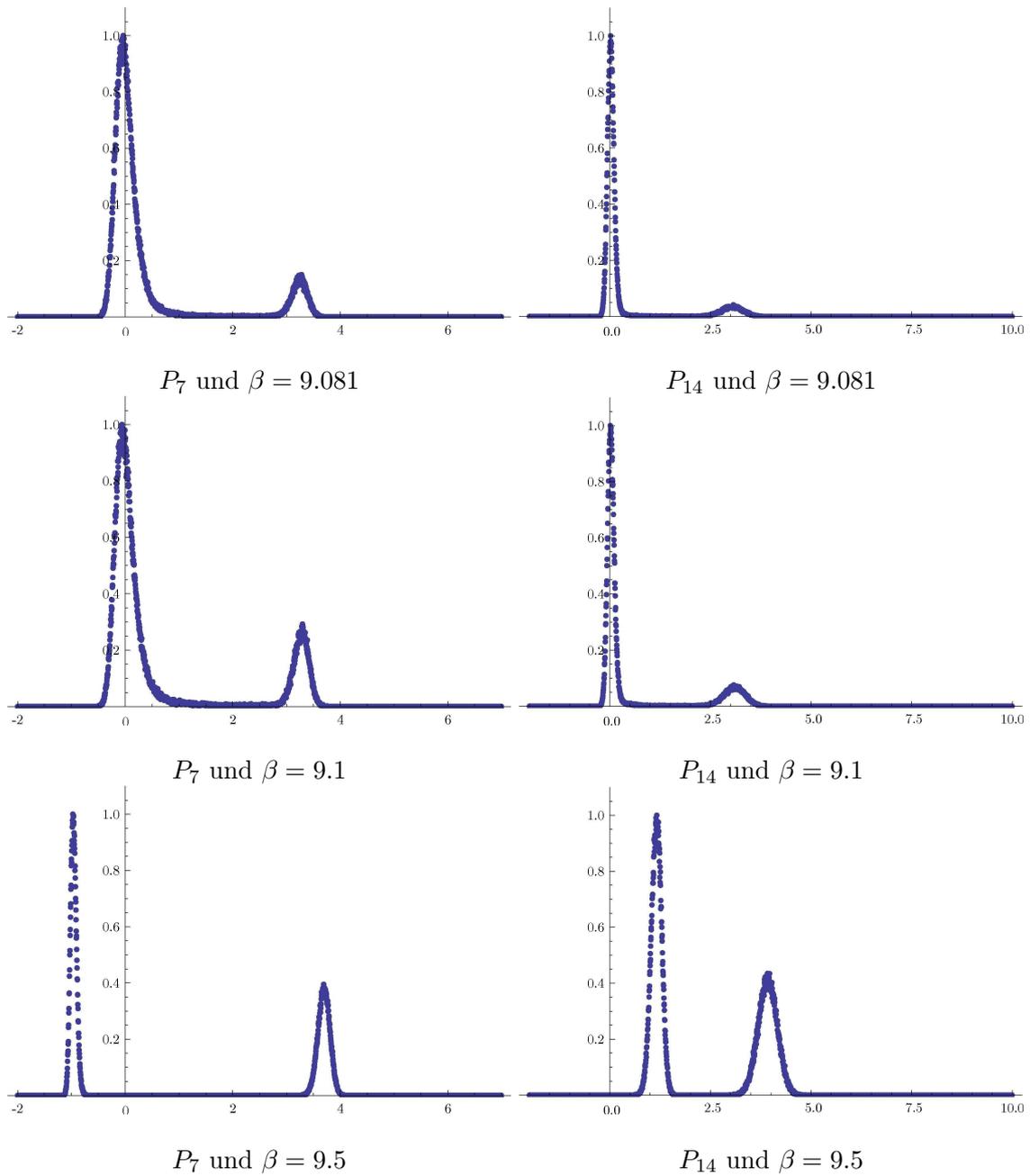


Abbildung 12.14: Histogramme des Polyakov-Loops auf dem $6^3 \times 2$ -Gitter

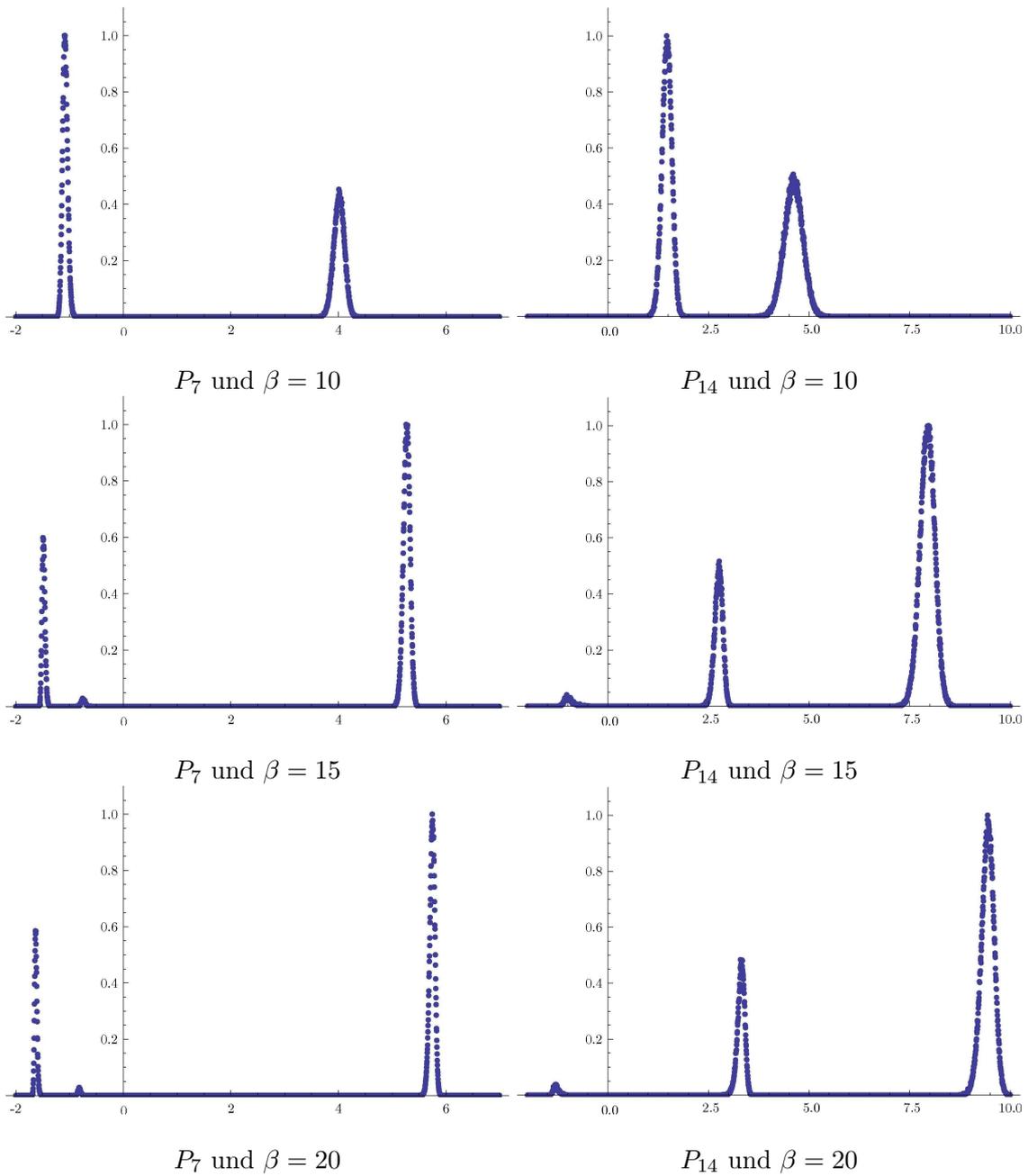


Abbildung 12.15: Histogramme des Polyakov-Loops auf dem $6^3 \times 2$ -Gitter

12.5 Das Quark-Antiquark Potential

Nachdem in dieser Arbeit bislang nur der Polyakov-Loop als Observable in Eichtheorien betrachtet wurde, soll jetzt das statische Quark-Antiquark-Potential untersucht werden. Hierzu soll insbesondere die *string tension* in verschiedenen irreduziblen Darstellungen der G_2 gemessen werden. Weil in G_2 -Eichtheorie aufgrund der dynamischen Erzeugung von Gluonen, die, wie bereits gezeigt, ebenfalls Farbe abschirmen können, keine asymptotische *string tension* existiert, kann nur eine *intermediate string tension* gemessen werden. Das Potential wächst nur in einem Bereich bis $r_c = 8$ [30] linear und wird danach wieder flacher. Zur Erinnerung werden hier noch einmal die wesentlichen Gleichungen aus Kapitel 4 angegeben. Wilson-Loops in der Darstellung r haben die Form

$$-\ln W_r(R, T) = C_r + V_r(R)T \quad \text{für große } T \quad (12.58)$$

mit dem statischen Quark-Antiquark-Potential

$$V_r(R) = c_r - \frac{\alpha}{R} + \sigma_r R \quad (12.59)$$

12.5.1 Casimir scaling

Verschiedene Modelle für Confinement-Mechanismen [32] sagen voraus, dass das Verhältnis von Stringspannungen in verschiedenen Darstellungen gleich dem Verhältnis der Eigenwerte c_μ des quadratischen Casmiroperators ist.

$$\sigma_\mu = \frac{c_\mu}{c_{(1,0)}} \sigma_{(1,0)} \quad (12.60)$$

Dies wird als *Casimir scaling* bezeichnet. Der Eigenwert zur Darstellung $\mu = (n_1, n_2)$ berechnet sich wie folgt

$$c_\mu = 2n_1^2 + 6n_2^2 + 6n_1n_2 + 10n_1 + 18n_2 \quad (12.61)$$

In der folgenden Tabelle sind die Eigenwerte des quadratischen Casmiroperators c_μ für einige Darstellungen angegeben sowie das vorausgesagte Verhältnis der *string tension*

Darstellung μ	(1, 0)	(0, 1)	(1, 1)	(2, 0)	(0, 2)	(3, 0)
Dimension von μ	7	14	64	27	77	77
Eigenwert c_μ	12	24	42	28	60	48
Verhältnis $\sigma_\mu/\sigma_{(1,0)}$	1	2	3.5	2.333	5	4

12.5.2 Smearing

Der Überlapp von großen Wilson-Loops mit dem Vakuum ist nur sehr gering. Aus diesem Grund ist es fast nicht möglich, die *string tension* in höheren Darstellungen zu messen. Aufgrund von UV-Effekten fällt der Wilsonloop bei kleinen Abständen sehr schnell ab. Um diesen Effekt zu reduzieren, wurde in [66, 67] eine Technik beschrieben, die das Abfallverhalten von kleinen Wilson-Loops reduziert. Sie wird als *stout smearing* bezeichnet. Dabei berechnet sich ein verschmierter Link $\mathcal{U}_{x,\mu}^{(1)}$ wie folgt aus einem Link $\mathcal{U}_{x,\mu}^{(0)} = \mathcal{U}_{x,\mu}$

$$C_{x,\mu} = \rho R_{x,\mu} \quad (12.62)$$

$$\Omega_{x,\mu} = C_{x,\mu} \mathcal{U}_{x,\mu}^\dagger \quad (12.63)$$

$$\mathfrak{Q}_{x,\mu} = \frac{1}{\gamma} \text{tr} (\Omega_{x,\mu} \mathfrak{T}_a) \mathfrak{T}_a \quad (12.64)$$

$$\mathcal{U}_{x,\mu}^{(1)} = \exp (i \mathfrak{Q}_{x,\mu}) \mathcal{U}_{x,\mu}^{(0)} \quad (12.65)$$

wobei $R_{x,\mu}$ der Staple ist und ρ ein *smearing*-Parameter. Nun kann man eine Folge von Links definieren durch

$$\mathcal{U}_{x,\mu}^{(n+1)} = \exp \left(i \mathfrak{Q}_{x,\mu}^{(n)} \right) \mathcal{U}_{x,\mu}^{(n)} \quad (12.66)$$

In dieser Arbeit wird folgende *smearing*-Prozedur angewendet

- Setze Linkfeld $\mathcal{U}_{x,\mu}^{(0)} = \mathcal{U}_{x,\mu}$ für alle (x, μ)
- Schleife $i = 1$ bis $i = N_{\text{sm}}$ mit N_{sm} als Anzahl der *smearing*-Schritte
- Schleife über alle (x, μ)
- Berechne $\mathcal{U}_{x,\mu}^{(i)} = \exp \left(i \mathfrak{Q}_{x,\mu}^{(i-1)} \right) \mathcal{U}_{x,\mu}^{(i-1)}$
- Berechne Wilsonloops mit $\mathcal{U}_{x,\mu}^{(i)}$

Vergleicht man diese *smearing*-Prozedur mit dem HMC-Algorithmus, so ist sie identisch wenn man nach jedem Schritt die Impulse auf Null setzt. Man sieht also, dass *stout smearing* die Wirkung minimiert. Die Plaketten sollten also für $\rho N_{\text{SM}} \rightarrow \infty$ gegen 1 gehen.

12.5.3 Simulationsergebnisse

Da Gleichung (12.58) nur für große Zeiten T gilt, müssen entsprechend große Gitter betrachtet werden. Aufgrund des *string breaking* reicht als räumliche Ausdehnung des Gitters 14. Die ersten Tests finden deshalb auf einem 14^4 -Gitter statt. Für die Kopplung wurde $\beta = 9.7$ in der Confinement-Phase gewählt, da dies kleinen Gitterabständen a entspricht und damit Wilson-Loops langsamer abfallen.

Das 14^4 -Gitter

Zunächst wird für festen Parameter $\rho = 0.1$ das Verhalten von Wilson-Loops in der fundamentalen Darstellung $(1, 0)$ mit zunehmender Anzahl der Smearing-Schritte N_{sm} untersucht. Dazu wurden 5000 Konfigurationen erzeugt mit maximalem $N_{\text{sm}} = 25$.

Der kleinste Wilson-Loop ist die Plakette. In Abb. 12.16 ist sie über der Anzahl der *smearing*-Schritte N_{SM} aufgetragen. Wie zu erwarten war werden Plaketten also sehr stark verändert. Es ist auch zu sehen, dass sie wie erwartet gegen 1 geht. Die Wirkung wird also auf einer gegebenen Konfiguration minimiert.

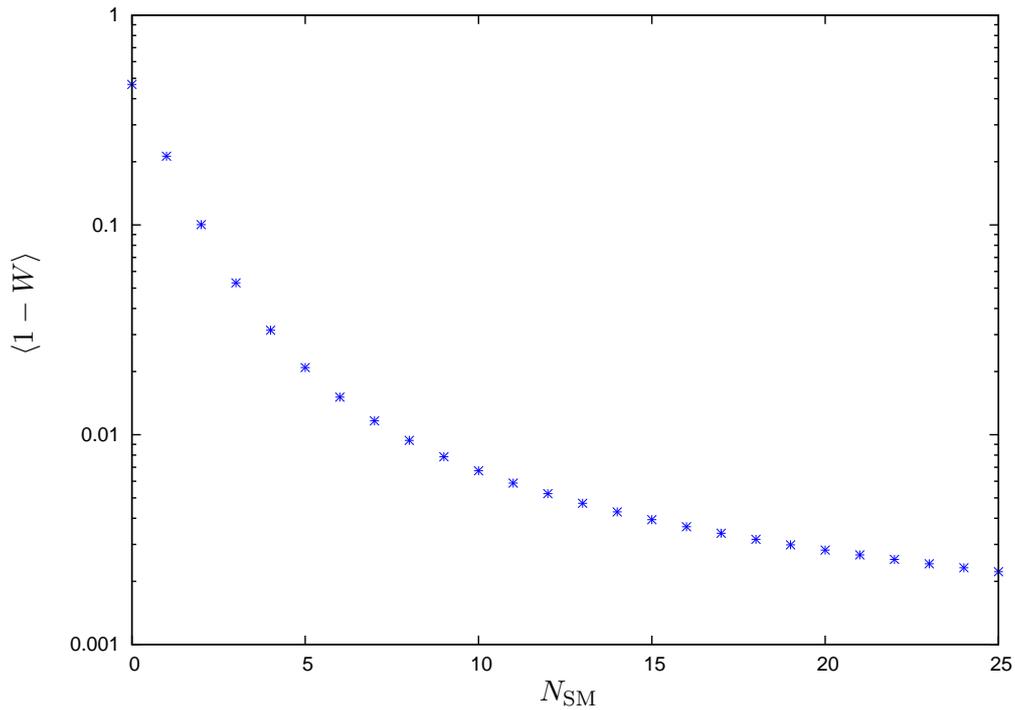


Abbildung 12.16: Plakette (berechnet mit verschmierten Links) in Abhängigkeit von der Anzahl der *smearing*-Schritte

Nun wird für verschiedene Werte von R der Wilson-Loop über der Zeit T betrachtet. Dies ist für $N_{SM} = 1$ und $N_{SM} = 15$ in den Abbildungen 12.17 und 12.18 zu sehen. Aus diesen Daten kann man erkennen, dass in guter Näherung ab $T = 3$ der lineare Zusammenhang aus Gl. 12.58 erfüllt ist. Deshalb wird das statische Quark-Antiquark-Potential aus diesen Daten beginnend bei $T = 3$ gefittet.

Nun soll untersucht werden, wie stark das *smearing* kleine und große Wilson-Loops verändert. Dazu wird für $R = 1$ und $R = 6$ der Wilson-Loop für verschiedene Werte von N_{SM} über der Zeit T aufgetragen. In Abb. 12.19 und 12.20 ist zu sehen, dass die Steigung der Geraden für große R weniger stark beeinflusst wird als für kleine R .

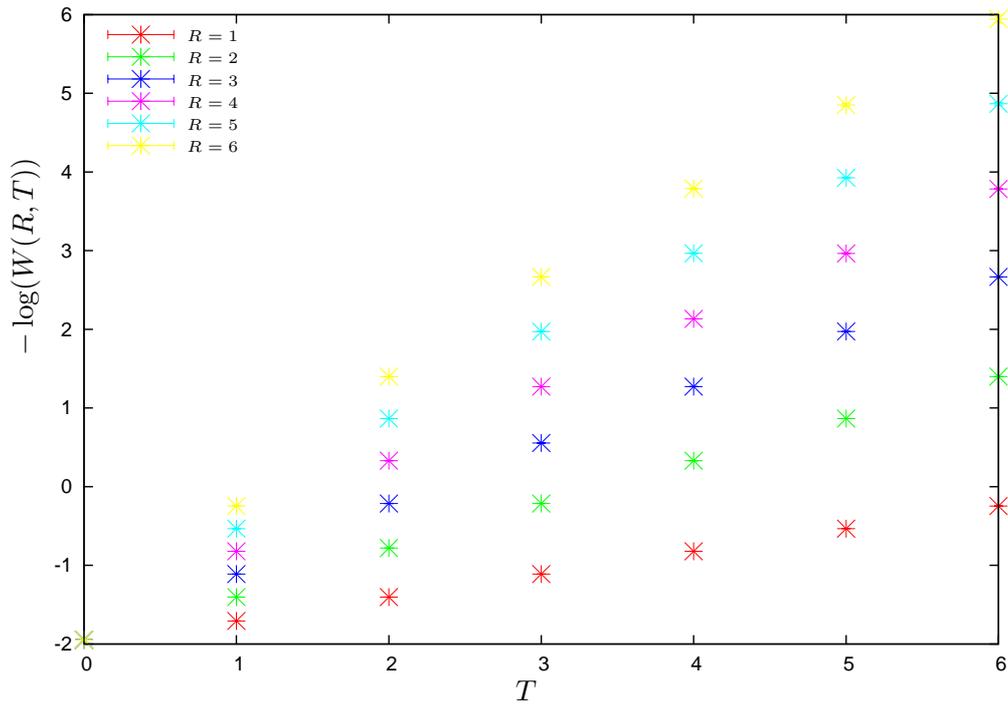


Abbildung 12.17: Wilson-Loops für $N_{\text{SM}} = 1$ über der Zeit T

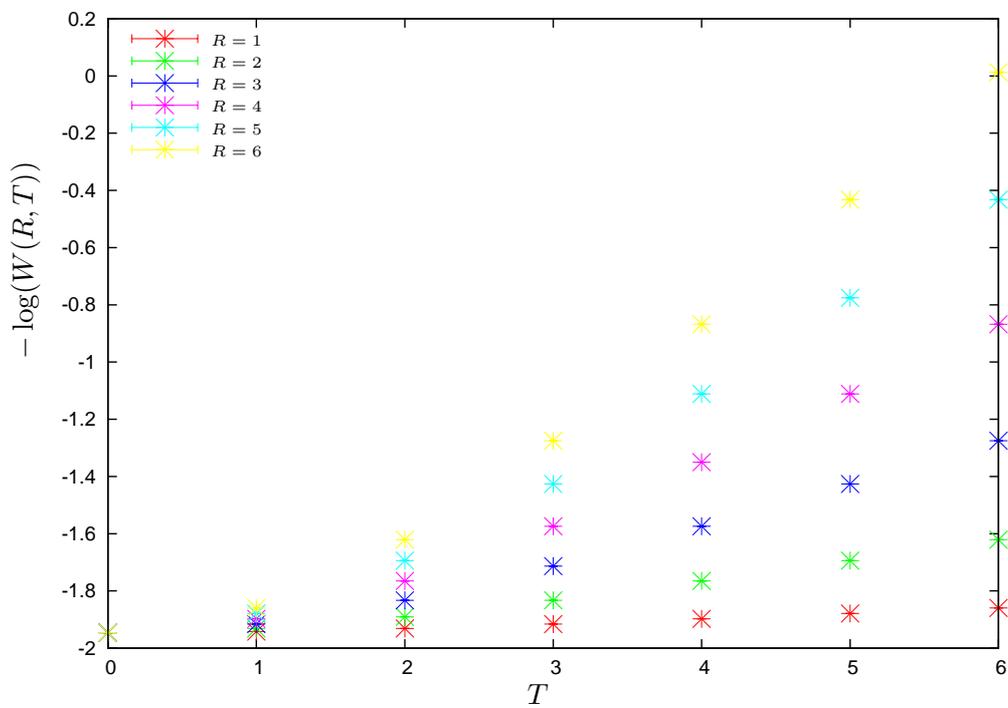


Abbildung 12.18: Wilson-Loop für $N_{\text{SM}} = 15$ über der Zeit T

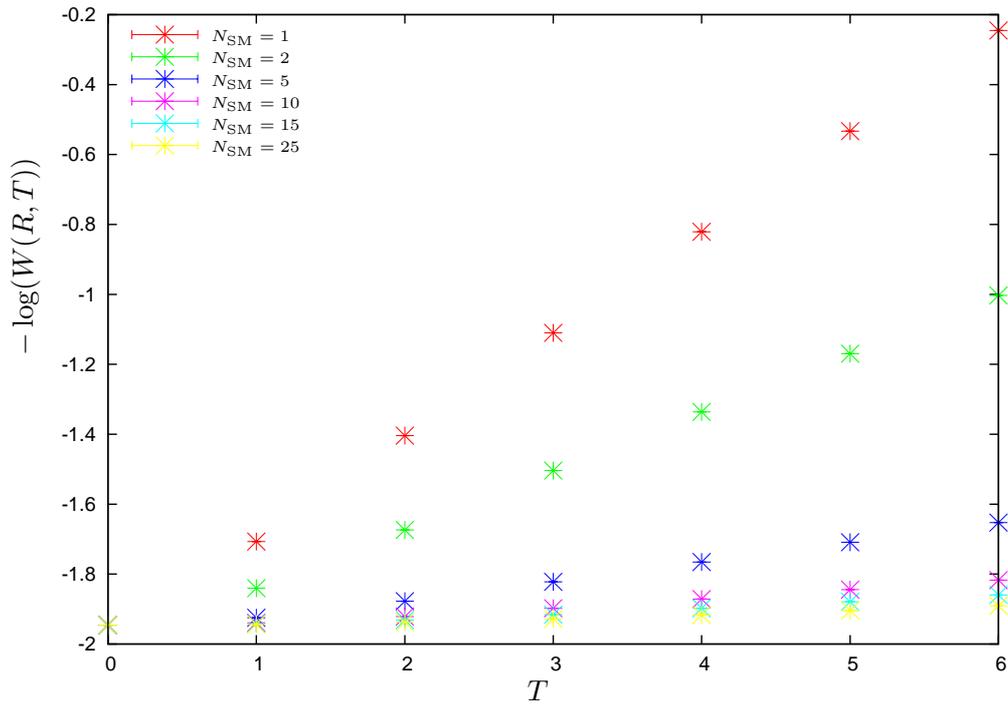


Abbildung 12.19: Wilson-Loop für $R = 1$ über der Zeit T

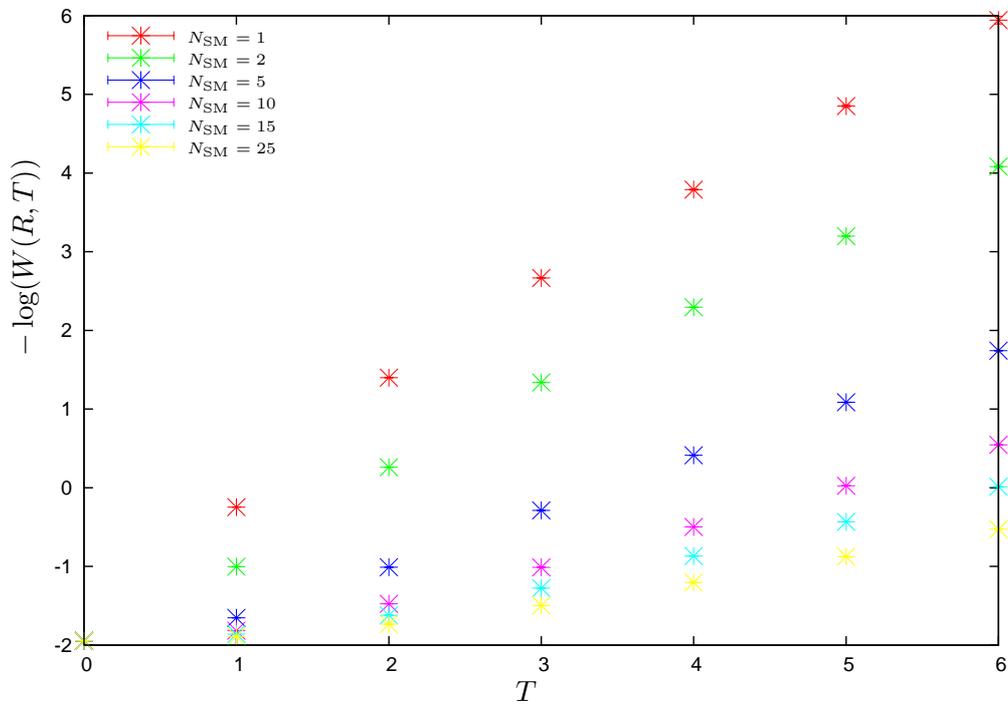


Abbildung 12.20: Wilson-Loop für $R = 6$ über der Zeit T

In Abb. 12.21 ist das Potential in der fundamentalen $(1, 0)$ -Darstellung für verschiedene Werte von N_{SM} dargestellt.

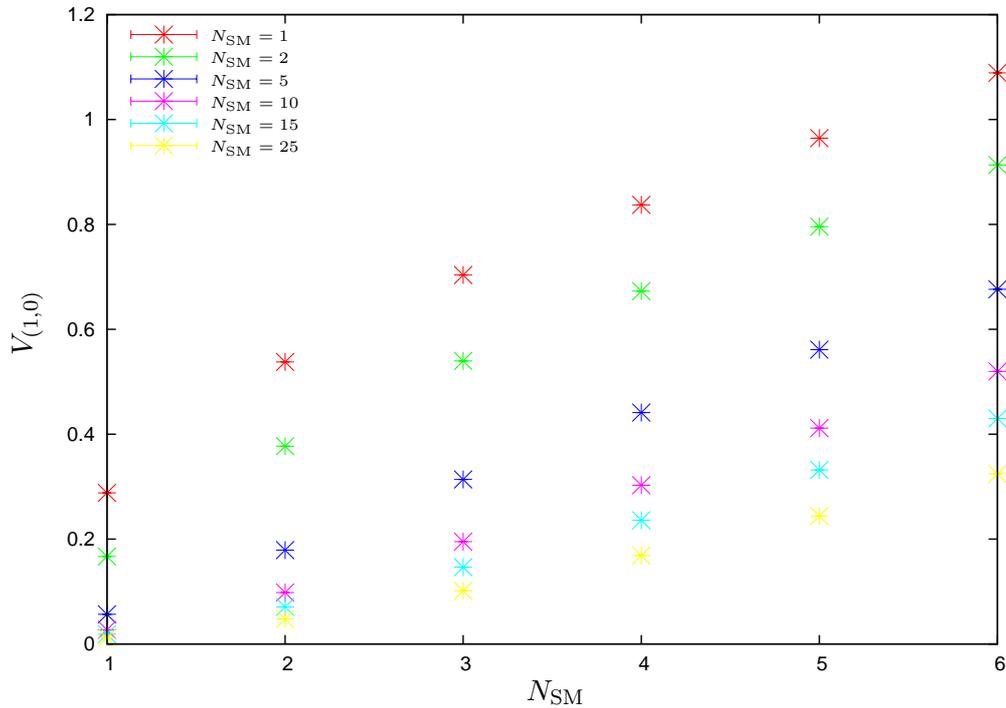


Abbildung 12.21: Potential in der $(1, 0)$ -Darstellung für verschiedene Anzahl von *smearing*-Schritten

Es ist zu sehen, dass der Coulomb-Anteil sich sehr stark ändert während der lineare Anteil stabiler bleibt, allerdings auch nicht konstant ist. Aus diesem Grund wird die *string tension* hier nur durch einen linearen Ansatz im Bereich $R = 4 \dots 6$ gefittet. Dies ist für verschiedene Darstellungen in Abb. 12.22 geschehen. Hier ist die *string tension* über N_{SM} aufgetragen. Man sieht eine starke Abhängigkeit von der Anzahl der *smearing*-Schritte N_{SM} . Das Verhältnis zwischen verschiedenen Darstellungen ist jedoch nahezu konstant, was in Abb. 12.23 zu sehen ist. Die durchgezogenen Linien sind die Vorhersagen des *Casimir scaling*. Auf diesem Gitter sieht man also noch sehr starke Abweichungen zum vermuteten *Casimir scaling*. Da Simulationen auf diesen großen Gittern sehr zeitaufwendig sind konnte dies in dieser Arbeit nicht mehr durchgeführt werden, soll aber Gegenstand zukünftiger Untersuchungen sein.

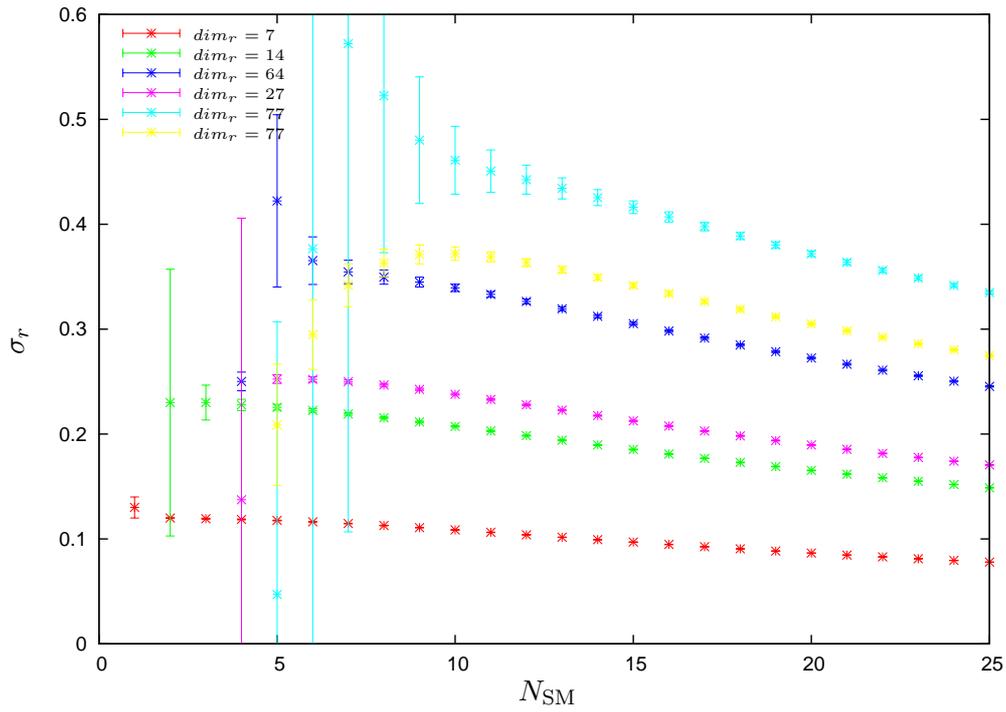


Abbildung 12.22: *string tension* für verschiedene Darstellungen über der Anzahl der *smearing*-Schritte

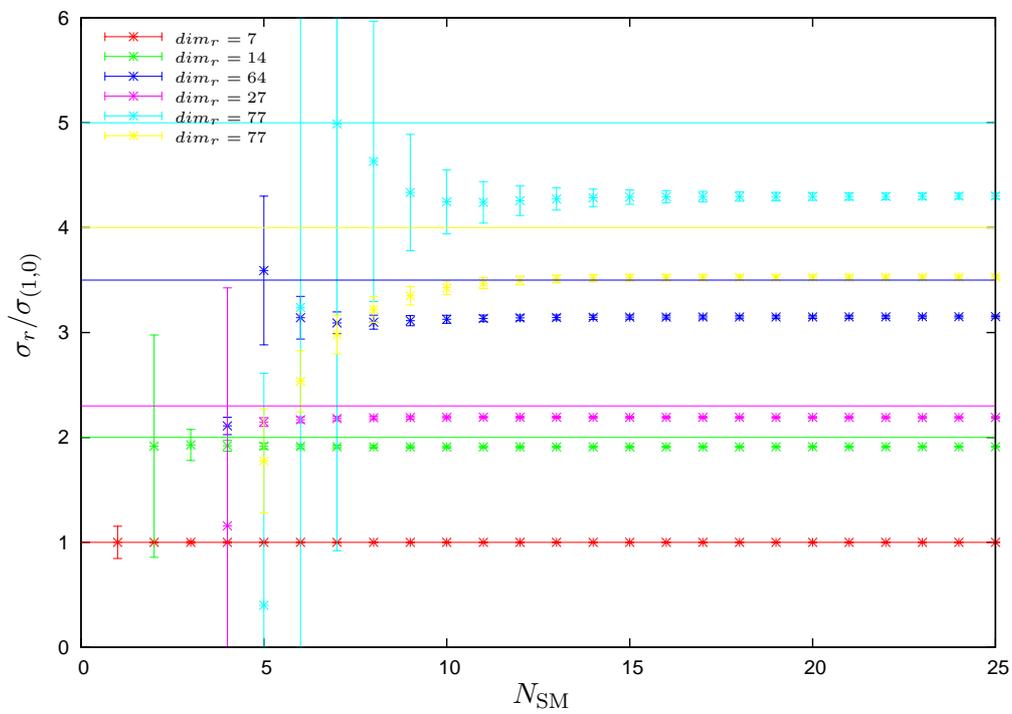


Abbildung 12.23: *Casimir scaling* für verschiedene Darstellungen über der Anzahl der *smearing*-Schritte

12.6 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde die G_2 -Eichtheorie auf dem Gitter untersucht. Dazu wurde nach theoretischen Vorbetrachtungen ein Algorithmus entwickelt um G_2 -Eichtheorie zu simulieren. Es wurde auf verschiedenen Gittern der Polyakov-Loop in beiden fundamentalen Darstellungen der G_2 betrachtet und die kritische Kopplung sowie die Art des Phasenübergangs auf dem Gitter bestimmt. Dabei hat sich gezeigt, dass der Polyakov-Loop in der Deconfinement-Phase verschiedene Werte annimmt, die mit einer nicht exakten $SU(3)$ -Zentrumssymmetrie in Verbindung gebracht wurden.

Des Weiteren wurde das statische Quark-Antiquark-Potential gemessen sowie die *string tension* bestimmt. Die betrachteten Gitter sind jedoch noch zu klein, um Kontinuumsaussagen treffen oder *Casimir scaling* zeigen zu können. Es konnte jedoch gezeigt werden, dass die verwendete *smearing*-Prozedur das Verhältnis von Stringsparnungen in verschiedenen Darstellungen nur wenig ändert und den Überlapp von großen Wilson-Loops mit dem Vakuum erhöht.

13 Effektive Polyakov-Loop-Modelle für G_2 Eichtheorie

In diesem Kapitel soll genauso wie für $SU(3)$ -Yang-Mills eine effektive Wirkung gefunden werden die in der Lage ist, das Verhalten des Polyakov-Loops am Confinement-Deconfinement-Phasenübergang der mikroskopischen Yang-Mills-Theorie wiederzugeben. Im Unterschied zu $SU(3)$ gibt es hier jedoch keine Symmetrien die die Wahl einer Wirkung einschränken, was im Prinzip mehr Spielraum für die Konstruktion einer Wirkung lässt. Wie für $SU(3)$ soll auch hier als Ausgangspunkt die starke Kopplungsentwicklung der Wilson-Wirkung genommen werden. Aus dieser entsteht ein minimales Modell, welches zunächst getestet werden soll. Da im vorherigen Kapitel deutlich wurde, dass das Zentrum der $SU(3)$ zwar keine exakte Symmetrie für G_2 darstellt, jedoch auch eine wichtige Rolle zu spielen scheint, wird danach ein erweitertes Modell untersucht, welches durch die $SU(3)$ -effektive Wirkung motiviert wird.

13.1 Starke Kopplungs-Entwicklung für G_2

Die für $SU(N)$ detailliert beschriebene starke Kopplungsentwicklung ist auch auf G_2 direkt anwendbar, wobei es für G_2 jedoch keinen Unterschied zwischen der Darstellung selbst und ihrer komplex konjugierten Darstellung gibt. In führender Ordnung ergibt sich damit als effektive Wirkung Gl. (13.1).

$$S_{\text{eff}} = \lambda_7 \underbrace{\sum_{\langle xy \rangle} \chi_{(1,0)}(\mathcal{P}_x) \chi_{(1,0)}(\mathcal{P}_y)}_{S_{(1,0)}} + \lambda_{14} \underbrace{\sum_{\langle xy \rangle} \chi_{(0,1)}(\mathcal{P}_x) \chi_{(0,1)}(\mathcal{P}_y)}_{S_{(0,1)}} \quad (13.1)$$

Das Modell mit dieser Wirkung wird im Folgenden als *einfaches Modell* bezeichnet. Die weiteren Terme in 2. Ordnung der Entwicklung sind

$$S_{(2,0)} = \sum_{\langle xy \rangle} \chi_{(2,0)}(\mathcal{P}_x) \chi_{(2,0)}(\mathcal{P}_y) \quad (13.2)$$

$$S_{(0,2)} = \sum_{\langle xy \rangle} \chi_{(0,2)}(\mathcal{P}_x) \chi_{(0,2)}(\mathcal{P}_y) \quad (13.3)$$

$$S_{(1,1)} = \sum_{\langle xy \rangle} \chi_{(1,1)}(\mathcal{P}_x) \chi_{(1,1)}(\mathcal{P}_y) \quad (13.4)$$

$$S_{(1,0)^2} = \sum_{\langle xy \rangle} (\chi_{(1,0)}(\mathcal{P}_x) \chi_{(1,0)}(\mathcal{P}_y))^2 \quad (13.5)$$

$$S_{(0,1)^2} = \sum_{\langle xy \rangle} (\chi_{(0,1)}(\mathcal{P}_x) \chi_{(0,1)}(\mathcal{P}_y))^2 \quad (13.6)$$

$$S_{(1,0)(0,1)} = \sum_{\langle xy \rangle} \chi_{(1,0)}(\mathcal{P}_x) \chi_{(0,1)}(\mathcal{P}_x) \chi_{(1,0)}(\mathcal{P}_y) \chi_{(0,1)}(\mathcal{P}_y) \quad (13.7)$$

Bis zur 2. Ordnung der Entwicklung erhält man also 8 unabhängige Terme. Die Darstellung der Charaktere in fundamentalen Charakteren der G_2 ist im Kapitel 3 angegeben.

13.2 Phasendiagramm der effektiven Wirkung

Zunächst wird das *einfache Modell* untersucht, welches nur fundamentale Darstellungen enthält. Dies geschieht hier analytisch über eine klassische Betrachtung der Wirkung und danach mit Hilfe von Monte-Carlo-Methoden.

13.2.1 Klassische Analyse

Für eine klassische Analyse des Modells wird das Gitter Γ in zwei Untergitter

$$\Gamma_u = \{x, y, z | (-1)^{x+y+z} = -1\} \quad (13.8)$$

und

$$\Gamma_g = \{x, y, z | (-1)^{x+y+z} = 1\} \quad (13.9)$$

aufgeteilt. Auf jedem Untergitter wird angenommen, dass der Polyakov-Loop konstant ist, also dass gilt

$$\chi_r(\mathcal{P}_x) = \chi_r(\mathcal{P}_g) \quad \text{für } x \in \Gamma_g \quad (13.10)$$

$$\chi_r(\mathcal{P}_x) = \chi_r(\mathcal{P}_u) \quad \text{für } x \in \Gamma_u \quad (13.11)$$

Damit lässt sich die Wirkung schreiben als

$$S_{\text{eff}} = 6V (\lambda_7 \chi_{(1,0)}(\mathcal{P}_g) \chi_{(1,0)}(\mathcal{P}_u) + \lambda_{14} \chi_{(0,1)}(\mathcal{P}_g) \chi_{(0,1)}(\mathcal{P}_u)) \quad (13.12)$$

Nun werden die Minima dieser Wirkung im Fundamentalebereich von G_2 gesucht. In den Abb 13.1 und 13.2 sind der Polyakov-Loop $P = \frac{1}{2} (\chi_{(1,0)}(\mathcal{P}_g) + \chi_{(1,0)}(\mathcal{P}_u))$ sowie die Magnetisierung $M = \frac{1}{2} |\chi_{(1,0)}(\mathcal{P}_g) - \chi_{(1,0)}(\mathcal{P}_u)|$ dargestellt.

Nach dieser klassischen Analyse des Modells ergeben sich folgende Phasen

- $P = (7, 14)$ und $M = (0, 0)$ *ferromagnetische Phase*
- $P = (2.5, 9.5)$ und $M = (4.5, 4.5)$ *antiferromagnetische Phase*
- $P = (3, 6)$ und $M = (4, 8)$ *antiferromagnetische Phase*

Man erhält also eine *ferromagnetische Phase* sowie zwei *antiferromagnetische Phasen*. In Abbildung 13.3 sind diese Phasen im Fundamentalebereich der G_2 zu sehen. Der Polyakov-Loop in der *ferromagnetischen Phase* (rot) entspricht dem e -Element der Gruppe. Die *antiferromagnetischen Phasen* (rot und grün) enthalten ein Untergitter mit Polyakov-Loop am e -Element und das andere Untergitter mit Polyakov-Loop an den Punkten $(-2, 5)$ bzw. $(-1, -2)$. Zusätzlich sollte um $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0)$ eine symmetrische Phase existieren. Nach dieser klassischen Analyse sollen jetzt Monte-Carlo-Simulationen durchgeführt werden.

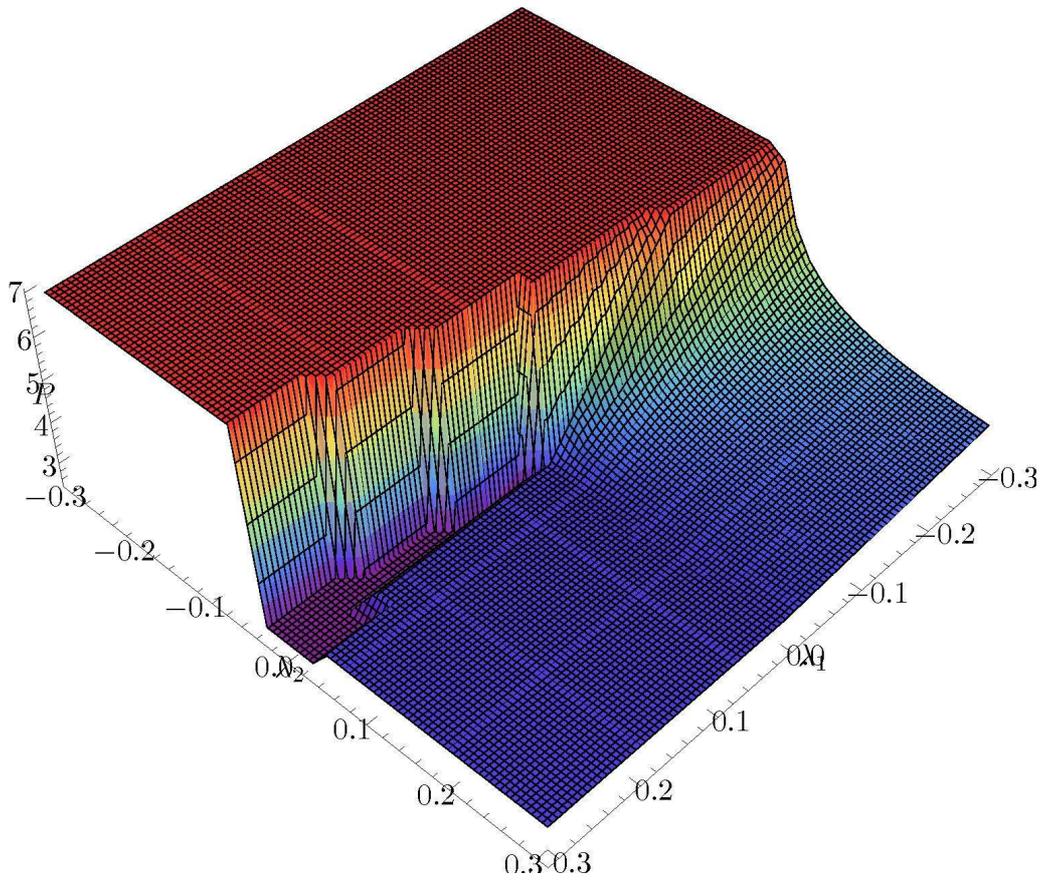


Abbildung 13.1: Klassisches Phasendiagramm (Polyakov-Loop) des *einfachen Modells*

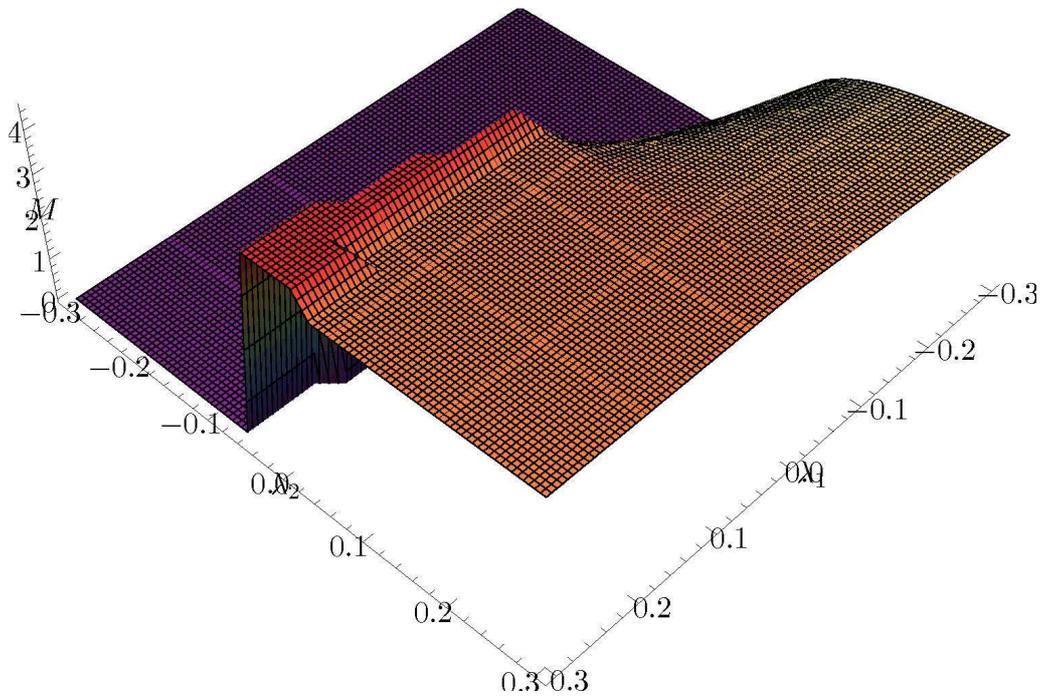
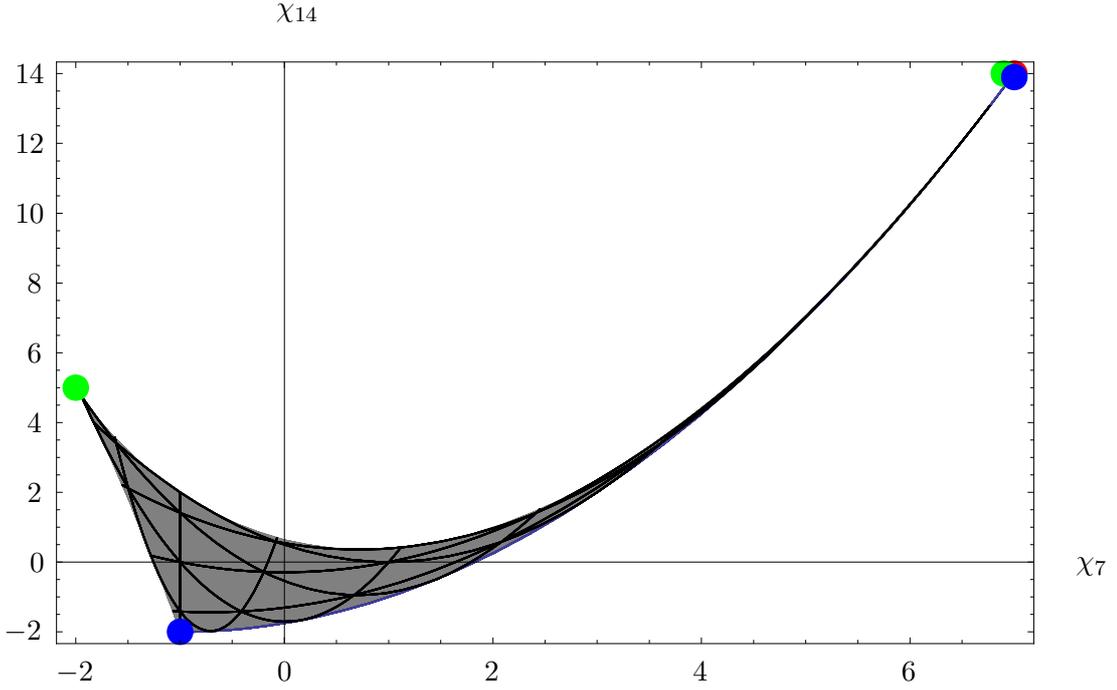


Abbildung 13.2: Klassisches Phasendiagramm (Magnetisierung Polyakov-Loop) des *einfachen Modells*


 Abbildung 13.3: Phasen im Fundamentalbereich von G_2

13.2.2 Monte-Carlo-Simulation

Es wurde ein Phasendiagramm des *einfaches Modells* im Bereich $(\lambda_1, \lambda_2) = (-0.3, -0.3)$ bis $(\lambda_1, \lambda_2) = (0.3, 0.3)$ erstellt. Das Ergebnis für den Polyakov-Loop in der (7)-Darstellung ist in Abb. 13.4 dargestellt und in Abb. 13.5 ist seine Magnetisierung zu sehen.

In Übereinstimmung von klassischer Betrachtung und Monte-Carlo-Simulationen ist zu sehen, dass eine Phase existiert mit $P = 0$ und verschwindender Magnetisierung (*symmetrische Phase*), eine Phase mit $P \neq 0$ und $M = 0$ (*ferromagnetische Phase*) sowie zwei Phasen mit $P \neq 0$ und $M \neq 0$ (*antiferromagnetische Phasen*). Trotz der reichhaltigen Phasenstruktur dieses *einfachen Modells* fehlt eine Phase in der der Polyakov-Loop in der 7-dimensionalen Darstellung kleiner als Null ist. Da in der Yang-Mills-Theorie eine solche Phase jedoch als Rest einer $\mathcal{Z}(3)$ -Symmetrie auftritt, ist dieses Modell als effektive Wirkung also nicht geeignet und muss um zusätzliche Terme erweitert werden. Die aus den Erfahrungen mit $SU(3)$ -Yang-Mills naheliegende einfachste Erweiterung ist die Hinzunahme eines Terms der quadratisch in der (1,0)-Darstellung ist. Für die im Folgenden *erweitertes Modell* genannte effektive Wirkung ergibt sich damit

$$S_{\text{eff}} = \lambda_7 \sum_{\langle xy \rangle} \chi_{(1,0)}(\mathcal{P}_x) \chi_{(1,0)}(\mathcal{P}_y) + \lambda_{14} \sum_{\langle xy \rangle} \chi_{(0,1)}(\mathcal{P}_x) \chi_{(0,1)}(\mathcal{P}_y) \quad (13.13)$$

$$+ \lambda_{7^2} \sum_{\langle xy \rangle} (\chi_{(1,0)}(\mathcal{P}_x) \chi_{(1,0)}(\mathcal{P}_y))^2 \quad (13.14)$$

Simulationen haben gezeigt, dass dieser Zusatzterm dem Modell die erforderliche Phase hinzufügt und damit sollte es jetzt möglich sein, die Yang-Mills-Theorie mit Dämon-Methoden und Schwinger-Dyson-Gleichungen zu untersuchen.

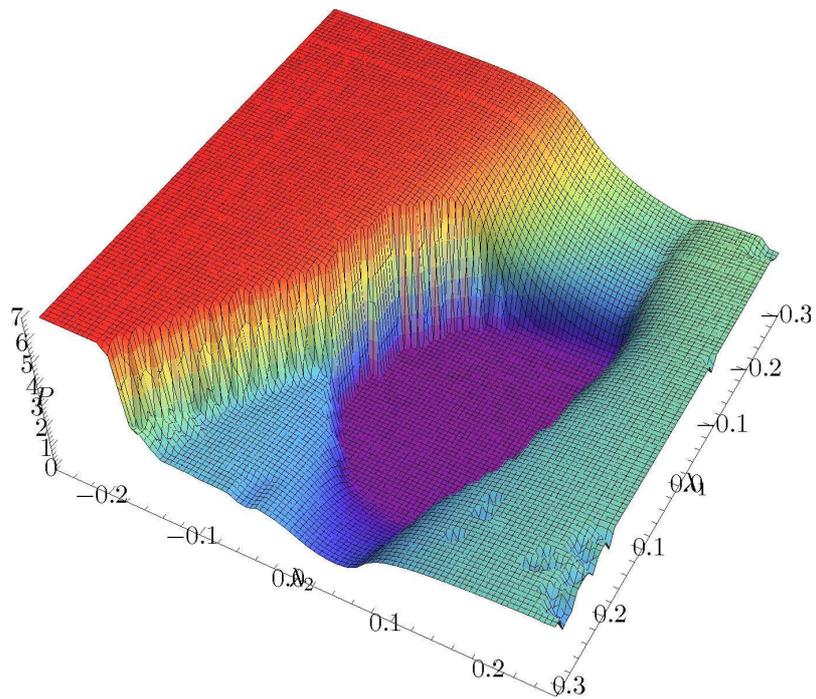


Abbildung 13.4: Monte-Carlo Phasendiagramm (Polyakov-Loop) des *einfachen Modells*

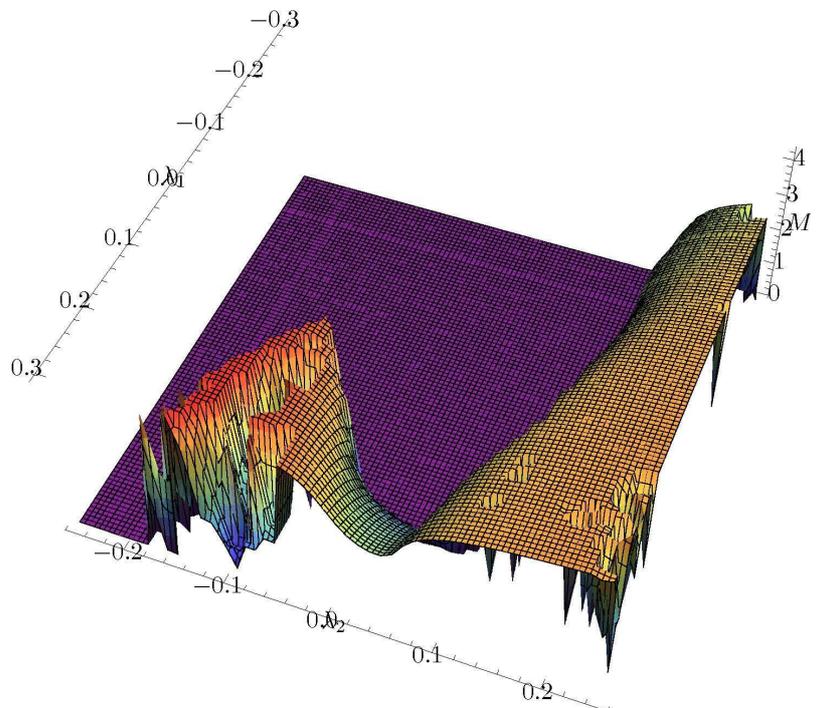


Abbildung 13.5: Monte-Carlo Phasendiagramm (Magnetisierung Polyakov-Loop) des *einfachen Modells*

13.3 Ergebnisse der Dämon-Methode für die effektive Wirkung

In diesem Abschnitt soll die Dämon-Methode, die bereits für $SU(3)$ und $SU(4)$ -Yang-Mills gute Ergebnisse lieferte, nun auf G_2 -Yang-Mills angewendet werden. Dazu werden zunächst drei Gitter mit dem *einfachen Modell* untersucht. Wie bereits vermutet, kann dieses *einfache Modell* nur auf dem $12^3 \times 2$ -Gitter erfolgreich sein, es wird hier dennoch auch auf andere Gitter angewendet. Im Anschluss wird dann das *erweiterte Modell* auf den größeren Gittern benutzt. Auf allen Gittern wurde der kanonische Dämon mit einer mikrokanonischen Statistik von 1000 Konfigurationen bei einer Thermalisierungszeit von ebenfalls 1000 Konfigurationen angewendet. Es wurden dabei jeweils 5000 Konfigurationen aus dem Yang-Mills-Ensemble verwendet, womit sich also eine gesamte mikrokanonische Statistik von 5 Millionen Konfigurationen ergibt.

13.3.1 Das $12^3 \times 2$ -Gitter

In Abb. 13.6 ist zu sehen, dass der kanonische Dämon die Yang-Mills-Theorie im untersuchten Bereich sowohl in der $(1, 0)$ - als auch in der $(0, 1)$ -Darstellung gut reproduzieren kann. Lediglich direkt am Phasenübergang liefert die effektive Theorie in beiden Darstellungen zu große Werte für den Polyakov-Loop. Für diese Werte von β wurde aber auch der Polyakov-Loop in der Yang-Mills-Theorie hier nur unzureichend genau bestimmt. Die kritische Kopplung von effektiver Theorie und Yang-Mills-Theorie stimmt in der gewählten Auflösung überein.

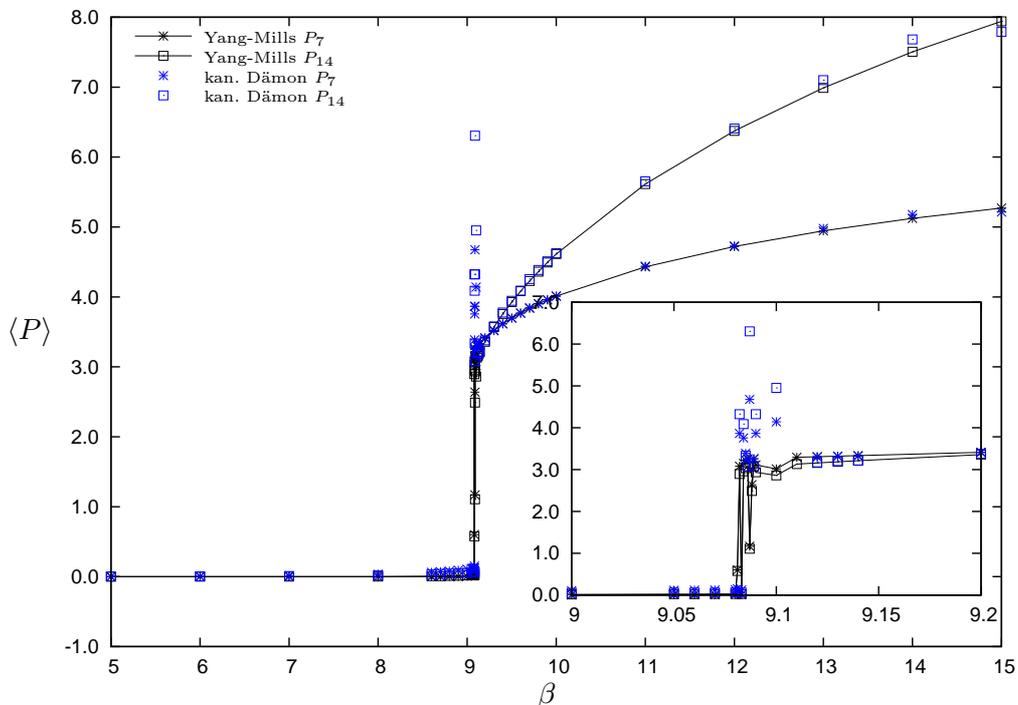


Abbildung 13.6: Dämon-Methode auf dem $12^3 \times 2$ -Gitter am Confinement-Deconfinement-Übergang

13.3.2 Das $16^3 \times 4$ -Gitter

Das $16^3 \times 4$ -Gitter wird hier benutzt um zu testen, ob das *erweiterte effektive Modell* den Polyakov-Loop mit negativem Vorzeichen reproduzieren kann. Die Ergebnisse sind in Abb. 13.7 für das 2-Kopplungs- sowie das 3-Kopplungsmodell zu sehen. Das 3-Kopplungsmodell ist in der Lage, alle Phasen korrekt wiederzugeben, während dies für das 2-Kopplungsmodell nur für Werte mit positivem Polyakov-Loop gilt.

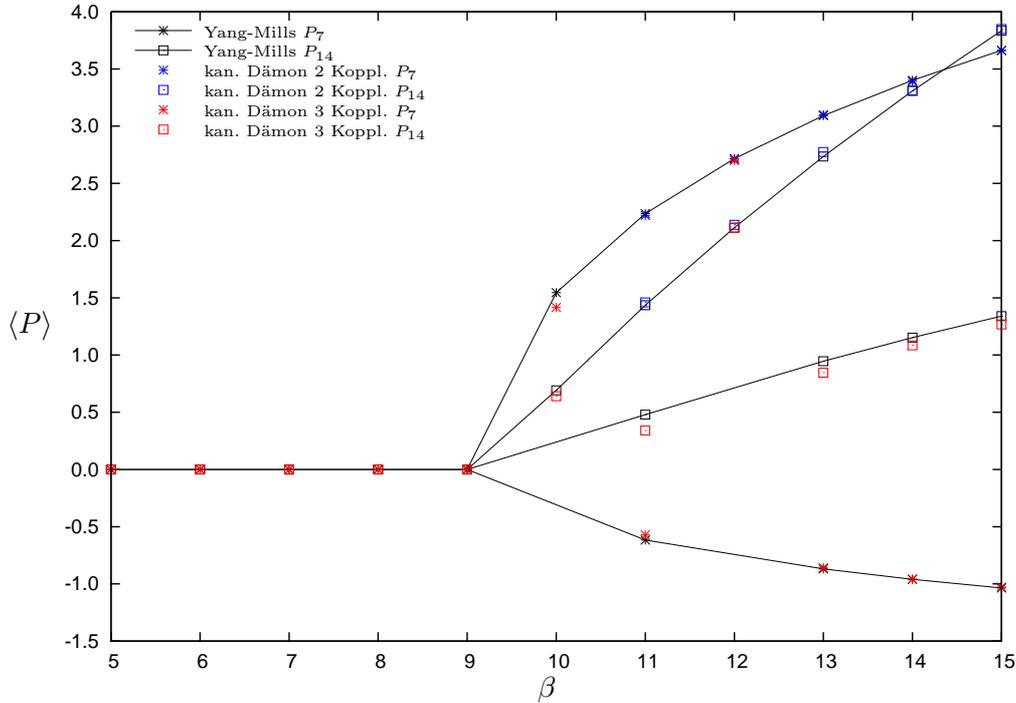


Abbildung 13.7: Dämon-Methode auf dem $16^3 \times 4$ -Gitter am Confinement-Deconfinement-Übergang

13.3.3 Das $16^3 \times 6$ -Gitter

Zum Schluss wird auf dem $16^3 \times 6$ -Gitter noch die Verschiebung der kritischen Kopplung zu größeren β untersucht. Abbildung 13.8 zeigt den Polyakov-Loop in der $(1, 0)$ - und der $(0, 1)$ -Darstellung. Wie bereits in der $SU(3)$ -Theorie gesehen, fluktuieren die Werte des Polyakov-Loops in der effektiven Theorie am Phasenübergang sehr stark und die kritische Kopplung verschiebt sich leicht. Es fällt auf, dass der Polyakov-Loop in der adjungierten Darstellung wesentlich besser reproduziert werden kann. Hier ist der Sprung am Phasenübergang jedoch auch kleiner als für die $(1, 0)$ -Darstellung.

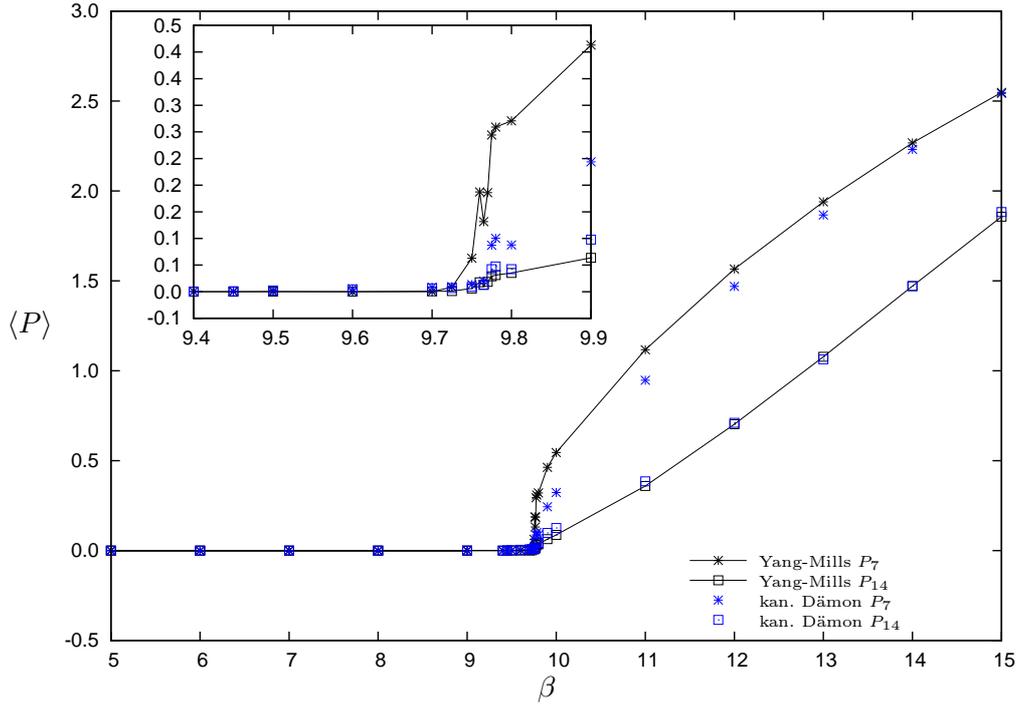


Abbildung 13.8: Dämon-Methode auf dem $16^3 \times 6$ -Gitter am Confinement-Deconfinement-Übergang

13.4 Ergebnisse der SDG für die effektive Wirkung

Die Anwendung von Schwinger-Dyson-Gleichungen auf G_2 -Eichtheorie hat ergeben, dass die für die Dämon-Methode betrachteten Modelle nicht ausreichen, um selbst auf dem $12^3 \times 2$ -Gitter den Polyakov-Loop zu reproduzieren. Insbesondere in der Confinement-Phase der Theorie werden die erhaltenen Kopplungen wesentlich größer als 1 und fluktuieren (in Abhängigkeit von der Statistik) sehr stark. Deshalb wird in diesem Abschnitt das folgende Modell betrachtet, welches die Kopplungen erheblich stabilisiert.

$$S_{\text{eff}} = \lambda_7 \sum_{\langle xy \rangle} \chi_{(1,0)}(\mathcal{P}_x) \chi_{(1,0)}(\mathcal{P}_y) + \lambda_{14} \sum_{\langle xy \rangle} \chi_{(0,1)}(\mathcal{P}_x) \chi_{(0,1)}(\mathcal{P}_y) \quad (13.15)$$

$$+ \lambda_{7^2} \sum_{\langle xy \rangle} (\chi_{(1,0)}(\mathcal{P}_x) \chi_{(1,0)}(\mathcal{P}_y))^2 + \lambda_{27} \sum_{\langle xy \rangle} \chi_{(2,0)}(\mathcal{P}_x) \chi_{(2,0)}(\mathcal{P}_y) \quad (13.16)$$

Es enthält zusätzlich zum bisher betrachteten Modell den Polyakov-Loop in der 27-dimensionalen Darstellung. Für die Klassenfunktionen $\{f\}$, die in die Schwinger-Dyson-Gleichungen eingehen, wurde hier folgende Wahl getroffen (ein Kriterium für die Wahl war, dass (wenn möglich) die 1. und 2. Ableitung der jeweiligen Wirkung nicht verschwindet):

$$\begin{aligned} f_7 &= \frac{\partial S_{(1,0)}}{\partial \chi_{(1,0)}} & f_{14} &= \frac{\partial S_{(0,1)}}{\partial \chi_{(0,1)}} \\ f_{7^2} &= \frac{\partial S_{(1,0)^2}}{\partial \chi_{(1,0)}} & f_{27} &= \frac{\partial S_{(2,0)}}{\partial \chi_{(1,0)}} \end{aligned} \quad (13.17)$$

Mit dem Fixieren der Klassenfunktion bleiben dann 2 verschiedene Schwinger-Dyson-Gleichungen (der Rang von G_2 ist 2) mit $p = 1$ und $p = 2$ übrig (siehe Gl. 8.51 und 8.52), die jetzt auf verschiedene Gitter angewendet werden sollen.

13.4.1 Das $12^3 \times 2$ -Gitter

In Abbildung 13.9 ist der Polyakov-Loop in der effektiven Theorie und der Yang-Mills-Theorie dargestellt. Sowohl für $p = 1$ als auch für $p = 2$ kann die effektive Theorie mit Kopplungen aus den Schwinger-Dyson-Gleichungen das Verhalten des Polyakov-Loops sehr gut reproduzieren. Die Schwinger-Dyson-Gleichungen mit $p = 1$ liefern direkt am Phasenübergang die besseren Resultate.

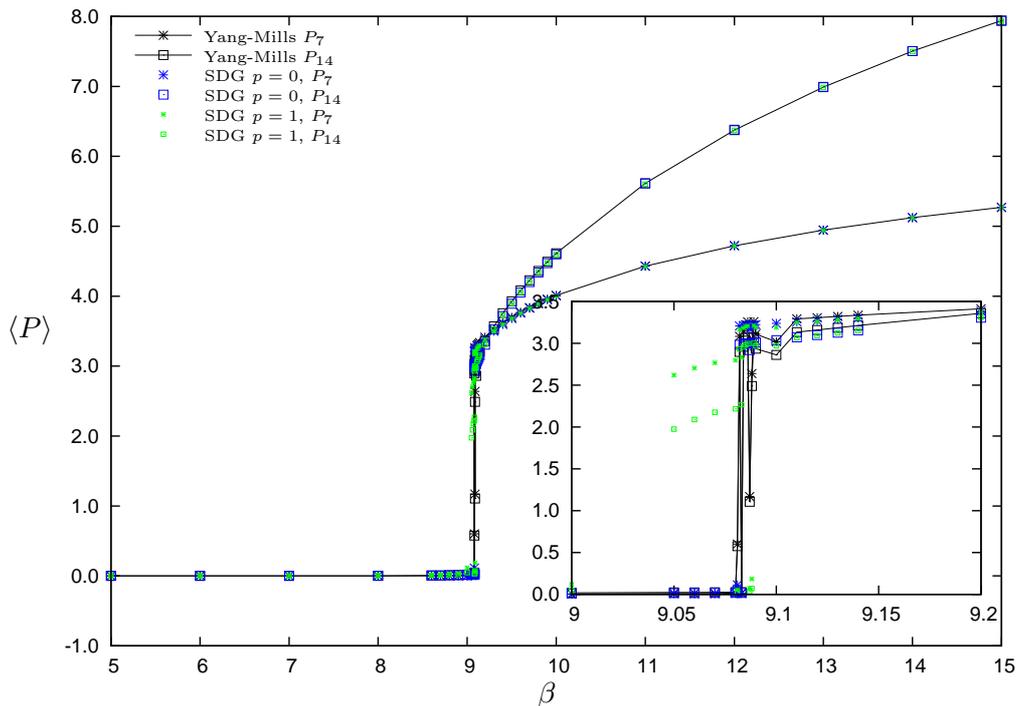


Abbildung 13.9: SDG auf dem $12^3 \times 2$ -Gitter am Confinement-Deconfinement-Übergang

13.4.2 Das $16^3 \times 4$ -Gitter

Auf dem $16^3 \times 4$ -Gitter zeigt sich, dass der Polyakov-Loop in der Deconfinement-Phase nur für positive Werte durch die Schwinger-Dyson-Gleichungen korrekt wiedergegeben werden kann. Für die negativen Werte des Polyakov-Loops konnte noch keine Trunkierung der effektiven Wirkung gefunden werden mit der eine Reproduktion möglich ist. Wie in $SU(3)$ -Eichtheorie ist auch hier der Phasenübergang in der effektiven Theorie zu größeren Kopplungen β verschoben. Auch hier liefern insgesamt die Gleichungen mit $p = 1$ die besseren Ergebnisse.

13.4.3 Das $16^3 \times 6$ -Gitter

Auf dem $16^3 \times 6$ -Gitter verschiebt sich der Phasenübergang nochmal zu größeren Kopplungen β . Die Schwinger-Dyson-Gleichungen mit $p = 1$ zeigen auch hier bessere Resultate.

13 Effektive Polyakov-Loop-Modelle für G_2 Eichtheorie

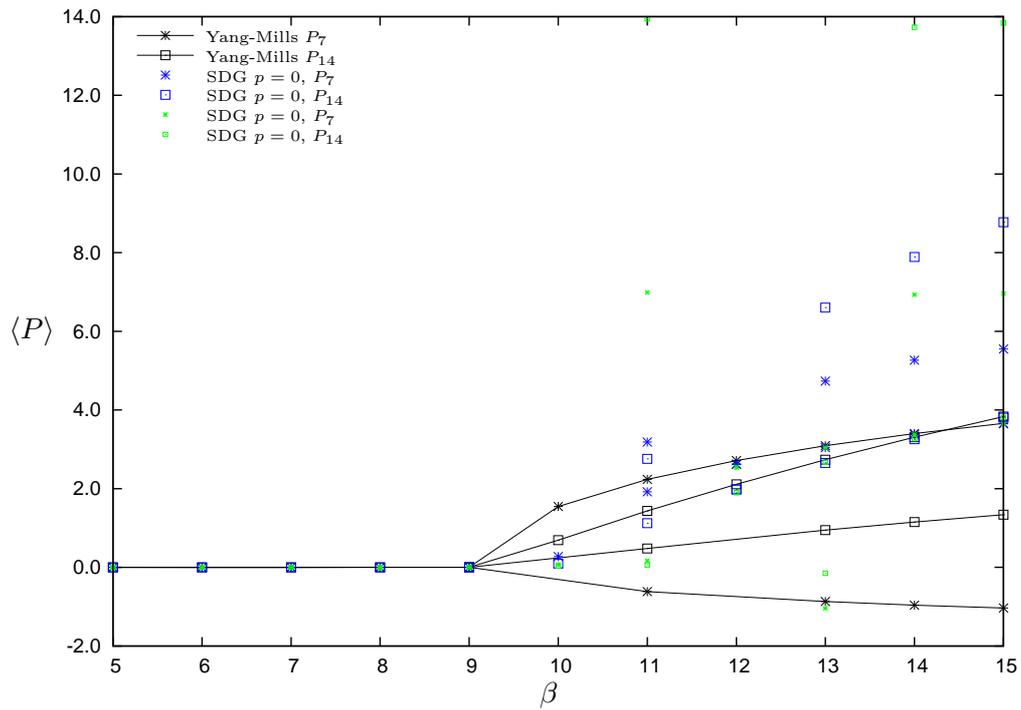


Abbildung 13.10: SDG auf dem $16^3 \times 4$ -Gitter am Confinement-Deconfinement-Übergang

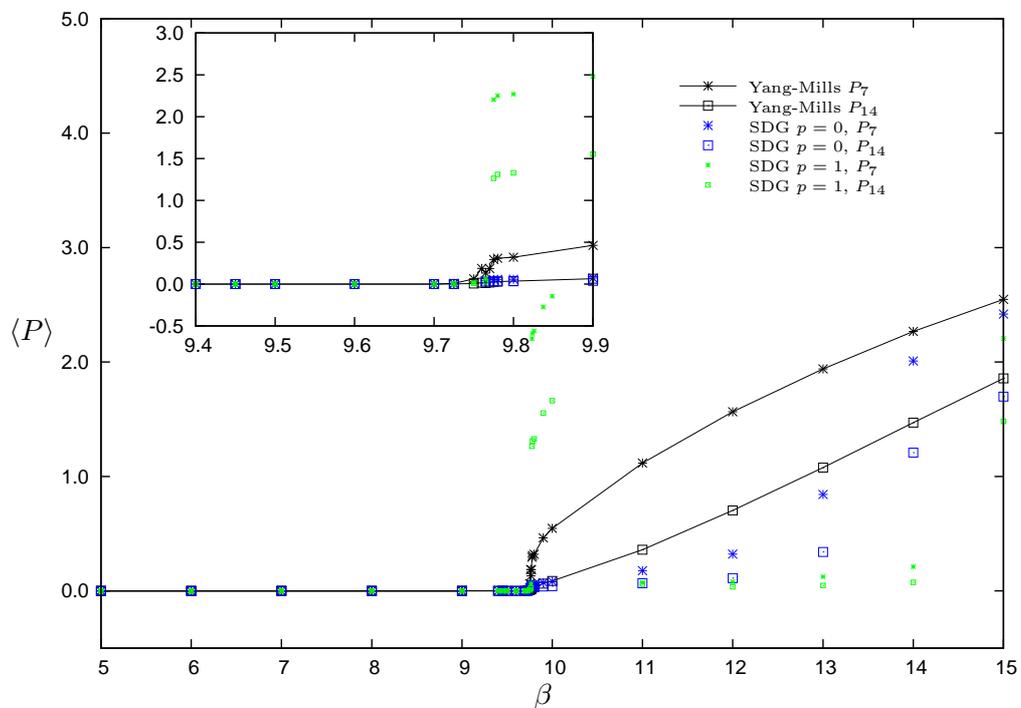


Abbildung 13.11: SDG auf dem $16^3 \times 6$ -Gitter am Confinement-Deconfinement-Übergang

13.5 Zusammenfassung

Aus den Ergebnissen der Monte-Carlo-Simulationen ergibt sich, dass die Dämon-Methode das Verhalten der Yang-Mills-Theorie in der Nähe des Phasenübergangs korrekt wiedergeben kann. Im Unterschied zu $SU(N)$ -Yang-Mills ist hier bereits die 1. Ordnung der starken Kopplungsentwicklung auf dem kleinen Gitter ausreichend, weil die $(1,0)$ und $(0,1)$ -Darstellungen in G_2 unabhängig sind und das resultierende Phasendiagramm alle Phasen enthält. Auf größeren Gittern macht sich in Simulationen eine nicht exakte $\mathcal{Z}(3)$ -Symmetrie bemerkbar, für die die effektive Wirkung um einen weiteren Term erweitert werden muss, der die $(1,0)$ -Darstellung quadratisch enthält. Mit diesem erweiterten Modell lässt sich dann auch auf größeren Gittern das Verhalten der Yang-Mills-Theorie korrekt wiedergeben. Hier gab es für $SU(N)$ das Problem, dass auf größeren Gittern sowohl Dämon-Methoden als auch Schwinger-Dyson-Gleichungen schlechtere Ergebnisse lieferten. Während für die Dämon-Methode ein 3-Kopplungsmodell ausreichend war hat sich für Schwinger-Dyson-Gleichungen gezeigt, dass mit diesem 3-Kopplungsmodell keine stabilen Resultate möglich sind. Die effektive Wirkung musste um einen Term erweitert werden, der eine höherdimensionale Darstellung von G_2 enthält. Mit diesem Modell konnte auf dem kleinen $12^3 \times 2$ -Gitter der Polyakov-Loop aus der Yang-Mills-Theorie gut reproduziert werden. Auf größeren Gittern treten dieselben Probleme wie in $SU(3)$ -Yang-Mills auf.

Hiermit ist die Untersuchung von inversen Monte-Carlo-Methoden in dieser Arbeit abgeschlossen. Im letzten Kapitel werden nun noch Eigenschaften von G_2 -Yang-Mills mit Hilfe eines an das Eichfeld gekoppelten Higgsfeldes untersucht.

14 Yang-Mills-Theorie mit Eichgruppe G_2 und Higgsfeld

Um die Beziehung zwischen Yang-Mills-Theorie mit Eichgruppe G_2 und Yang-Mills-Theorie mit Eichgruppe $SU(3)$ genauer zu untersuchen, wird in diesem Abschnitt ein Higgsfeld an das Eichfeld gekoppelt. Im Theorieteil wird dabei zunächst die Lagrangedichte vorgestellt sowie der Higgsmechanismus und das Goldstone-Theorem angewendet, um Aussagen über die zu erwartenden Ergebnisse in den danach folgenden numerischen Simulationen machen zu können. In den Simulationen soll anschließend insbesondere das Phasendiagramm mit Eich- und Higgskopplung untersucht und der Verlauf der kritischen Kopplung des Confinement-Deconfinement-Übergangs bestimmt werden.

14.1 Theorie

Das Higgsfeld ist für G_2 -Eichtheorie ein 7-komponentiges Skalarfeld $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_7)$ (es transformiert unter der 7-dimensionalen fundamentalen Darstellung). Seine Lagrangefunktion ist gegeben durch einen kinetischen Term und ein Potential

$$\mathcal{L}_H = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + V[\phi] \quad (14.1)$$

mit

$$V[\phi] = \lambda (\phi^2 - m^2)^2 \quad (14.2)$$

Diese reine Higgs-Theorie ist invariant unter einer globalen $SO(7)$ -Symmetrie. Für negative λ liegt der Grundzustand der Theorie bei $\phi^2 = 0$ und ist somit invariant unter globalen $SO(7)$ -Transformationen. Für positive λ liegt der Grundzustand bei $\phi^2 = m^2$ und die globale $SO(7)$ -Symmetrie wird spontan zu einer $SO(6)$ -Symmetrie gebrochen. Die Kopplung an das Eichfeld erfolgt durch Ersetzen der normalen Ableitung durch die kovariante Ableitung (minimale Kopplung). Damit ergibt sich als Wirkung für das Eich-Higgsmodell im Kontinuum

$$\mathcal{L}_{GH}[\mathcal{U}, \phi] = \mathcal{L}_{YM}[\mathcal{U}] + D_\mu \phi D^\mu \phi + V[\phi] \quad (14.3)$$

Die globale $SO(7)$ -Symmetrie des Higgsmodells wird hier also durch das Eichfeld explizit zu einer lokalen G_2 -Symmetrie gebrochen.

14.1.1 Higgsmechanismus

Betrachtet wird jetzt der Fall $\lambda > 0$. Für das Vakuum der Theorie gilt $\phi_0^2 = m^2$ und als Richtung wird hier die 7-Richtung gewählt. Also folgt

$$\vec{\phi}_0 = m\vec{e}_7 \quad (14.4)$$

Damit lässt sich $\vec{\phi}$ nach physikalischen Feldern $\vec{\eta}$ und χ_7 zerlegen

$$\vec{\phi} = \vec{\eta} + \vec{\chi} \quad \text{mit} \quad \vec{\eta} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{\chi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \chi_7 + m \end{pmatrix} \quad (14.5)$$

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{GH}}[\mathcal{U}, \vec{\phi}] &= \mathcal{L}_{\text{YM}}[\mathcal{U}] + D_\mu \vec{\phi} D_\mu \vec{\phi} + \lambda (\vec{\phi}^2 - m^2)^2 \\ &= \mathcal{L}_{\text{YM}}[\mathcal{U}] + D_\mu (\vec{\eta} + \vec{\chi}) D_\mu (\vec{\eta} + \vec{\chi}) \\ &\quad + \lambda (\vec{\eta}^2 + \chi_7^2 + 2m\chi_7)^2 \\ &= \mathcal{L}_{\text{YM}}[\mathcal{U}] + D_\mu \vec{\eta} D_\mu \vec{\eta} + D_\mu \vec{\eta} D_\mu \vec{\chi} + D_\mu \vec{\chi} D_\mu \vec{\eta} + D_\mu \vec{\chi} D_\mu \vec{\chi} \\ &\quad + \lambda (\vec{\eta}^2 + \chi_7^2 + 2m\chi_7)^2 \end{aligned} \quad (14.6)$$

Die Generatoren von G_2 haben die Form

$$\mathfrak{T}^a = \mathfrak{U}^a = \begin{pmatrix} \lambda^a & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^{a*} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad a = 1 \dots 8 \quad (14.7)$$

und

$$\mathfrak{T}^a = \mathfrak{S}^a = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{d}^a & \mathfrak{t}^a \\ -\mathfrak{d}^{a*} & 0 & \mathfrak{t}^{a*} \\ \mathfrak{t}^{a\dagger} & \mathfrak{t}^{a\text{T}} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad i = 9 \dots 14 \quad (14.8)$$

Die kovariante Ableitung lässt sich zerlegen in

$$D_\mu = D_\mu^8 + D_\mu^6 \quad (14.9)$$

$$D_\mu^8 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_3 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_\mu - i \sum_{a=1}^8 A_\mu^a \mathfrak{U}^a \quad (14.10)$$

$$D_\mu^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \partial_\mu - i \sum_{a=9}^{14} A_\mu^a \mathfrak{S}^a \quad (14.11)$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{GH}}[\mathcal{U}, \vec{\phi}] &= \mathcal{L}_{\text{YM}}[\mathcal{U}] + (D_\mu^8 + D_\mu^6)\vec{\eta}(D_\mu^8 + D_\mu^6)\vec{\eta} + (D_\mu^8 + D_\mu^6)\vec{\eta}(D_\mu^8 + D_\mu^6)\vec{\chi} \\ &\quad + (D_\mu^8 + D_\mu^6)\vec{\chi}(D_\mu^8 + D_\mu^6)\vec{\eta} + (D_\mu^8 + D_\mu^6)\vec{\chi}(D_\mu^8 + D_\mu^6)\vec{\chi} \\ &\quad + \lambda (\vec{\eta}^2 + \chi_7^2 + 2m\chi_7)^2\end{aligned}\quad (14.12)$$

Mit $D_\mu^8\vec{\chi} = 0$ ergibt sich weiter

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{GH}}[\mathcal{U}, \vec{\phi}] &= \mathcal{L}_{\text{YM}}[\mathcal{U}] + D_\mu^8\vec{\eta}D_\mu^8\vec{\eta} + 2D_\mu^8\vec{\eta}D_\mu^6\vec{\eta} + D_\mu^6\vec{\eta}D_\mu^6\vec{\eta} \\ &\quad + 2D_\mu^8\vec{\eta}D_\mu^6\vec{\chi} + 2D_\mu^6\vec{\eta}D_\mu^6\vec{\chi} + D_\mu^6\vec{\chi}D_\mu^6\vec{\chi} \\ &\quad + \lambda (\vec{\eta}^2 + \chi_7^2 + 2m\chi_7)^2\end{aligned}\quad (14.13)$$

In der weiteren Rechnung werden folgende Relationen benötigt

$$\mathfrak{S}^a\vec{\chi}\partial_\mu\vec{\chi} = 0 \quad (14.14)$$

$$D_\mu^6\vec{\eta} = -i \sum_{a=9}^{14} A_\mu^a \mathfrak{S}^a \vec{\eta} \quad (14.15)$$

womit sich ergibt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{GH}}[\mathcal{U}, \vec{\phi}] &= \mathcal{L}_{\text{YM}}[\mathcal{U}] + D_\mu^8\vec{\eta}D_\mu^8\vec{\eta} + 2D_\mu^8\vec{\eta}D_\mu^6\vec{\eta} + 2D_\mu^8\vec{\eta}D_\mu^6\vec{\chi} \\ &\quad - \sum_{a=9}^{14} A_\mu^a \mathfrak{S}^a \vec{\chi} \sum_{b=9}^{14} A_\mu^b \mathfrak{S}^b \vec{\chi} - \sum_{a=9}^{14} A_\mu^a \mathfrak{S}^a \vec{\eta} \sum_{b=9}^{14} A_\mu^b \mathfrak{S}^b \vec{\eta} \\ &\quad - 2 \sum_{a=9}^{14} A_\mu^a \mathfrak{S}^a \vec{\eta} \sum_{a=9}^{14} A_\mu^a \mathfrak{S}^a \vec{\chi} - 2i \sum_{a=9}^{14} A_\mu^a \mathfrak{S}^a \vec{\eta} \partial_\mu \vec{\chi} \\ &\quad + \partial_\mu \vec{\chi} \partial_\mu \vec{\chi} + \lambda (\vec{\eta}^2 + \chi_7^2 + 2m\chi_7)^2\end{aligned}\quad (14.16)$$

Als nächstes wird eine Eichung gewählt, in der $\vec{\phi} = \vec{e}_7\phi_7 = \vec{e}_7(\chi_7 + m)$ ist. Dies ist aufgrund der lokalen G_2 -Symmetrie immer möglich (*unitary gauge*). Damit folgt $D_\mu^8\vec{\eta} = 0$ ($D_\mu^8\vec{\eta}$ besitzt auch vor der Eichung keine Komponente in 7-Richtung), $\vec{\chi} = (\chi_7 + m)\vec{e}_7$ und $\vec{\eta} = 0$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{GH}}[\mathcal{U}, \vec{\phi}] &= \mathcal{L}_{\text{YM}}[\mathcal{U}] - \sum_{a=9}^{14} A_\mu^a \mathfrak{S}^a (\chi_7 + m) \vec{e}_7 \sum_{b=9}^{14} A_\mu^b \mathfrak{S}^b (\chi_7 + m) \vec{e}_7 \\ &\quad + \partial_\mu \chi_7 \partial_\mu \chi_7 + \lambda (\chi_7^2 + 2m\chi_7)^2 \\ &= \mathcal{L}_{\text{YM}}[\mathcal{U}] + \partial_\mu \chi_7 \partial_\mu \chi_7 - \sum_{a,b=9}^{14} A_\mu^a A_\mu^b \mathfrak{S}^a \vec{e}_7 \mathfrak{S}^b \vec{e}_7 (\chi_7^2 + 2m\chi_7 + m^2) \\ &\quad + \lambda (\chi_7^2 + 2m\chi_7)^2\end{aligned}\quad (14.17)$$

Mit

$$\mathfrak{S}^a \vec{e}_7 \mathfrak{S}^b \vec{e}_7 = \frac{1}{6} \left(t^a t^b + (t^a)^* (t^b)^* \right) = \frac{2}{3} \delta^{ab} \quad (14.18)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{GH}}[\mathcal{U}, \vec{\phi}] &= \mathcal{L}_{\text{YM}}[\mathcal{U}] + (\partial_\mu \chi_7)^2 - \frac{2}{3} m^2 \sum_{a=9}^{14} (A_\mu^a)^2 \\ &\quad - \frac{2}{3} (\chi_7^2 + 2m\chi_7) \sum_{a=9}^{14} (A_\mu^a)^2 + \lambda (\chi_7^2 + 2m\chi_7)^2 \end{aligned} \quad (14.19)$$

Dies ist die Lagrangedichte für eine Theorie mit 8 masselosen Eichbosonen, 6 massiven Vektorfeldern und einem massiven Skalarfeld. Durch das Koppeln eines Higgsfeldes bekommen 6 der 14 Eichbosonen also eine Masse proportional zum Vakuumerwartungswert des Higgsfeldes $\vec{\phi}$.

ungebrochen	spontan gebrochen
7 massive Skalare	1 massiver Skalar
14 masselose Vektorbosonen	6 massive Vektorbosonen
	8 masselose Vektorbosonen

Ein Skalar hat eine unabhängige Mode, ein masseloses Vektorboson in 4 Dimensionen 2 und ein massives Vektorboson besitzt 3 unabhängige Moden. Zählen der Moden liefert in der ungebrochenen Phase $7 + 2 \cdot 14 = 35$ und in der gebrochenen $1 + 6 \cdot 3 + 8 \cdot 2 = 35$. Die Anzahl der unabhängigen Moden stimmt also überein.

Nun soll noch die Grenzwerte $\lambda \rightarrow \infty$ und $m \rightarrow \infty$ betrachtet werden. Für $\lambda \rightarrow \infty$ tragen im Pfadintegral nur Konfigurationen mit $\chi_7 = 0$ bei. Für $m \rightarrow \infty$ tragen nur Konfigurationen mit $A_\mu^a = 0$ ($a = 9 \dots 14$) bei. Es ergibt sich also in diesem Grenzwert

$$Z_{\text{GH}} = \int \mathcal{D}\mathfrak{A}_{G_2} \mathcal{D}\Phi \exp(-S_{\text{GH}}) \stackrel{m, \lambda \rightarrow \infty}{\sim} \int \mathcal{D}\mathfrak{A}_{SU(3)} \exp(-S_{SU(3)}) \quad (14.20)$$

Aus der G_2 -Higgs-Eichtheorie wird also eine reine $SU(3)$ -Eichtheorie. Die Linkvariablen sind jedoch nicht mehr in der fundamentalen Darstellung der $SU(3)$ sondern in einer reduzierten

7-dimensionalen Darstellung.

14.1.2 Phänomenologische Beschreibung Higgs/ G_2

Wie in der vorangegangenen Rechnung zu sehen, gibt das Higgsfeld den 6 Bosonen aus dem Coset-Space $SO(7)/SO(6)$ eine Masse proportional zum Quadrat des Vakuumerwartungswertes des Higgsfeldes. Die anderen 8 Eichbosonen aus der Untergruppe bleiben masselos. Unter $SU(3)$ -Transformationen verhalten sich die 14 Gluonen der G_2 -Yang-Mills-Theorie wie $(14) = (8) + (3) + (\bar{3})$. Dies stellt eine interessante Analogie zur QCD dar. Die 8 weiterhin masselosen Eichbosonen verhalten sich wie gewöhnliche $SU(3)$ -Gluonen, die 6 massiven Vektorbosonen transformieren unter $SU(3)$ wie Quarks und Antiquarks der QCD, auch wenn sie natürlich weiterhin Bosonen mit Spin 1 sind. Das G_2 -Higgsmodell kann damit möglicherweise auch ein Verständnis von Confinement in der QCD mit Quarks liefern. Lässt man die Masse dieser 6 Eichbosonen über die Higgskopplung gegen unendlich gehen, kann man diese 'Quarks' aus der Dynamik der Theorie entfernen und erhält eine reine $SU(3)$ -Eichtheorie. Die kritische Kopplung β_c des Confinement-Deconfinement-Phasenübergangs in $SU(3)$ und G_2 -Yang-Mills stimmen jedoch nicht überein (die kritische Kopplung von

$SU(3)$ muss aufgrund der unterschiedlichen Normierung mit einem Faktor $7/6$ reskaliert werden)

$$\frac{7}{6}\beta_c^{SU(3)} \leq \beta_c^{G_2}$$

Mit größer werdender Masse des Higgsfeldes muss sich also die kritische Eichkopplung in G_2 zu kleineren Temperaturen verschieben (Abb. 14.1). Der Confinement-Deconfinement-Übergang in $SU(3)$ ist ein erster Ordnungsübergang, der Phasenübergang in G_2 -Yang-Mills jedoch ein schwacher 1. Ordnungsübergang oder ein *Crossover* [30]. Deshalb ist es interessant den Verlauf der kritischen Kopplung in der (β, κ) -Ebene zu bestimmen, was in dieser Arbeit gemacht wird. Im Limes großer Eichkopplung β werden alle Links zur Einheit und das Modell reduziert sich zu einem nichtlinearen $SO(7)$ -Sigma-Modell, von dem man weiß, dass es einen Phasenübergang besitzt [30]. Dies wird hier jedoch nicht weiter verfolgt.

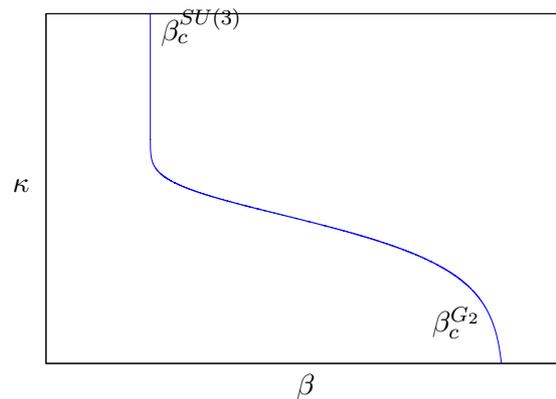


Abbildung 14.1: Qualitativer Verlauf der kritischen Kopplung

Im Folgenden sollen diese hier beschriebenen Aspekte mit Hilfe von Monte-Carlo-Simulationen bestätigt werden. Dazu muss jedoch zunächst eine Gitterformulierung für das Eich-Higgs-Modell gefunden werden.

14.1.3 Der Lagrangian des Eich-Higgsmodells auf dem Gitter

In diesem Abschnitt soll nun die Lagrangedichte Gl. (14.3) auf einem Gitter formuliert werden. Da die $SO(7)$ -Symmetrie explizit gebrochen werden soll wird hierbei der Limes $\lambda \rightarrow \infty$ betrachtet. Die Wirkung auf dem Gitter ist durch folgenden Ausdruck gegeben

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_H &= \sum_{x,\mu} D_\mu \phi_x D_\mu \phi_x + V[\phi] = \sum_{x,\mu} ((\partial_\mu - i\mathfrak{A}_{x,\mu}) \phi_x)^2 + V[\phi] \\
 &= \sum_{x,\mu} (\phi_{x+\mu} - \phi_x - i\mathfrak{A}_{x,\mu} \phi_x)^2 + V[\phi] \\
 &= \sum_{x,\mu} \left(\phi_{x+\mu} - \underbrace{(\mathbb{1} + i\mathfrak{A}_{x,\mu}) \phi_x}_{\mathcal{U}_{x,\mu}} \right)^2 + V[\phi] \\
 &= \sum_{x,\mu} \underbrace{\phi_{x+\mu}^2}_{\phi_x^2} - 2\phi_{x+\mu} \mathcal{U}_{x,\mu} \phi_x + \underbrace{(\mathcal{U}_{x,\mu} \phi_x)^2}_{\phi_x^2} + V[\phi] \\
 &= \sum_x 2d\phi_x^2 + \lambda (\phi_x^2 - m^2)^2 - 2 \sum_{x,\mu} \phi_{x+\mu} \mathcal{U}_{x,\mu} \phi_x \tag{14.21}
 \end{aligned}$$

Fluktuationen um $\phi^2 = m^2$ werden im Limes $\lambda \rightarrow \infty$ unterdrückt und deshalb wird für ϕ der Ansatz $\phi_x = \phi_{x0} + \lambda^{-1} \eta_x$ mit $\phi_{x0}^2 = m^2$ gemacht. Einsetzen liefert

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_H &= \sum_x 2d(m^2 + 2\lambda^{-1} \phi_{x0} \eta_x + \lambda^{-2} \eta_x^2) + \lambda (2\lambda^{-1} \phi_{x0} \eta_x + \lambda^{-2} \eta_x^2)^2 \\
 &\quad - 2(\phi_{x+\mu 0} + \lambda^{-1} \eta_{x+\mu}) \mathcal{U}_{x,\mu} (\phi_{x0} + \lambda^{-1} \eta_x) \tag{14.22}
 \end{aligned}$$

Im Limes bleibt also übrig

$$\mathcal{S}_H = 2dV - 2 \sum_{x,\mu} \phi_{x+\mu 0} \mathcal{U}_{x,\mu} \phi_{x0} \tag{14.23}$$

Nach Reskalierung von $\Phi_x = \frac{1}{m} \phi_x$ und Unterdrücken von konstanten Termen erhält man als Wirkung des Higgsfeldes auf dem Gitter

$$\mathcal{S}_H = -2m^2 \sum_{x,\mu} \Phi_{x+\mu} \mathcal{U}_{x,\mu} \Phi_x = -\kappa \sum_{x,\mu} \Phi_{x+\mu} \mathcal{U}_{x,\mu} \Phi_x \tag{14.24}$$

mit Hoppingparameter $\kappa = 2m^2$. Das Higgsfeld Φ lebt in diesem Limes also auf einer 7-Sphäre. Wie transformiert sich in diesem Limes nun das Maß des Pfadintegrals? Dies lässt sich mit Hilfe der Identität

$$\delta(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} e^{-\lambda x^2} \tag{14.25}$$

untersuchen.

$$\begin{aligned}
 Z &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ - \sum_{x,\mu} \left(D_\mu \phi_x D_\mu \phi_x + \lambda (\phi_x^2 - m^2)^2 \right) \right\} \\
 &= \int \mathcal{D}\phi \prod_x \delta(\phi_x^2 - m^2) \exp \left\{ - \sum_{x,\mu} D_\mu \phi_x D_\mu \phi_x \right\} \\
 &= \int \mathcal{D}\Omega_\Phi \exp \left\{ -\kappa \sum_{x,\mu} \Phi_{x+\mu} \mathcal{U}_{x,\mu} \Phi_x \right\} \tag{14.26}
 \end{aligned}$$

wobei $\int \mathcal{D}\Omega_\Phi = \int \prod_x d\Omega_{\Phi_x}$ bedeutet und $\int d\Omega_\Phi$ das Integral über die Oberfläche einer 7-dimensionalen Kugel mit Radius 1 ist.

Zusammengefasst ergibt sich damit folgende Wirkung für das Eich-Higgs-Modell, die mit Monte-Carlo-Methoden zu simulieren ist

$$S_{\text{GH}} = \beta \sum_{x,\mu\nu} \left\{ 1 - \frac{1}{7} \text{tr } \mathfrak{R}\mathcal{U}_{x,\mu\nu} \right\} - \kappa \sum_{x,\mu} \Phi_{x+\mu} \mathcal{U}_{x,\mu} \Phi_x \quad (14.27)$$

14.2 Simulation des Eich-Higgs-Modells

Die Simulation des Eich-Higgs-Modells lässt sich mit den bestehenden Algorithmen durchführen.

Update des Eichfeldes Hier muss lediglich der Kraftterm modifiziert werden.

$$\dot{H} = \sum_{x,\mu} \text{tr} \left\{ \mathfrak{P}_{x,\mu} \left[\dot{\mathfrak{P}}_{x,\mu} - i \frac{\beta}{2N_c} F_{\mathcal{U},x,\mu} \right] - \kappa \Phi_{x+\mu} \dot{\mathcal{U}}_{x,\mu} \Phi_x \right\} = 0 \quad (14.28)$$

wobei $F_{\mathcal{U},x,\mu} = \mathcal{U}_{x,\mu} R_{x,\mu} - R_{x,\mu}^\dagger \mathcal{U}_{x,\mu}^\dagger$ die Kraft ist, die zur Wilsonwirkung gehört. Einsetzen von Gl. (12.23) und Einführen von Indizes liefert (zur Vereinfachung der Schreibweise werden die Indizes x, μ unterdrückt und $\Phi_{x+\mu}$ wird zu Φ')

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{x,\mu} \left\{ \mathfrak{P}_{ij} \left[\dot{\mathfrak{P}}_{ji} - i \frac{\beta}{2N_c} (F_{\mathcal{U}})_{ji} \right] - i\kappa \Phi_k U_{ki} \mathfrak{P}_{ij} \Phi'_j \right\} \\ &= \sum_{x,\mu} \left\{ \mathfrak{P}_{ij} \left[\dot{\mathfrak{P}}_{ji} - i \frac{\beta}{2N_c} (F_{\mathcal{U}})_{ji} - i\kappa (F_\Phi)_{ji} \right] \right\} \end{aligned} \quad (14.29)$$

Damit ergibt sich also als neue Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} \dot{\mathfrak{P}} &= i \left\{ \frac{\beta}{2N_c} F_{\mathcal{U}} + \kappa F_\Phi \right\} \\ F_{\mathcal{U}} &= \mathcal{U}R - R^\dagger \mathcal{U}^\dagger \\ (F_\Phi)_{ij} &= \Phi_k \mathcal{U}_{kj} \Phi'_i \end{aligned} \quad (14.30)$$

Verwendet wird wieder die lokale Variante des HMC und der Leapfrog-Integrator.

Update des Higgsfeldes Das Update des Higgsfeldes geschieht ebenfalls durch einen HMC. Jedes Feld Φ_x lässt sich schreiben als

$$\Phi_x = \mathcal{O}_x \Phi_0 \quad (14.31)$$

wobei $\mathcal{O} = \exp \{ p_{x,a} \mathfrak{T}^a \} \in SO(7)$ ein Element der Drehgruppe in 7 Dimensionen ($SO(7)$) ist und $\mathfrak{T}^a \in \mathfrak{so}(7)$ die zugehörigen Generatoren der Drehungen sind ($a = 1 \dots 21$). Die fiktive Hamiltonfunktion ist gegeben durch

$$H = \sum_x \left\{ \frac{1}{2} \text{tr}(\mathfrak{P}_x^2) + \Phi_x R_x \right\} \quad (14.32)$$

mit $R_x = \sum_{\mu} (\mathcal{U}_{x,\mu} \Phi_{x+\mu} + \Phi_{x-\mu} \mathcal{U}_{x-\mu,\mu})$. Damit ergibt sich $\dot{\Phi}_x = p_{x,a} \mathfrak{T}^a \Phi_x = \mathfrak{P}_x \Phi_x$ und

$$\begin{aligned} \dot{H} &= \sum_x \left\{ \text{tr} \left(\mathfrak{P}_x \dot{\mathfrak{P}}_x \right) + \dot{\Phi}_x R_x \right\} = \sum_x \left\{ \text{tr} \left(\mathfrak{P}_x \dot{\mathfrak{P}}_x \right) + \mathfrak{P}_x \Phi_x R_x \right\} \\ &= \sum_x \left\{ \mathfrak{P}_{x,ij} \left(\dot{\mathfrak{P}}_{x,ji} + \Phi_{x,j} R_{x,i} \right) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (14.33)$$

und somit als Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\mathfrak{P}}_{ij} &= -\Phi_i R_j \\ \dot{\Phi} &= \mathfrak{P} \Phi \end{aligned} \quad (14.34)$$

Um die Impulse in der Algebra von $SO(7)$ zu halten wird dieselbe Methode wie im IHMC für das Eichfeld verwendet. Für kleine Higgskopplungen $\kappa < 100$ hat sich ein Metropolis-Algorithmus mit

$$\phi'_x = \exp(\epsilon p_a \mathfrak{T}^a) \phi_x \quad (14.35)$$

und p_a gaußverteilt als effizienter erwiesen. Damit ist der Algorithmus zur Simulation des Eich-Higgs-Modells beschrieben. Im Folgenden werden nun einige grundlegende Eigenschaften des Modells auf einem kleinen Raumzeit-Gitter überprüft, um die Aussagen im Theorieteil zu verdeutlichen.

14.2.1 Ergebnisse

Die Monte-Carlo-Simulationen zum G_2 -Higgs-Modell finden auf einem $12^3 \times 2$ -Gitter statt. Zuerst wird das Verhalten des Modells in der Confinement-Phase der G_2 -Eichtheorie untersucht. Der Phasenübergang von Confinement zu Deconfinement liegt bei $\beta_c = 9.081(2)$. Es wird also eine Kopplung von $\beta = 5$ gewählt, bei der sich sowohl G_2 -Yang-Mills als auch $SU(3)$ -Yang-Mills (der Phasenübergang liegt hier bei $\beta_c^{SU(3)} = 5.094(5)$, was einem reskalierten $\beta_c = \frac{7}{6} \beta_c^{SU(3)} = 5.943$ entspricht) in der Confinement-Phase befinden. Die Kopplung des Higgsfeldes wird dabei von $\kappa = 0$ bis $\kappa = 10000$ variiert. Die Statistik beträgt jeweils mindestens 10000 unabhängige Konfigurationen und die Ergebnisse sind in Abb. 14.2 zu sehen.

Wie nach den theoretischen Überlegungen zu erwarten war, geht im Limes starker Kopplung, also dem Einfrieren der 6 Gluonen von G_2 , die unter $SU(3)$ wie Quarks transformieren, der Polyakov-Loop in der (7)-Darstellung gegen 1. Die übrigen 8 Gluonen befinden sich also in einer $SU(3)$ Confinement-Phase, weil der Polyakov-Loop eines statischen $SU(3)$ Testquarks gegen 0 geht und somit die freie Energie gegen ∞ . Der Polyakov-Loop in der (14)-Darstellung ist im Rahmen der Statistik sowohl in G_2 -Yang-Mills als auch in $SU(3)$ -Yang-Mills Null. In $SU(3)$ entspricht er in einer Confinement-Phase dem Polyakov-Loop in der 8-dimensionalen adjungierten Darstellung. Für kleine κ wird er zunächst größer um dann im Limes starker Higgskopplung wieder gegen Null zu gehen. Nun wurde für das Modell ein Phasendiagramm im Bereich $(\beta, \kappa) = (5, 0)$ bis $(10, 10000)$ erstellt. Die Linie

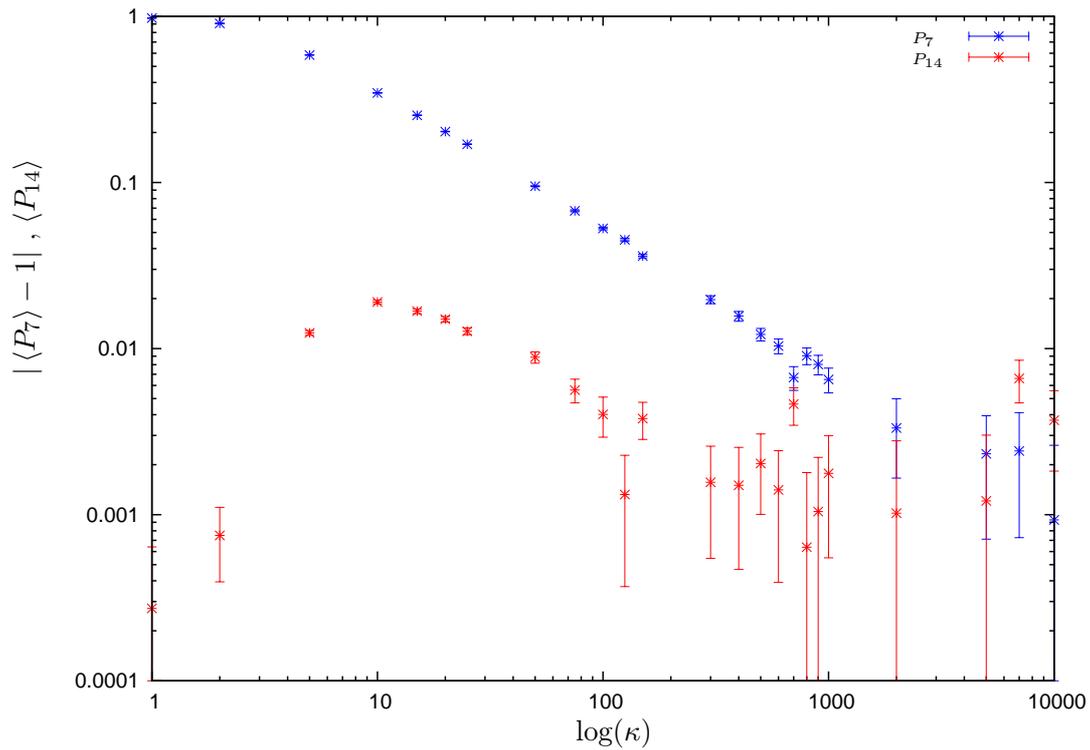


Abbildung 14.2: Polyakov-Loop in fundamentalen Darstellungen in Abhängigkeit von κ

des Phasenübergangs verschiebt sich dabei für größer werdendes κ zu kleineren Kopplungen β . Dies ist in den Abbildungen 14.3 und 14.4 zu sehen. Als Observable dient hier der Polyakov-Loop in der (7)-Darstellung, wobei auftretende negative Werte auf die reelle $Z(3)$ -Kopie gedreht wurden.

Aus dem Verlauf der kritischen Kopplung ist zu erkennen, dass die kritische Kopplung sich bis $\kappa = 1$ nur wenig verschiebt. Zwischen $\kappa = 1$ und $\kappa = 100$ wird sie schnell kleiner um danach für große κ langsam gegen die kritische Kopplung des $SU(3)$ -Phasenübergangs zu gehen. Der Sprung des Polyakov-Loops geht immer etwa auf denselben Wert, die Höhe des Sprungs ändert sich aber weil er in G_2 in der Confinement-Phase praktisch bei 0 liegt und in $SU(3)$ -Yang-Mills bei 1.

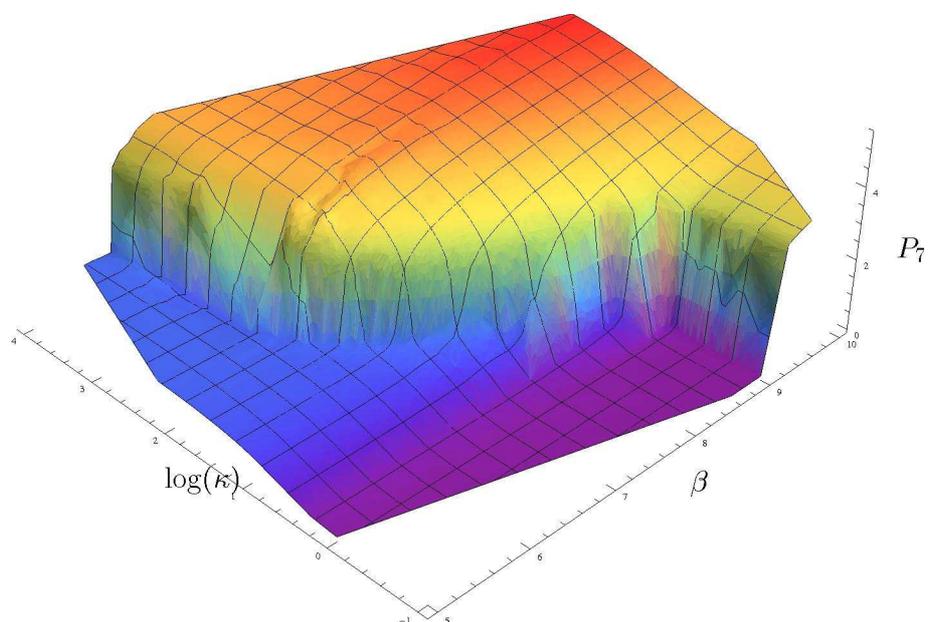


Abbildung 14.3: Phasendiagramm des Higgsmodells

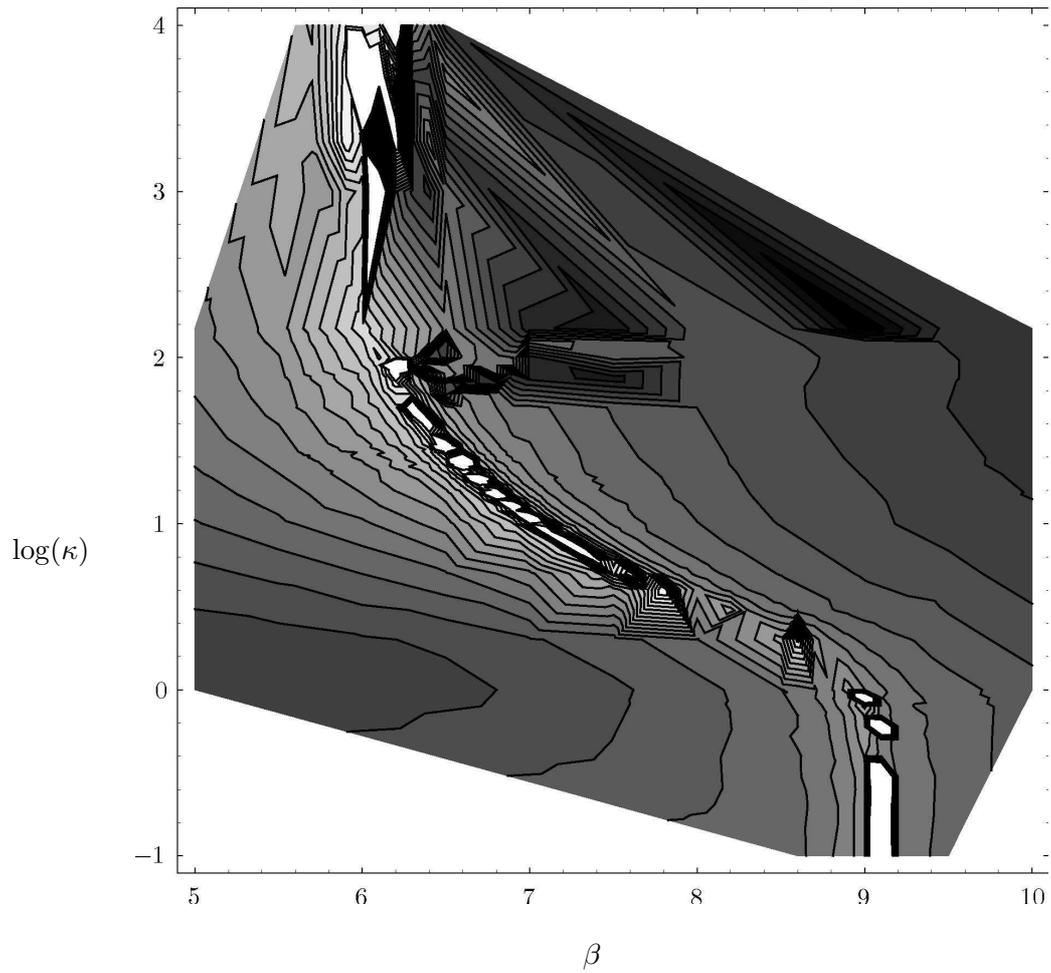


Abbildung 14.4: Flächen gleicher Suszeptibilität des Polyakov-Loops in der (β, κ) -Ebene (heller entspricht größeren Werten)

Jetzt soll die Theorie im Detail bei großen Kopplungen κ untersucht werden. Dazu wurden für $\kappa = 1000$ und $\kappa = 10000$ Simulationen durchgeführt und die Phasenübergänge mit dem Übergang der $SU(3)$ -Eichtheorie verglichen (Für $SU(3)$ wurde hier $\langle P \rangle + \langle \bar{P} \rangle + 1$ dargestellt). Dies ist in Abb. 14.5 und 14.6 zu sehen.

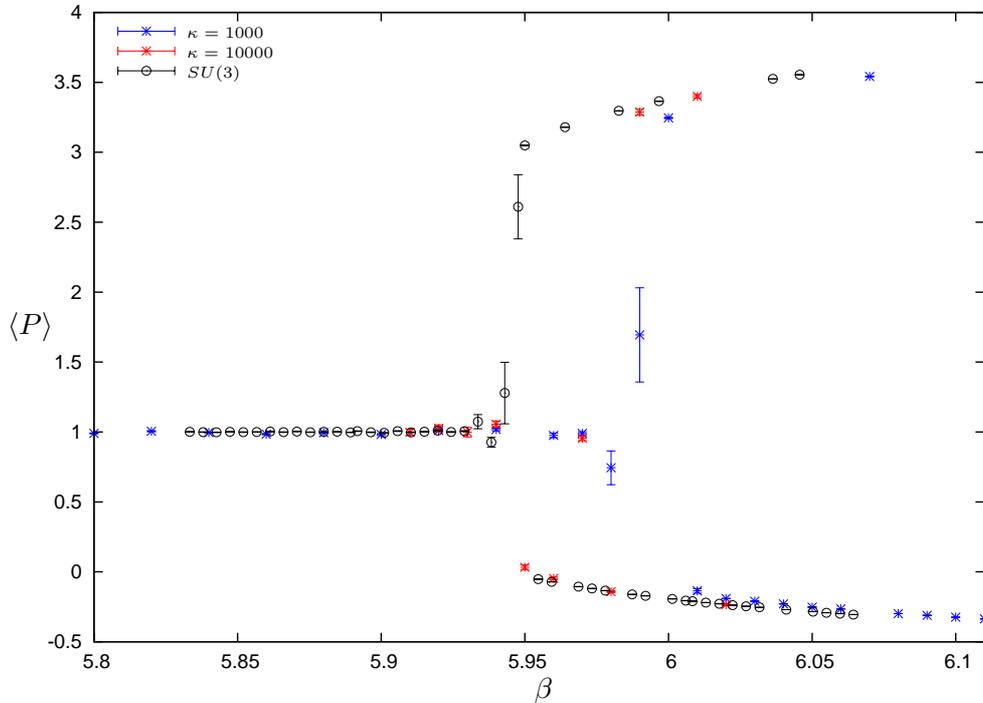


Abbildung 14.5: Polyakov-Loop für $\kappa = 1000$ und $\kappa = 10000$, zum Vergleich $SU(3)$

Für $\kappa = 1000$ liegt der Phasenübergang im Vergleich zu $SU(3)$ noch deutlich bei höheren Kopplungen β . Man sieht aber bereits die $Z(3)$ -Zentrumssymmetrie, da auch in der Nähe eines Phasenübergangs die Phase mit negativem Polyakov-Loop auftritt. Desweiteren tritt diese Phase mit negativem Wert öfter auf als die mit positivem Wert (erwartet wird ein Verhältnis von $\frac{\text{pos.}}{\text{neg.}} = \frac{1}{2}$). Die Werte des Polyakov-Loops in den beiden Phasen stimmen bereits gut überein. Für $\kappa = 10000$ stimmt dann auch der Punkt des Phasenübergangs in dieser Auflösung mit dem in $SU(3)$ überein. Dies ist ebenfalls in der Suszeptibilität zu sehen, die jedoch für $\kappa = 10000$ schwer zu messen ist.

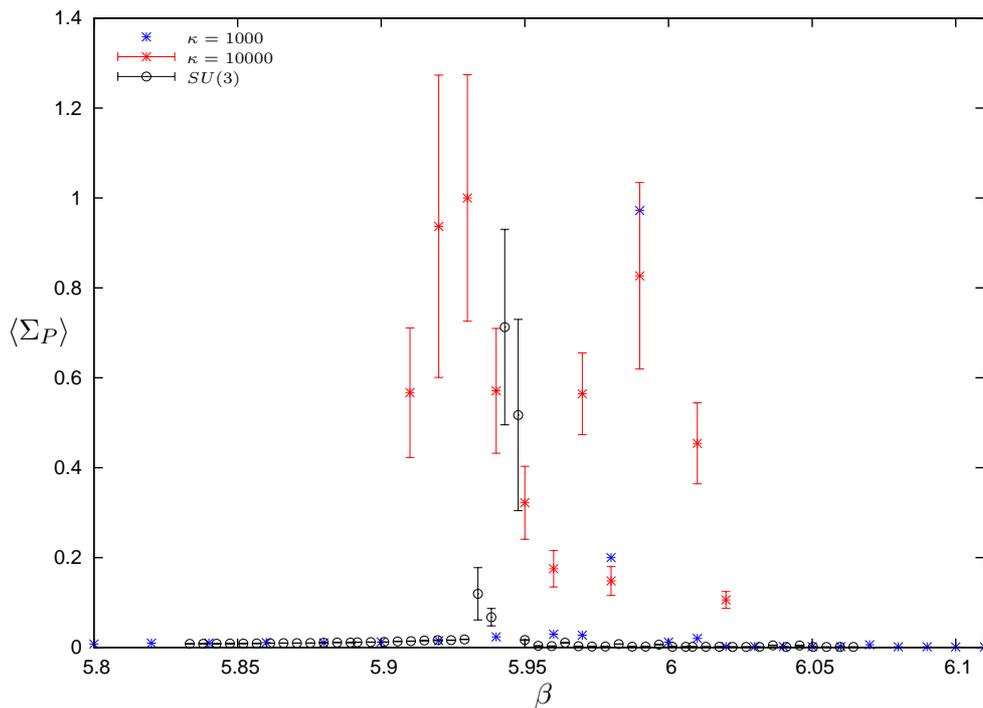


Abbildung 14.6: Suszeptibilität für $\kappa = 1000$ und $\kappa = 10000$, zum Vergleich $SU(3)$

14.3 Zusammenfassung

Wie in der Theorie beschrieben ist es mit diesem Eich-Higgs-Modell also möglich, zwischen $SU(3)$ -Yang-Mills und G_2 -Yang-Mills zu interpolieren. Es hat sich gezeigt, dass die kritische Kopplung des Confinement-Deconfinement-Phasenübergangs mit größer werdender Kopplung des Higgsfeldes (und damit mit größer werdender Masse der 6 Eichbosonen) gegen die kritische Kopplung des Übergangs in $SU(3)$ -Yang-Mills geht. Die $\mathcal{Z}(3)$ -Zentrumssymmetrie wird dabei wiederhergestellt, was im Limes großer Higgskopplung auch analytisch gezeigt werden konnte.

15 Zusammenfassung

Ein fundamentales Anliegen der theoretischen Physik ist die Beschreibung der in der Natur auftretenden Wechselwirkungen durch ein einheitliches Modell. Dies ist für die elektrische, die schwache und die starke Wechselwirkung mit dem Standardmodell gelungen, jedoch steht eine Einbeziehung der Gravitation in ein umfassenderes Modell noch aus. Aber auch das Standardmodell ist in verschiedenen Aspekten noch nicht vollständig verstanden und daher nach wie vor Gegenstand aktueller Forschungen. Inhalte und Fragestellungen dieser Forschungen sind in der Einleitung ausführlicher umrissen.

Thema dieser Arbeit waren effektive Polyakov-Loop-Modelle für $SU(N)$ - und G_2 -Eichtheorien zur Beschreibung des Confinement-Deconfinement Phasenübergangs. So war es Ziel des ersten Teils dieser Arbeit, Methoden zu entwickeln und zu verbessern mit denen Kopplungen für effektive Polyakov-Loop-Modelle erhalten werden können. In einem zweiten Teil sollte dann die G_2 -Yang-Mills-Theorie (eine Eichtheorie in der die Eichgruppe ein triviales Zentrum besitzt) untersucht und mit Hilfe der im ersten Teil entwickelten Methoden ebenfalls eine effektive Wirkung bestimmt werden.

15.1 Effektive Polyakov-Loop-Modelle und *inverse Monte-Carlo-Methoden*

Hierzu wurde zunächst die starke Kopplungsentwicklung der Wilson-Wirkung auf dem Gitter für eine beliebige Eichgruppe vorgestellt und anschließend die effektive Wirkung für die Gruppen $SU(3)$ und $SU(4)$ explizit bis zur 3. Ordnung der Entwicklung angegeben. Effektive Polyakov-Loop-Modelle wurden dann aus Trunkierungen dieser effektiven Wirkung für die Yang-Mills-Theorie erhalten. Für ein ausgewähltes 3-Kopplungsmodell wurde die Phasenstruktur mit Monte-Carlo Simulationen untersucht. Es wurde dabei eine symmetrische Phase, eine ferromagnetische Phase sowie eine Antizentrumsphase (Phase, in der der rotierte Polyakov-Loop kleiner als Null ist, vgl. [49]) gefunden.

Zur Anpassung des effektiven Modells an eine mikroskopische Theorie sollten Kopplungen der effektiven Wirkung über *inverse Monte-Carlo-Methoden* bestimmt werden. Nachdem ein Überblick gegeben wurde, wie es mit *inversen Monte-Carlo-Methoden* grundsätzlich möglich ist aus der Kopplung der mikroskopischen Theorie Kopplungen der effektiven Theorie zu bestimmen, wurden explizit zwei Methoden vorgestellt, Schwinger-Dyson-Gleichungen sowie Dämon-Methoden.

Hierfür wurden die Schwinger-Dyson-Gleichungen für halbeinfache Lie-Gruppen allgemein hergeleitet [58] und im Anschluss für die Gruppen $SU(N)$ und G_2 spezialisiert und explizit angegeben. Mit dieser Methode lassen sich Kopplungen der effektiven Theorie aus Erwartungswerten der mikroskopischen Theorie und dem Lösen eines Gleichungssystems bestimmen.

Die Dämon-Methode beruht auf dem Übergang vom mikrokanonischen zum kanonischen Ensemble und der Messung von Temperaturen. Hier wurden an einem effektiven 3-Kopplungsmodell zunächst für die reine Yang-Mills-Theorie Eigenschaften der Dämon-Methode wie Thermalisierungseffekte in mikrokanonischen Simulationen, Abhängigkeiten der Methode von verschiedenen frei wählbaren Parametern und Thermalisierung im Yang-Mills-Ensemble untersucht. Nachdem verschiedene Optimierungen der Methode vorgeschlagen wurden ergab sich, dass der sogenannte *mikrokanonische Dämon* in Simulationen mit der effektiven Theorie nur den Polyakov-Loop auf einer Konfiguration aus dem Yang-Mills-Ensemble reproduzieren kann, während der *kanonische Dämon* den Erwartungswert des Polyakov-Loops der mikroskopischen Theorie wiedergibt. Des Weiteren hat sich gezeigt, dass die Fehler in der Bestimmung der Kopplungen und damit auch Fehler in der Reproduktion des Polyakov-Loops aufgrund von langreichweitigen Thermalisierungseffekten in den mikrokanonischen Monte-Carlo-Simulationen nur mit einer hohen mikrokanonischen Statistik (für die untersuchten Gitter in der Größenordnung von 1 Millionen mikrokanonischen Konfigurationen) klein gehalten werden können.

15.2 $SU(N)$ -Eichtheorie

Nachdem grundlegende Eigenschaften der *inversen Monte-Carlo-Methoden* erarbeitet wurden, sollten sie auf zwei verschiedene mikroskopische Modelle angewendet werden. Dies war zum einen der Confinement-Deconfinement-Übergang in der reinen $SU(3)$ -Eichtheorie und zum anderen eine Yang-Mills-Theorie mit zusätzlichem effektiven Potential (*erweiterte Yang-Mills-Theorie*) für ein Teilchen in der adjungierten Darstellung der Eichgruppe. Für beide Modelle wurden dazu zunächst Monte-Carlo-Simulationen durchgeführt, um Phasendiagramme des Polyakov-Loops zu erhalten. In der *erweiterten Yang-Mills-Theorie* wurde dabei in Übereinstimmung mit [54] auch eine Antizentrumsphase gefunden.

Die anschließende Anwendung von *inversen Monte-Carlo-Methoden* ergab, dass auf kleinen Gittern sowohl Schwinger-Dyson-Gleichungen als auch Dämon-Methoden den Confinement-Deconfinement-Phasenübergang der mikroskopischen Yang-Mills-Theorie gut reproduzieren können. Auf größeren Gittern werden die Schwinger-Dyson-Gleichungen mit der gewählten Trunkierung der effektiven Wirkung zunehmend schlechter, während die Dämon-Methoden den Phasenübergang weiter korrekt anzeigen. Die Antizentrumsphase der erweiterten Yang-Mills-Theorie kann nur von Dämon-Methoden reproduziert werden, die Schwinger-Dyson-Gleichungen liefern hier einen Polyakov-Loop in der Confinement-Phase.

Nachdem sich gezeigt hat, dass Dämon-Methoden den Schwinger-Dyson-Gleichungen in einer $SU(3)$ -Theorie überlegen sind, wurde der kanonische Dämon auf den Confinement-Deconfinement-Übergang in der $SU(4)$ -Yang-Mills-Theorie angewendet. Auch hier war mit einer Trunkierung der effektiven Wirkung aus der starken Kopplungsentwicklung eine gute Reproduktion des Übergangs möglich.

Die Ergebnisse der Dämon-Methode und ein Vergleich mit Schwinger-Dyson-Gleichungen wurden vorab in [68] veröffentlicht und auf Konferenzen vorgetragen.

15.3 G_2 -Eichtheorie

Im zweiten Teil der Arbeit wurde die G_2 -Yang-Mills-Theorie untersucht. Dazu wurde zunächst ein Monte-Carlo Update-Algorithmus (basierend auf einem Hybrid-Monte-Carlo)

zur Simulation der Theorie entwickelt und optimiert. Mit diesem Algorithmus wurde anschließend ein Phasendiagramm des Polyakov-Loops am Confinement-Deconfinement-Übergang der G_2 -Eichtheorie erstellt. Dabei hat sich ergeben, dass neben der Deconfinement-Phase mit positivem Polyakov-Loop in der 7-dimensionalen Darstellung auch zwei Phasen mit negativem Polyakov-Loop existieren, die in weiteren analytischen und numerischen Untersuchungen als $Z(3)$ -Kopien des Polyakov-Loops bezüglich der $SU(3)$ -Untergruppe von G_2 identifiziert werden konnten. Diese Zentrumssymmetrie ist jedoch nicht exakt in G_2 -Eichtheorie. Mit den in der Literatur verwendeten Algorithmen zur Simulation von G_2 -Eichtheorie konnten diese Phasen nicht gefunden werden.

Des Weiteren wurde das Quark-Antiquark-Potential in verschiedenen Darstellungen gemessen, um *Casimir scaling* der *intermediate string tension* in G_2 numerisch zu belegen. Hier konnte gezeigt werden, dass eine verwendete *smearing*-Prozedur (die den Überlapp von großen Wilson-Loops mit dem Vakuum erhöht) zwar die *string tension* verändert, jedoch das Verhältnis von Stringspannungen in verschiedenen Darstellungen praktisch konstant lässt.

Nach diesen Untersuchungen der reinen Eichtheorie wurden Dämon-Methoden und Schwinger-Dyson-Gleichungen angewendet. Dazu wurde zunächst das Phasendiagramm einer 2 Kopplungs-Trunkierung der effektiven Wirkung betrachtet. In Übereinstimmung von klassischer Analyse und Monte-Carlo-Simulationen konnten eine symmetrische Phase, eine ferromagnetische Phase sowie zwei antiferromagnetische Phasen identifiziert werden.

Im Anschluss konnte für die G_2 -Eichtheorie gezeigt werden, dass Dämon-Methoden bereits mit dieser vorgestellten Trunkierung der effektiven Wirkung den Confinement-Deconfinement-Übergang auf verschiedenen Gittern gut reproduzieren können. Um auch die Phase mit negativem Polyakov-Loop wiedergeben zu können, musste ein weiterer Term der starken Kopplungsentwicklung hinzugefügt werden.

Die Schwinger-Dyson-Gleichungen waren mit diesem einfachem effektiven Modell, welches nur Kopplungen des Polyakov-Loops in fundamentalen Darstellungen der Gruppe enthält, nicht in der Lage den Phasenübergang stabil wiederzugeben. Es musste zusätzlich ein Term in einer höherdimensionalen Darstellung der Gruppe betrachtet werden. Damit zeigt sich dasselbe Verhalten wie für $SU(3)$ -Yang-Mills. Auf kleinen Gittern war eine Reproduktion des Confinement-Deconfinement-Übergangs möglich. Auf größeren Gittern wurden die Ergebnisse zunehmend schlechter. Die Phasen mit negativem Polyakov-Loop konnten mit Schwinger-Dyson-Gleichungen nicht reproduziert werden.

Zum Abschluss wurde ein Higgsfeld in der 7-dimensionalen Darstellung der $SO(7)$ an die Yang-Mills-Wirkung gekoppelt. Hier wurde die kritische Kopplung der Eichtheorie am Confinement-Deconfinement-Phasenübergang in Abhängigkeit von der Kopplung des Higgsfeldes bestimmt. Es konnte gezeigt werden, dass im Grenzwert starker Higgskopplung die $Z(3)$ -Zentrumssymmetrie wiederhergestellt wird und die kritische Kopplung gegen die kritische Kopplung der $SU(3)$ -Yang-Mills-Theorie geht, was im Einklang mit theoretischen Überlegungen basierend auf Gruppentheorie ist.

15.4 Ausblick

Die Untersuchungen zum Quark-Antiquark-Potential in G_2 -Eichtheorie konnten in dieser Arbeit nicht abgeschlossen werden. Um die *string tension* in mehreren Darstellungen zu bestimmen, sind Simulationen auf Gittern mit einer größeren zeitlichen Ausdehnung notwendig ($N_t \approx 28$). Damit sollte es dann möglich sein, Aussagen über *Casimir scaling* in G_2 -Eichtheorie zu treffen. Für die Absolutwerte der *string tension* muss zusätzlich die Abhängigkeit von der Art des Verschmierens der Links vermindert werden. Um den Simulationsaufwand zu reduzieren, sollte hier eventuell zu asymmetrischen Gittern mit $a_t \neq a_s$ übergegangen werden.

Des Weiteren sollte die in dieser Arbeit entdeckte Struktur der Histogramme des Polyakov-Loops (nicht exakte $SU(3)$ -Zentrumssymmetrie) in der Deconfinement-Phase auf größeren Gittern untersucht werden. Dies gilt insbesondere für die $\mathcal{Z}(3)$ -Kopie, die hier bislang nur auf einem kleinen Gitter für große Kopplungen β gefunden wurde. Da sie jedoch nur mit einer im Verhältnis zu den beiden anderen Kopien sehr kleinen Wahrscheinlichkeit auftritt, sind hierfür Simulationen mit vielen verschiedenen Seeds von Zufallszahlen und verschiedenen Eichkopplungen auf unterschiedlichen Gittern notwendig.

Es ist geplant die Ergebnisse sowie den Algorithmus zur Simulation von G_2 -Eichtheorie, der in dieser Arbeit entwickelt wurde, zu veröffentlichen.

A Anhang

A.1 Konventionen

Es wurden Einheiten verwendet, in denen gilt

$$k_B = c = \hbar = 1 \tag{A.1}$$

Desweiteren wurde in der Arbeit versucht, folgende Konventionen einzuhalten

Allgemein

- Raumzeitvektor: x, y, z
- Raumzeitrichtung: μ, ν
- Raumzeitdimension: d
- Raumdimension: D
- Gittervolumen: $V = N_s^3 N_t$
- Gitterabstand: $a = a_t = a_s$
- Gitterpunkte in Raumrichtung: N_s
- Gitterpunkte in Zeitrichtung: N_t
- Einheitsvektor in Richtung μ : e_μ

Gruppentheorie

- Gruppenelemente: $\mathcal{G}, \mathcal{U}, \mathcal{S}, \mathcal{P} \dots$ kalligraphische Buchstaben
- Spur eines Gruppenelementes $P = \text{tr } \mathcal{P}$
- Algebraelemente: $\mathfrak{A}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{U}, \mathfrak{S}, \dots$ altdeutsches Alphabet
- Rang der Gruppe: $r = \text{rang}(\mathcal{G}) = \dim(\mathfrak{g})$
- Dynkin-Label: $\mu = (n_1, \dots, n_r)$
- Dynkin-Label in fundamentaler Darstellung: $p = (\dots, 0, \underbrace{1}_{p\text{-te Stelle}}, 0, \dots)$
- Charaktere: $\chi_\mu(\mathcal{G}) = \chi_{(n_1, \dots, n_r)}(\mathcal{G})$
- fundamentale Charaktere: $\chi_p(\mathcal{G})$ mit $p = 1 \dots r$

Eichtheorie

- Eichfeld: $\mathfrak{A}_\mu(x) = \sum_a A_\mu^a(x) \mathfrak{T}^a$
- Linkvariable: $\mathcal{U}_{x,\mu}$
- Plakette: $\mathcal{U}_{x,\mu\nu} = \mathcal{U}_p$
- Polyakov-Loop: P
- Anzahl der Farbladungen: N_c

A.2 Zerlegung der reellen Darstellung der Gruppe G_2

Hier soll für die reelle Darstellung der Gruppe G_2 die Zerlegung

$$\Omega = \mathcal{S} \cdot \mathcal{U} \quad (\text{A.2})$$

berechnet werden. Für die reelle Darstellung erhält man diese Zerlegung, in dem man die zu $\mathcal{S} \in SO(7)/SO(6)$ gehörenden Generatoren exponentiert. Dies ergibt

$$\mathcal{S} = \exp \left\{ 2\sqrt{6} \sum_{i=9}^{14} t_i \mathfrak{T}_i \right\} = \begin{pmatrix} \cos 2T & -\hat{t}^T \\ \hat{t} & S \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

wobei der Vektor \hat{t} gegeben ist durch

$$\hat{t}^T = (t_9, t_{10}, t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{14}) \frac{\sin 2T}{T} \quad (\text{A.4})$$

$$T = \sqrt{t_9^2 + t_{10}^2 + t_{11}^2 + t_{12}^2 + t_{13}^2 + t_{14}^2} \quad (\text{A.5})$$

und S eine 6×6 -Matrix ist. Weitere Umformungen ergeben

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} \mu - 1 & -\mu \hat{K}^T \\ \mu \hat{K} & S(K) \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

mit einem reellen 6-Vektor K und der Matrix S

$$S(K) = R(K) + C(K)|_{6 \times 6} + C'(K)|_{6 \times 6} \quad (\text{A.7})$$

$$R_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\Delta} - \frac{2K_i K_j}{\Delta^2}, \quad \Delta^2 = 1 + K^2 \quad (\text{A.8})$$

Die Matrizen C und C' sind komplexe 3×3 -Matrizen. $|_{6 \times 6}$ bedeutet, dass sie zeilenweise verschoben und abwechselnd mit Real- und Imaginärteil in eine reelle 6×6 -Matrix eingebettet werden. Sie haben in komplexer Schreibweise folgende Form:

$$C_{\alpha\beta} = \frac{\bar{D}_\alpha D_\beta}{\Delta(1+\Delta)} - i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{D_\gamma}{\Delta} \quad 0 \leq i, j \leq 1, i = j = 2 \quad (\text{A.9})$$

$$C_{\alpha\beta} = \frac{D_\alpha D_\beta}{\Delta(1+\Delta)} + i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{D_\gamma}{\Delta} \quad 0 \leq i \leq 1, j = 2 \quad (\text{A.10})$$

$$C_{\alpha\beta} = \frac{D_\alpha D_\beta}{\Delta(1+\Delta)} - i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\bar{D}_\gamma}{\Delta} \quad 0 \leq j \leq 1, i = 2 \quad (\text{A.11})$$

$$C'_{\alpha\beta} = i \frac{\bar{D}_\alpha D_\beta}{\Delta(1+\Delta)} - \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{D_\gamma}{\Delta} \quad 0 \leq i, j \leq 1, i = j = 2 \quad (\text{A.12})$$

$$C'_{\alpha\beta} = -i \frac{D_\alpha D_\beta}{\Delta(1+\Delta)} - \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{D_\gamma}{\Delta} \quad 0 \leq i \leq 1, j = 2 \quad (\text{A.13})$$

$$C'_{\alpha\beta} = -i \frac{D_\alpha D_\beta}{\Delta(1+\Delta)} + \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\bar{D}_\gamma}{\Delta} \quad 0 \leq j \leq 1, i = 2 \quad (\text{A.14})$$

$$D_\alpha = K_{2\alpha} + iK_{2\alpha+1} \quad (\text{A.15})$$

Die $SU(3)$ -Matrix in einer reduziblen 7-dimensionalen Darstellung ist gegeben durch

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & U|_{6 \times 6} & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{pmatrix} \quad (\text{A.16})$$

Damit lässt sich Ω schreiben als

$$\Omega = \begin{pmatrix} \mu - 1 & -\mu U^T K^T \\ \mu K & SU \end{pmatrix} \quad (\text{A.17})$$

Damit ergibt sich auch eine Möglichkeit der Projektion einer Matrix in die Gruppe, die schneller zu berechnen ist als eine Projektion über die Algebra, die Logarithmieren und Exponenzieren einer Matrix und damit die Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren erfordert.

1. Berechne aus Ω_{11} die Zahl μ
2. Berechne aus Ω_{i1} den Vektor μK_i
3. Berechne $K = \sqrt{\frac{2}{\mu} - 1}$
4. Berechne den Vektor $K'_i = \mu K_i \frac{K}{\sqrt{\mu^2 K_i K_i}}$
5. Berechne S aus K'_i
6. Berechne $U = S^{-1}\Omega$

A Anhang

7. Projiziere U in $SU(3)$

8. Setze Ω' zusammen aus SU' und K'_i

Die inverse zu S lässt sich ebenfalls in einfacher Form angeben

$$S(K)^{-1} = R(K)^{-1} + C(K)|_{6 \times 6} + C'(K)|_{6 \times 6} \quad (\text{A.18})$$

$$R_{ij}^{-1} = \frac{\delta_{ij}}{\Delta} - \frac{2K_i K_j}{\Delta^2 - 2} \quad (\text{A.19})$$

$$C_{\alpha\beta} = \frac{\bar{D}_\alpha D_\beta}{\Delta(1+\Delta)} + i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{D_\gamma}{\Delta} \quad 0 \leq i, j \leq 1, i = j = 2 \quad (\text{A.20})$$

$$C_{\alpha\beta} = \frac{D_\alpha D_\beta}{\Delta(1+\Delta)} - i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{D_\gamma}{\Delta} \quad 0 \leq i \leq 1, j = 2 \quad (\text{A.21})$$

$$C_{\alpha\beta} = \frac{D_\alpha D_\beta}{\Delta(1+\Delta)} + i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\bar{D}_\gamma}{\Delta} \quad 0 \leq j \leq 1, i = 2 \quad (\text{A.22})$$

$$C'_{\alpha\beta} = i \frac{\bar{D}_\alpha D_\beta}{\Delta(1+\Delta)} + \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{D_\gamma}{\Delta} \quad 0 \leq i, j \leq 1, i = j = 2 \quad (\text{A.23})$$

$$C'_{\alpha\beta} = -i \frac{D_\alpha D_\beta}{\Delta(1+\Delta)} + \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{D_\gamma}{\Delta} \quad 0 \leq i \leq 1, j = 2 \quad (\text{A.24})$$

$$C'_{\alpha\beta} = -i \frac{D_\alpha D_\beta}{\Delta(1+\Delta)} - \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\bar{D}_\gamma}{\Delta} \quad 0 \leq j \leq 1, i = 2 \quad (\text{A.25})$$

$$(\text{A.26})$$

A.3 mikrokanonische Monte-Carlo-Simulationen

Zu erzeugen ist folgende Verteilung

$$\rho = \text{const} \cdot \prod_i \delta(E_i - S_i(\mathcal{P} - E_{0i})) \quad (\text{A.27})$$

und Phasenraum $\Gamma_i = [-M, M]$ mit festem E_{0i} . Die Zustandssumme des Systems ist gegeben durch

$$Z = \int \mathcal{D}\mathcal{P} \prod_i \int d\Gamma \delta(E_i - S_i(\mathcal{P} - E_{0i})) \quad (\text{A.28})$$

Folgender Algorithmus erzeugt die Verteilung

1. Wähle E_{0i}
2. Erzeuge neue Konfiguration $\mathcal{C}'(\mathcal{P})$ mit bevorzugtem Algorithmus
3. Berechne $S'_i[\mathcal{C}'(\mathcal{P})]$
4. Berechne $E'_i = E_i - S_i + S'_i$
5. Wenn $E'_i \in \Gamma_i$, akzeptiere neue Konfiguration
6. Weiter bei 2

A.4 Test des IHMC-Algorithmus für G_2 -Eichtheorie

In diesem Abschnitt wird der IHMC-Algorithmus getestet.

A.4.1 Systematische Fehler

Zuerst wird überprüft, für welche Diskretisierungen $\delta\tau$ und Integrationslängen L das Nähern der Exponentialabbildung durch eine Taylorreihe die Ergebnisse mit der exakten Exponentialfunktion reproduzieren kann und ob es dabei zu systematischen Fehlern oder lediglich statistischen Ungenauigkeiten kommt. Die Tests hierzu finden auf einem 6^4 -Gitter und $\beta = 10$ statt. In Abbildung A.2 wurden Simulationen mit der exakten Exponentialfunktion durchgeführt. Für alle Werte von $\Delta\tau$ liefert die Simulation die korrekten Plaketten-Werte. Man sieht außerdem, dass für eine Integrationslänge in der Nähe von 1 die Thermalisierungszeit am kleinsten ist und damit auch die Korrelationszeiten klein sind. Abbildung A.3 zeigt Kurven mit den selben IHMC-Parametern, aber diesmal wurde die Exponentialfunktion in 4. Ordnung durch eine Taylorentwicklung genähert. Hieraus ergibt sich eine optimale Integrationslänge zwischen $L = 0.5$ und $L = 1$. Es zeigt sich jedoch bei genauerer Betrachtung, dass das Nähern zu systematischen Fehlern in der Observablen führt (Abbildung A.1). In Abb. A.4 sind die Ergebnisse für die $\Omega = SU$ -Zerlegung gezeigt. Hier treten keine systematischen Fehler mehr auf. Der Grund für die systematischen Fehler ist das Verlassen der Gruppe.

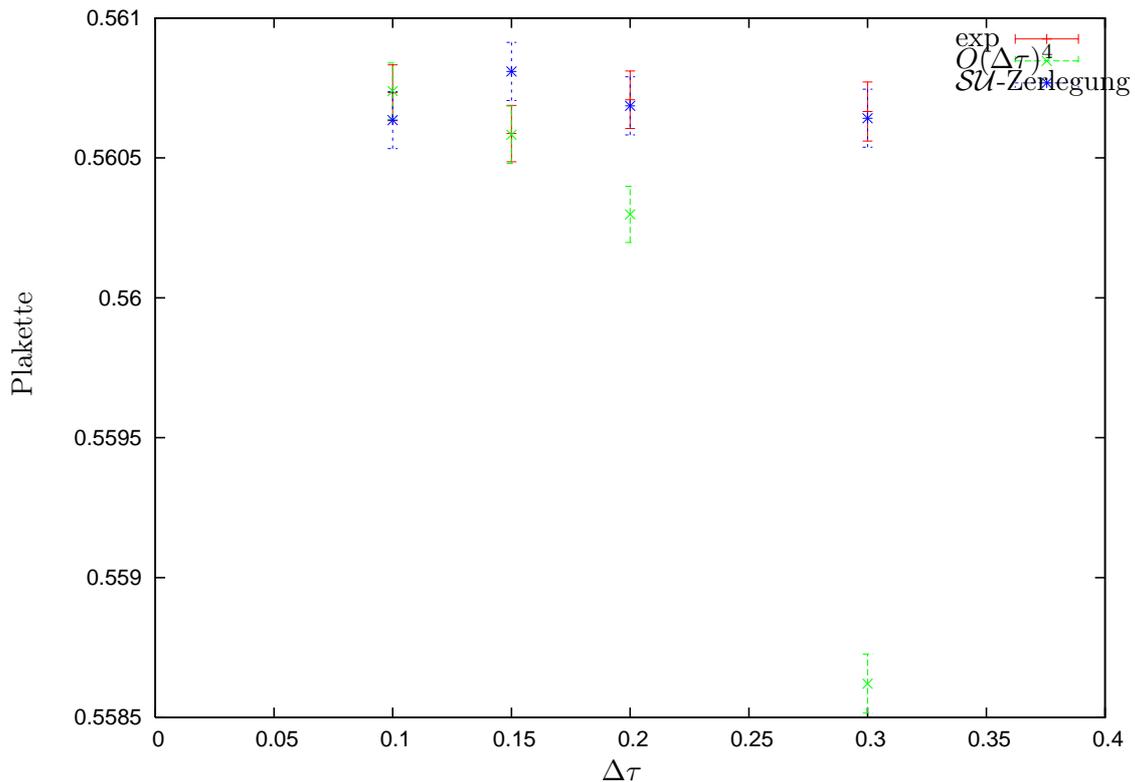


Abbildung A.1: Systematische Fehler für verschiedene Näherungen der Exponentialfunktion

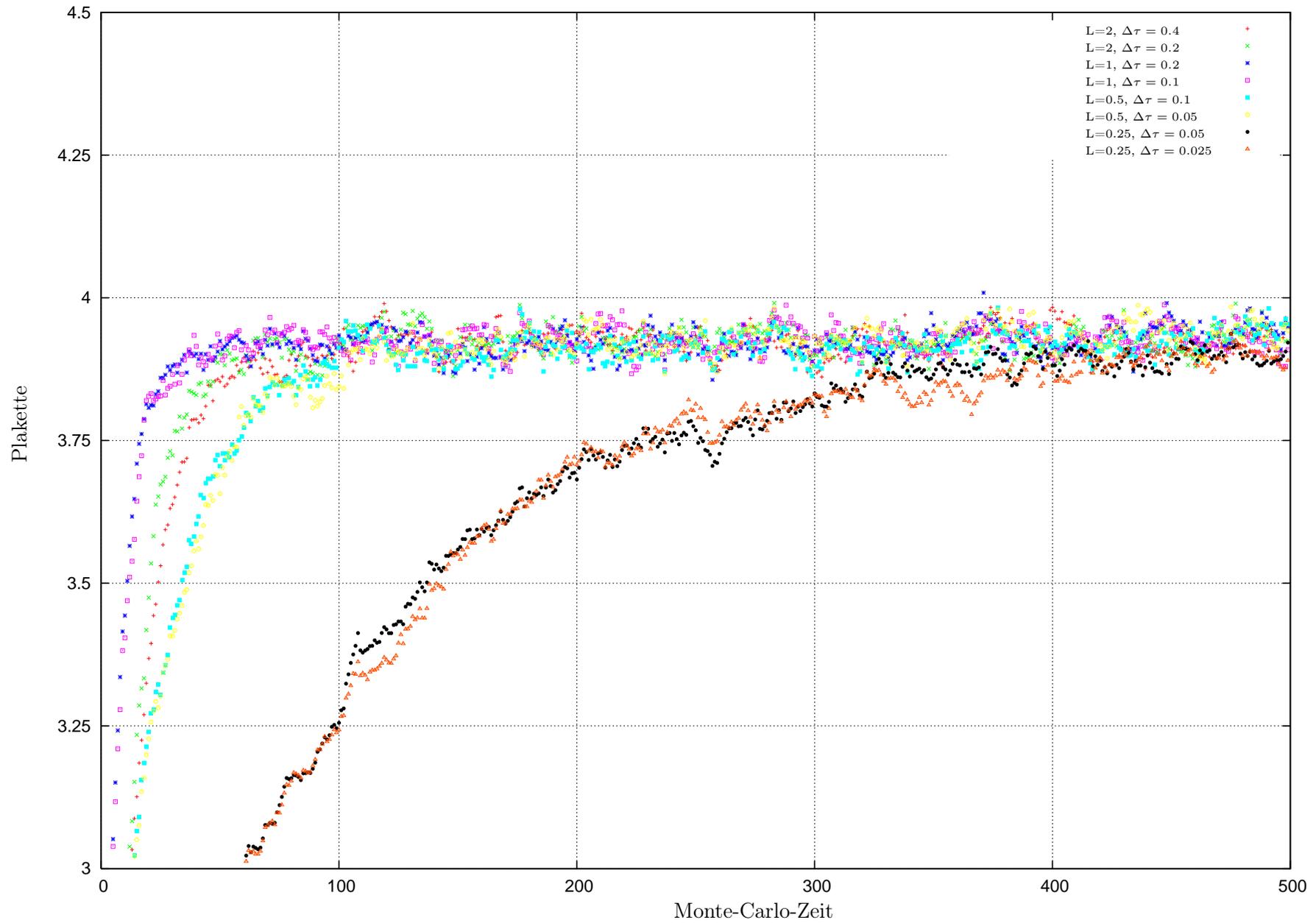


Abbildung A.2: Test IHMC für G_2 mit exakter Exponentialfunktion auf Gitter 6^4 und $\beta = 10$

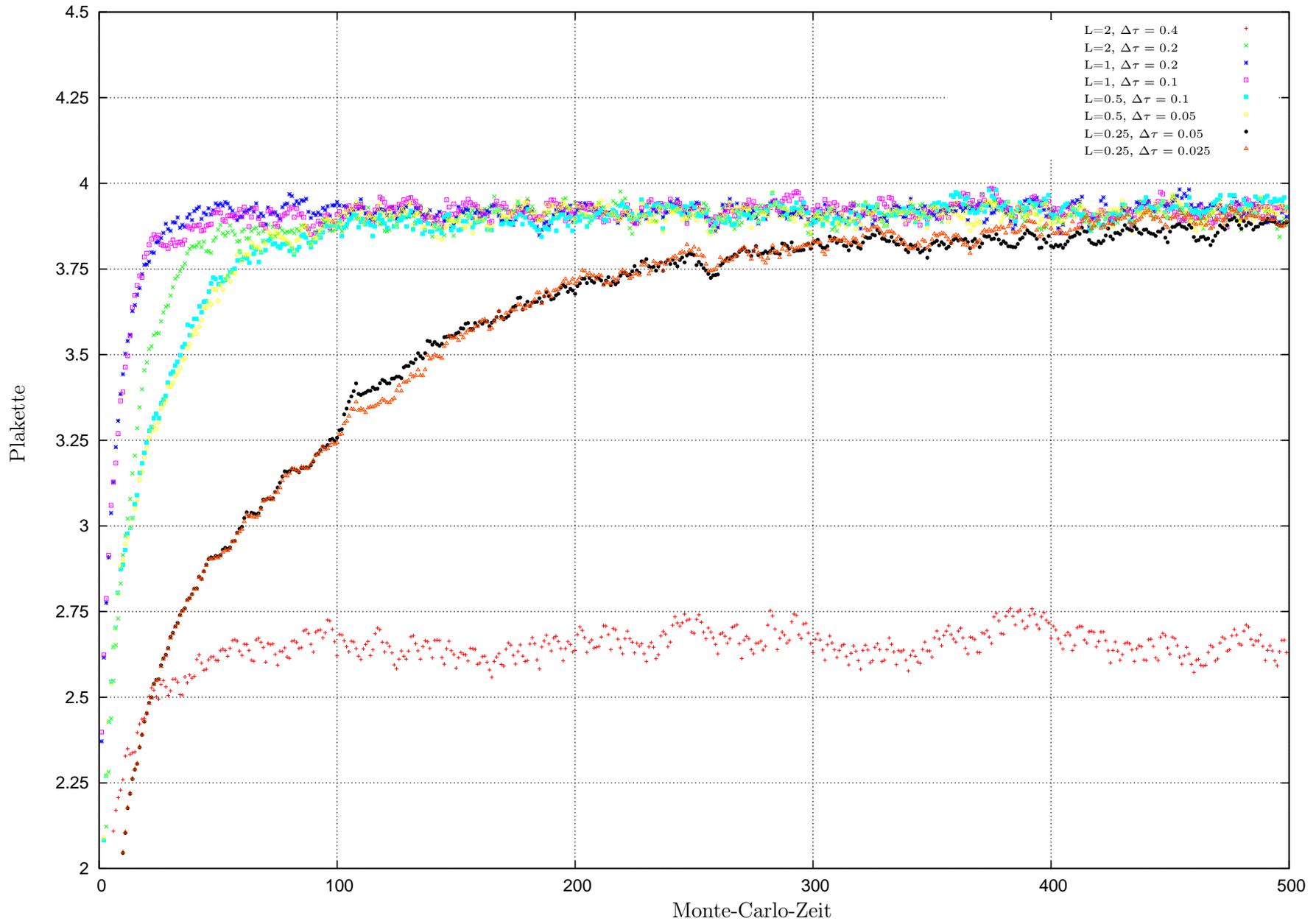


Abbildung A.3: Test IHMC für G_2 mit Exponentialfunktion in $O(\Delta\tau^4)$ auf Gitter 6^4 und $\beta = 10$

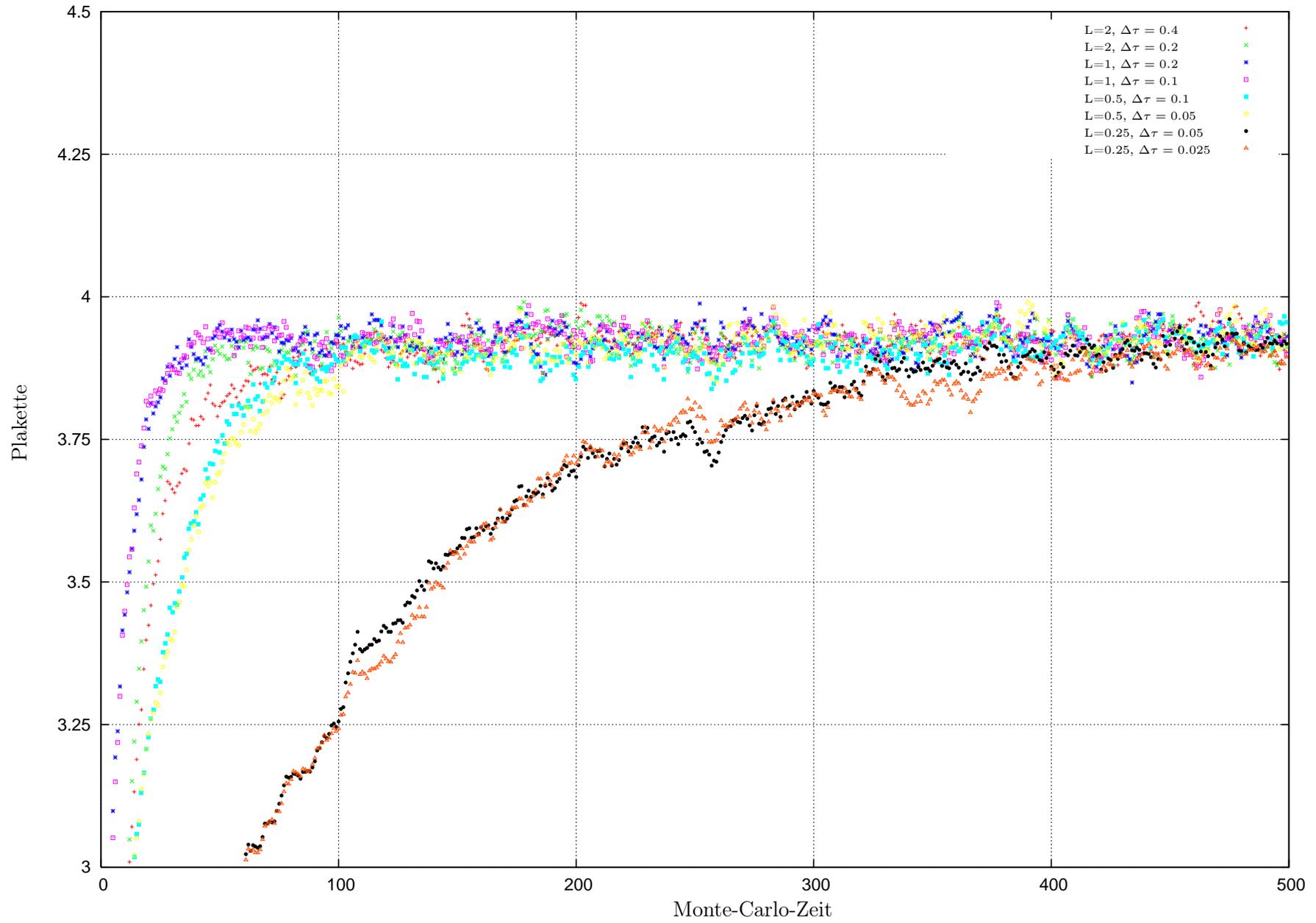


Abbildung A.4: Test IHMC für G_2 mit $\Omega = SU$ -Zerlegung auf Gitter 6^4 und $\beta = 10$

Literaturverzeichnis

- [1] Isaac Newton. *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Innys, MDCCXXVI.
- [2] James Clerk Maxwell. A dynamical theory of the electromagnetic field. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 155:459–512, 1865.
- [3] Max Planck. Über das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum. *Annalen der Physik*, 309(3):553–563, 1901.
- [4] A. Einstein. Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. *Annalen der Physik*, 322(6):132–148, 1905.
- [5] A. Einstein. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der Physik*, 14(1):194–224, 1905.
- [6] A. Einstein. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, 354(7):769–822, 1916.
- [7] E. Schrödinger. Quantisierung als Eigenwertproblem. *Annalen der Physik*, 385(13):437–490, 1926.
- [8] W. Heisenberg. Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen. *Zeitschrift für Physik*, 33(1):879–893, 1925.
- [9] M. Born, P. Jordan. Zur Quantenmechanik. *Zeitschrift für Physik*, 34:858, 1925.
- [10] P.A.M. Dirac. The Quantum Theory of the Electron. *Proc. Roy. Soc. London*, A117:610–624, 1928.
- [11] Sin-Itiro Tomonaga and J. R. Oppenheimer. On infinite field reactions in quantum field theory. *Phys. Rev.*, 74(2):224–225, Jul 1948.
- [12] Julian Schwinger. On quantum-electrodynamics and the magnetic moment of the electron. *Phys. Rev.*, 73(4):416–417, Feb 1948.
- [13] R. P. Feynman. Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, 20(2):367–387, Apr 1948.
- [14] J. Chadwick. Possible Existence of a Neutron. *Nature*, 129:312, February 1932.
- [15] C. N. Yang and R. L. Mills. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. *Phys. Rev.*, 96(1):191–195, Oct 1954.
- [16] S. L. Glashow. Partial symmetries of weak interactions. *Nucl. Phys.*, 22:579–588, 1961.
- [17] A. Salam and J. C. Ward. Electromagnetic and weak interactions. *Physics Letters*, 13:168–171, November 1964.
- [18] Steven Weinberg. A model of leptons. *Phys. Rev. Lett.*, 19(21):1264–1266, Nov 1967.

- [19] Harald Fritzsche and Murray Gell-Mann. Current algebra: Quarks and what else? *eConf*, C720906V2:135–165, 1972, hep-ph/0208010.
- [20] H. Fritzsche, M. Gell-Mann, and H. Leutwyler. Advantages of the color octet gluon picture. *Physics Letters B*, 47(4):365 – 368, 1973.
- [21] B. Greene. *Das elegante Universum*. Berliner Taschenbuch Verlag, 2002.
- [22] M. Green. *Superstring Theory*. Cambridge Univ Pr, 1988.
- [23] P.W. Higgs. Broken symmetries, massless particles and gauge fields. *Physics Letters*, 12(2):132 – 133, 1964.
- [24] Kenneth G. Wilson. Confinement of quarks. *Phys. Rev. D*, 10(8):2445–2459, Oct 1974.
- [25] Benjamin Svetitsky and Laurence G. Yaffe. Critical behavior at finite-temperature confinement transitions. *Nuclear Physics B*, 210(4):423 – 447, 1982.
- [26] E. Ising. Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus. *Zeit für Physik*, 31:253–258, 1925.
- [27] L. G. Yaffe and B. Svetitsky. First-order phase transition in the su(3) gauge theory at finite temperature. *Phys. Rev. D*, 26(4):963–965, Aug 1982.
- [28] Thomas Heinzl, Tobias Kaestner, and Andreas Wipf. Effective actions for the SU(2) confinement-deconfinement phase transition. *Phys. Rev.*, D72:065005, 2005, hep-lat/0502013.
- [29] M. Creutz, A. Gocksch, M. Ogilvie, and M. Okawa. Microcanonical renormalization group. *Phys. Rev. Lett.*, 53(9):875–877, Aug 1984.
- [30] K. Holland, P. Minkowski, M. Pepe, and U. J. Wiese. Exceptional confinement in G(2) gauge theory. *Nucl. Phys.*, B668:207–236, 2003, hep-lat/0302023.
- [31] Michele Pepe. Confinement and the center of the gauge group. *PoS*, LAT2005:017, 2006, hep-lat/0510013.
- [32] J. Greensite. The confinement problem in lattice gauge theory. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 51:1, 2003, hep-lat/0301023.
- [33] J. Greensite, K. Langfeld, S. Olejnik, H. Reinhardt, and T. Tok. Color screening, casimir scaling, and domain structure in g(2) and su(n) gauge theories. *Physical Review D*, 75:034501, 2007.
- [34] Lewis H. Ryder. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 1996.
- [35] Daniel V. Schroeder Michael E. Peskin. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Perseus, 1995.
- [36] Andreas Wipf. Quantenfeldtheorie 2. Vorlesungsskript, FSU Jena, 2005.
- [37] Ulrich Theis. Yang-Mills Theories and the Standard Model. Vorlesungsskript, FSU Jena, 2006.
- [38] Kurt Langfeld. A novel improved action for SU(3) lattice gauge theory. 2004, hep-lat/0403018.

- [39] R. Sommer. A New way to set the energy scale in lattice gauge theories and its applications to the static force and alpha-s in SU(2) Yang-Mills theory. *Nucl. Phys.*, B411:839–854, 1994, hep-lat/9310022.
- [40] Tobias Kästner. Effektive Theorien auf dem Raumzeitgitter. Diplomarbeit, FSU Jena, 2004.
- [41] Robert N. Cahn. *Semi-Simple Lie Algebras and Their Representations*. Benjamin-Cummings, 1984.
- [42] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. Institute of Physics Publishing, 2003.
- [43] Theodore Frankel. *The Geometry of Physics*. Cambridge University Press, 2003.
- [44] A. J. Macfarlane. The sphere S6 viewed as a G2/SU(3) coset space. *International Journal of Modern Physics A*, 17:2595 – 2613, 2002.
- [45] M. Pepe and U. J. Wiese. Exceptional deconfinement in G(2) gauge theory. *Nucl. Phys.*, B768:21–37, 2007, hep-lat/0610076.
- [46] Sergio L. Cacciatori, Bianca L. Cerchiai, Alberto Della Vedova, Giovanni Ortenzi, and Antonio Scotti. Euler angles for G(2). *J. Math. Phys.*, 46:083512, 2005, hep-th/0503106.
- [47] Robert D. Pisarski. Notes on the deconfining phase transition. 2002, hep-ph/0203271.
- [48] Guy Buss. Analytische Aspekte effektiver SU(N)-Gittereichtheorien. Diplomarbeit, FSU Jena, 2004.
- [49] Christian Wozar. Effektive Theorien der Gluodynamik bei endlichen Temperaturen. Diplomarbeit, FSU Jena, 2006.
- [50] Christian Wozar, Tobias Kaestner, Andreas Wipf, and Thomas Heinzl. Inverse Monte-Carlo determination of effective lattice models for SU(3) Yang-Mills theory at finite temperature. *Phys. Rev.*, D76:085004, 2007, 0704.2570.
- [51] M. Creutz. Monte Carlo Study of Quantized SU(2) Gauge Theory. *Phys. Rev.*, D21:2308–2315, 1980.
- [52] Nicola Cabibbo and Enzo Marinari. A new method for updating su(n) matrices in computer simulations of gauge theories. *Physics Letters B*, 119(4-6):387 – 390, 1982.
- [53] Phillipe de Forcrand and Oliver Jahn. Monte Carlo overrelaxation for SU(N) gauge theories. 2005, hep-lat/0503041.
- [54] Joyce C. Myers and Michael C. Ogilvie. New Phases of SU(3) and SU(4) at Finite Temperature. *Phys. Rev.*, D77:125030, 2008, 0707.1869.
- [55] Dmitri Diakonov, Nikolay Gromov, Victor Petrov, and Sergey Slizovskiy. Quantum weights of dyons and of instantons with non- trivial holonomy. *Phys. Rev.*, D70:036003, 2004, hep-th/0404042.
- [56] Jens Langelage, Gernot Munster, and Owe Philipsen. Strong coupling expansion for Yang-Mills theory at finite temperature. *PoS, LAT2007:201*, 2007, 0710.0512.

- [57] M. Billo, M. Caselle, A. D’Adda, and S. Panzeri. Toward an analytic determination of the deconfinement temperature in SU(2) L.G.T. *Nucl. Phys.*, B472:163–193, 1996, hep-lat/9601020.
- [58] S. Uhlmann, R. Meinel, and A. Wipf. Ward identities for invariant group integrals. *J. Phys.*, A40:4367–4390, 2007, hep-th/0611170.
- [59] E.M. Lifschitz L.D Landau. *Statistische Physik*. Lehrbuch der theoretischen Physik Bd. 5, Akademie Verlag, 1991.
- [60] M. Hasenbusch, K. Pinn, and C. Wierczkowski. Canonical demon monte carlo renormalization group. *Physics Letters B*, 338(2-3):308 – 312, 1994.
- [61] Simon Duane, A. D. Kennedy, Brian J. Pendleton, and Duncan Roweth. Hybrid monte carlo. *Physics Letters B*, 195(2):216 – 222, 1987.
- [62] Steven Gottlieb, W. Liu, D. Toussaint, R. L. Renken, and R. L. Sugar. Hybrid-molecular-dynamics algorithms for the numerical simulation of quantum chromodynamics. *Phys. Rev. D*, 35(8):2531–2542, Apr 1987.
- [63] Thomas Lippert. The hybrid Monte Carlo algorithm for quantum chromodynamics. 1997, hep-lat/9712019.
- [64] Alexander Laufer. The exponential map of $\mathfrak{gl}(n)$. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 30(15):5455–5470, 1997.
- [65] Guido Cossu, Massimo D’Elia, Adriano Di Giacomo, Biagio Lucini, and Claudio Pica. G2 gauge theory at finite temperature. *JHEP*, 10:100, 2007, 0709.0669.
- [66] Colin Morningstar and Mike J. Peardon. Analytic smearing of SU(3) link variables in lattice QCD. *Phys. Rev.*, D69:054501, 2004, hep-lat/0311018.
- [67] L’udovit Liptak and Stefan Olejnik. Casimir scaling in G(2) lattice gauge theory. *Phys. Rev.*, D78:074501, 2008, 0807.1390.
- [68] Christian Wozar, Tobias Kastner, Björn H. Wellegehausen, Andreas Wipf, and Thomas Heinzl. Inverse Monte-Carlo and Demon Methods for Effective Polyakov Loop Models of SU(N)-YM. 2008, 0808.4046.

Danksagung

Ich bedanke mich bei Prof. Dr. Andreas Wipf für die Möglichkeit, dieses interessante Thema in seiner Arbeitsgruppe bearbeiten zu können, für sein stetes Interesse an dieser Arbeit sowie für die gute Betreuung und Förderung.

Besonders möchte ich mich bei Christian Wozar bedanken, der immer geduldig alle meine Fragen angehört hat und mir mit vielen Ideen und Ratschlägen bei dieser Arbeit helfen konnte. Insbesondere sein Wissen über Simulationen und die technischen Probleme, die dabei auftreten können, haben mir sehr geholfen.

Weiter möchte ich mich bei Dr. Sebastian Uhlmann für seine Unterstützung auf dem Gebiet der Gruppentheorie bedanken sowie bei Dr. Tobias Kästner für seine Ratschläge zu Simulationen und Programmierung.

Des Weiteren danke ich Lukas Janssen, Johannes Hartung und Ulrich Harst für viele interessante Diskussionen und Gespräche über unsere aktuellen Probleme.

Ich danke der gesamten Arbeitsgruppe Quantenfeldtheorie für die freundliche Aufnahme und die angenehme Arbeitsatmosphäre.

Meinen Eltern danke ich dafür, dass sie mir dieses Studium ermöglicht und mich durch viele Gespräche unterstützt und begleitet haben.

Erklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst habe und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Seitens des Verfassers bestehen keine Einwände, die Arbeit für die öffentliche Nutzung in der Thüringer Universitäts- und Landesbibliothek zur Verfügung zu stellen.

Jena, 30. April 2009

Björn Welleghausen

