



seit 1558

Friedrich-Schiller-Universität Jena

DIPLOMARBEIT

Über eine Beziehung zwischen Confinement und chiraler Symmetriebrechung

eingereicht am
Theoretisch-Physikalisches Institut
der Physikalisch-Astronomischen Fakultät

von

FRANZISKA SYNATSCHKE

geboren am 17.07.1982 in Lemgo

30. Oktober 2007

*meinem Vater
in liebevoller Erinnerung*

1. Gutachter: Prof. Dr. phil. habil. Andreas Wipf (Universität Jena)

2. Gutachter: Dr. habil. Thomas Heinzl (University of Plymouth)

Tag der Verleihung des Diploms:

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Mathematische Grundlagen	3
2.1	Lie-Algebren	3
2.1.1	Die Lie-Algebra $\mathfrak{su}(3)$	4
2.2	Lie-Gruppen	5
2.2.1	Darstellungen	6
2.2.2	Konjugationsklassen	6
2.2.3	Invariantes Integrationsmaß	7
2.3	Die Gruppe $SU(\mathcal{N})$	8
2.4	Eichtransformationen	9
2.5	Clifford-Algebren	9
2.6	Grassmann-Algebra	10
3	Feldtheoretische Grundlagen	13
3.1	Pfadintegrale	13
3.1.1	Erwartungswerte	15
3.1.2	Zusammenhang zur statistischen Mechanik	15
3.1.3	Fermionisches Pfadintegral	15
3.2	Greenfunktionen	16
3.2.1	Regularisierung und Renormierung	17
3.3	Nichtabelsche Eichtheorien	17
3.3.1	Paralleltransporter	17
3.4	Quantenchromodynamik	19
3.5	Confinement	20
3.6	Quantenchromodynamik auf dem Torus	21
3.6.1	Notation	21
3.6.2	Übergangsbedingungen	21
3.6.3	Realisierung von getwisteten Randbedingungen	23
3.7	Eichinvariante Objekte der Gluonentheorie	23
3.7.1	Wilson-Loops und das Flächengesetz	23
3.7.2	Polyakov-Loops	24
3.8	Chirale Symmetrie und die Banks-Casher-Relation	26
4	Quantenchromodynamik auf dem Gitter	27
4.1	Konventionen der Gitterformulierung	27
4.1.1	Reskalierungen	28
4.1.2	Gittervariablen	28
4.1.3	Symmetrien auf dem Gitter	30

4.1.4	Pfadintegrale für Eichtheorien	30
4.2	Formulierung der Gitterwirkung	31
4.2.1	Die Wirkung der Gluonentheorie	31
4.2.2	Fermionen auf dem Gitter	31
4.3	Eichinvariante Objekte der Gluonentheorie in der Gitterformulierung	33
4.3.1	Wilson-Loop	33
4.3.2	Polyakov-Loop	34
4.3.3	Dicke Loops	35
4.4	Ableitung der Banks-Casher-Relation	35
5	Polyakov-Loop und Spektrum des Dirac-Wilson-Operators	37
5.1	Der Dirac-Wilson-Operator	37
5.1.1	Spektralzerlegung	37
5.1.2	Symmetrien des Dirac-Wilson-Operators	38
5.2	Eigenwerte für eine feste Eichfeldkonfiguration	38
5.2.1	Berechnung der Eigenwerte und Eigenfunktionen	39
5.2.2	Eigenwerte des Dirac-Operators mit Zentrumstransformation	41
5.2.3	Eigenschaften des Spektrums	42
5.3	Die Lage des Spektrums des Dirac-Wilson-Operators	42
5.3.1	Verhalten der kleinsten Eigenwerte	42
5.3.2	Verhalten der größten Eigenwerte	43
5.3.3	Verschiedene Potenzen des Spektrums	44
5.4	Der Polyakov-Loop ausgedrückt durch Potenzen des Dirac-Operators	45
5.4.1	Vergleich mit der Literatur	47
5.4.2	Massenunabhängigkeit der Formel	48
5.5	Trunkierte Eigenwertsummen	48
5.5.1	Die trunkierte Eigenwertsumme für den Staggered-Operator	48
5.5.2	Die trunkierte Eigenwertsumme für den Dirac-Wilson-Operator	49
5.5.3	Vergleich mit der Literatur	53
5.6	Spektrale Summen	53
5.6.1	Die Proportionalitätsfaktoren	54
6	Spektrale Summen als Ordnungsparameter für Confinement	57
6.1	Exponentielle Summe	58
6.1.1	Numerische Resultate	58
6.1.2	Analytische Resultate	59
6.2	Inverse Potenzfunktionen	61
6.2.1	Numerische Resultate	61
6.2.2	Analytische Resultate für die Feynmansumme	62
6.2.3	Analytische Resultate für die Banks-Casher-Summe	63
6.3	Gaußsche Summe	63
6.3.1	Numerische Resultate	64
6.3.2	Analytische Resultate	65
6.3.3	Einführen eines Dämpfungsfaktors	66
6.3.4	Skalierung mit dem zeitlichen Volumen	66
6.4	Zusammenfassung der Ergebnisse	67

7	Spektrale Summen auf dem Torus im Kontinuum	69
7.1	Gaußsche Summe in zwei Dimensionen – SU(2)	69
7.1.1	Zusammenhang mit Theta-Funktionen	71
7.1.2	Numerische Berechnung	72
7.1.3	Der Einfluß der Randbedingungen bei festem Polyakov-Loop . . .	74
7.2	Gaußsche Summe in vier Dimensionen – SU(2)	76
7.3	Gaußsche Summe in zwei Dimensionen – SU(3)	76
7.3.1	Berechnung der gaußschen Summe	77
7.3.2	Beitrag des Polyakov-Loops	78
7.3.3	Numerische Ergebnisse	79
7.3.4	Die trunkierte gaußsche Summe	84
7.3.5	Verallgemeinerung auf d Dimensionen	84
7.4	Zusammenfassung der Ergebnisse für die gaußsche Summe	85
7.5	Propagatoren in zwei Dimensionen – SU(2)	86
7.5.1	Banks-Casher-Summe – masseloser Fall	89
7.6	Propagatoren in d Dimensionen – SU(2)	92
7.7	Propagatoren in d Dimensionen – SU(3)	92
7.7.1	Banks-Casher-Summe – masseloser Fall	93
7.8	Zusammenfassung der Ergebnisse für die Propagatoren	94
7.9	Instantonen in zwei Dimensionen – SU(2)	96
8	Zusammenfassung und Ausblick	99
A	Konventionen	101
A.1	Definitionen der Größen	101
A.2	Das Einheitensystem	102
A.3	Dimensionsbetrachtungen der Felder	102
B	Formelsammlung	103
B.1	Spezielle Funktionen	103
C	Rechnungen zu Kapitel 5 und 7	105
C.1	Beweis der $2d - \lambda$ -Symmetrie	105
C.2	Rechnung zu den Zentrumselementen	106
C.3	Berechnung der Eigenwerte für die Eichgruppe SU(2)	107
C.4	Berechnung der Eigenwerte für die Eichgruppe SU(3)	107
C.5	Ausdrücken der gaußschen Summe durch Potenzen des Polyakov-Loops	108
C.6	Banks-Casher, masseloser Fall, SU(3)	111
	Literaturverzeichnis	113
	Danksagung	119
	Erklärung	121

1 Einleitung

*A scientist worthy of his name [...] experiences
in his work the same impression as an artist;
his pleasure is as great and of the same nature.*

Jules Henri Poincaré

Der Aufbau der Materie wird durch das Standardmodell der Elementarteilchenphysik beschrieben. Es vereinigt drei der vier Grundkräfte – die elektromagnetische Kraft, die starke und die schwache Kraft – und führt die bekannte Materie auf wenige Grundbausteine zurück. Bisher sind alle Vorraussagen des Standardmodells, die experimentell überprüft wurden, bestätigt worden. Eine Säule dieser Theorie ist die Quantenchromodynamik (QCD), die Theorie der starken Kernkraft oder starken Wechselwirkung. Gegenstand der QCD sind die sogenannten *Hadronen*. Ihr Name leitet sich vom griechischen Wort *hadron* für *stark* ab, weil sie der starken Kraft unterliegen. Hadronen werden weiter unterteilt in Baryonen – zu denen Protonen und Neutronen gehören – und Mesonen. Die QCD führt den Aufbau dieser beiden Teilchenklassen auf sechs Arten von Quarks und ihre acht Austauscheteilchen, die Gluonen, zurück. Baryonen bestehen aus drei Quarks, Mesonen aus einem Quark und einem Antiquark [42].

Quarks sind bisher nie frei beobachtet worden, sondern immer nur im gebundenen Zustand, also eingeschlossen in Baryonen und Mesonen. Dieses Phänomen wird als *Confinement* bezeichnet, vom englischen Wort *confine* für *einschließen*. Jede Theorie der starken Kernkraft muß dieses Phänomen beinhalten. Für Confinement gibt es verschiedene Erklärungsmodelle (vgl. [6] und [32]), aber bis heute ist es nicht gelungen, Confinement aus grundlegenden Prinzipien abzuleiten. Bei hohen Temperaturen und Drücken, wie sie zu Beginn des Universums geherrscht haben oder heute in Neutronensternen auftreten, wird erwartet, daß es einen Phasenübergang zu einem Quark-Gluonen-Plasma (auch Deconfinement-Phase genannt) gibt, also daß freie Quarks auftreten [8].

Für Confinement gibt es verschiedene Definitionen [3]. In dieser Arbeit wird eine Definition benutzt, die im Grenzfall unendlicher Quarkmasse gültig ist [32]. In diesem Fall spricht man auch von einer reinen Gluonentheorie, da es keine dynamischen Quarks gibt und die einzigen dynamischen Teilchen die Gluonen sind.

Neben Confinement gibt es in der QCD noch ein weiteres wichtiges Phänomen, die chirale Symmetriebrechung, die im Grenzfall verschwindender Quarkmasse zu beobachten ist [50]. Die chirale Symmetrie ist eine Symmetrie der Lagrangefunktion, die den links- und rechtshändigen Anteil der Fermionen-Wellenfunktion unabhängig voneinander transformiert. In einer chiral symmetrischen Theorie ist es möglich, eine unterschiedliche Anzahl von rechts- und linkshändigen Teilchen zu haben. Ein Massenterm koppelt die rechts- und linkshändigen Teile der Wellenfunktion, so daß in massiven Theorien die chirale Symmetrie gebrochen sein muß [19].

Es wird vermutet – und Gittersimulationen bestätigen dies – daß bei hohen Temperaturen und Drücken die chirale Symmetrie wiederhergestellt wird [1]. Dieser Phasenübergang geht mit einer Veränderung im Spektrum des Dirac-Operators einher. Der Ordnungsparameter für den Phasenübergang – das chirale Kondensat – wird durch die Banks-Casher-Relation [7] mit der Eigenwertdichte des Dirac-Operators bei null verbunden. Die chirale Symmetrie ist für leichte Quarks, deren Masse mit 2-3 MeV [105] klein ist gegen die Energieskala der starken Wechselwirkung (≈ 200 MeV [71]), zumindest näherungsweise vorhanden, und deshalb ist es sinnvoll, den Grenzfall verschwindender Masse, d. h. den chiralen Limes zu betrachten [78].

Die Formulierung der Quantenchromodynamik auf einem Raumzeitgitter ist eine Möglichkeit, nichtperturbative Ergebnisse zu erhalten [72]. Insbesondere Confinement, welches ein nichtperturbatives Phänomen ist, läßt sich so durch Computersimulationen untersuchen. Mit Hilfe solcher Simulationen wurden Messungen der kritischen Temperatur des Phasenübergangs zwischen Confinement und Deconfinement sowie zwischen Brechung und Wiederherstellung der chiralen Symmetrie durchgeführt (für einen Review siehe z. B. [47]). Es hat sich gezeigt, daß der Confinement-Deconfinement-Übergang in einer reinen Gluonentheorie ein Phasenübergang erster Ordnung ist und bei einer Temperatur von $kT \approx 260$ MeV stattfindet. Bei dieser Temperatur verschwindet aber auch das chirale Kondensat. Es wird deshalb vermutet, daß es einen gemeinsamen Mechanismus gibt, der diesen beiden Phänomenen zugrunde liegt.

Bisher war kein analytischer Zusammenhang zwischen beiden Phänomenen bekannt. 2006 wurde eine Beziehung veröffentlicht [27], die den Polyakov-Loop – den Ordnungsparameter des Confinement-Deconfinement-Übergangs – auf dem Gitter mit dem Spektrum des Dirac-Operators verknüpft. Mit dem Umweg über das Spektrum dieses Operators ist es so vielleicht möglich, den lange gesuchten gemeinsamen Mechanismus zu finden.

Die vorliegende Arbeit greift diese Beziehung zwischen Polyakov-Loop und Spektrum des Dirac-Operators auf und erweitert sie. Sie ist folgendermaßen aufgebaut: In den Kapiteln zwei bis vier werden die mathematischen und physikalischen Grundlagen zusammengestellt, die benötigt werden, um Quantenchromodynamik im Kontinuum und auf dem Gitter zu beschreiben. Im fünften Kapitel wird eine Darstellung des Polyakov-Loops als spektrale Summe des Dirac-Wilson-Operators abgeleitet. Der Schwerpunkt des sechsten Kapitels liegt auf anderen spektralen Summen, die mit der Banks-Casher-Relation – und damit der chiralen Symmetriebrechung – und dem Heat-Kernel – einer Größe, die für die Regularisierung der Fermiondeterminante verwendet wird – in Verbindung stehen. Es wird ihr Zusammenhang zum Polyakov-Loop aufgezeigt. Im siebten Kapitel werden einfache Eichkonfigurationen im Kontinuum auf einer euklidischen, torusförmigen Raumzeit betrachtet. Für diese Eichkonfigurationen wird der Zusammenhang der spektralen Summen mit dem Polyakov-Loop abgeleitet.

2 Mathematische Grundlagen

*Wer hohe Türme bauen will, muß
lange beim Fundament verweilen.*

Anton Bruckner

In diesem Kapitel werden die mathematischen Grundlagen der vorliegenden Arbeit vorgestellt und die benötigten Begriffe eingeführt.

Lie-Algebren und Lie-Gruppen sind unverzichtbare Werkzeuge in der theoretischen Physik. Das mächtige Konzept der Symmetrien wird durch Lie-Gruppen beschrieben, die infinitesimalen Generatoren von Symmetrien in der Physik erzeugen Lie-Algebren. In der Quantenchromodynamik ist die Theorie der Symmetriegruppen, insbesondere der $SU(3)$, ein zentraler Aspekt. Nicht zuletzt die mathematische Schönheit dieser Theorie ist ein Grund dafür, daß sie von einem Großteil der Physiker als die Theorie akzeptiert wird, die die starke Kernkraft beschreibt.

Die folgenden Ausführungen halten sich, soweit nicht anders angegeben, an [4, 25, 40, 77, 98].

2.1 Lie-Algebren

Eine *Algebra* ist ein \mathbb{K} -Vektorraum mit einer multiplikativen Ringstruktur (für eine Definition siehe z. B. [4]). Eine *Lie-Algebra* \mathfrak{g} ist eine Algebra mit einer *Lie-Klammer*

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g},$$

die außer der \mathbb{K} -Linearität die Eigenschaften

$$\begin{aligned} [x, x] &= 0 & \forall x \in \mathfrak{g}, \\ [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] &= 0 & \forall x, y, z \in \mathfrak{g}. \end{aligned} \quad (\text{Jacobi-Identität})$$

hat. Die erste Eigenschaft impliziert die Antisymmetrie der Lie-Klammer. Die *Dimension* $d = \dim \mathfrak{g}$ einer Lie-Algebra ist die Dimension von \mathfrak{g} aufgefaßt als Vektorraum \mathcal{V} . Für endliche oder abzählbar unendliche Dimension werden die Elemente einer Basis für diesen Vektorraum als *Generatoren* bezeichnet. Kompakte Lie-Algebren haben nur endlich viele Generatoren. Allerdings wird der Begriff „Generator“ auch für die Elemente benutzt, mit denen die gesamte Lie-Algebra durch lineare Kombination und durch Anwenden der Lie-Klammer, also algebraisch, generiert werden kann. Bei gegebener Basis ist die Lie-Klammer wegen der Bilinearität eindeutig durch ihre Wirkung auf die Basiselemente

T_i festgelegt. Die Definition der ganzen Lie-Algebra ergibt sich dann aus der Entwicklung

$$[T_a, T_b] = i \sum_{c=1}^d f_{ab}{}^c T_c.$$

Die Entwicklungskoeffizienten $f_{ab}{}^c$ heißen *Strukturkonstanten*, sie sind von der gewählten Basis abhängig, antisymmetrisch in den unteren Indizes und erfüllen die Jacobi-Identität

$$3f_{[ab}{}^d f_{c]d}{}^e = f_{ab}{}^d f_{cd}{}^e + f_{bc}{}^d f_{ad}{}^e + f_{ca}{}^d f_{bd}{}^e = 0.$$

Die Strukturkonstanten sind mit der obigen Definition reell und die Generatoren in Übereinstimmung mit dem Großteil der physikalischen Literatur (siehe z.B. [67, 77]) hermitesch.

Wichtig ist die *Darstellungstheorie* von Lie-Algebren. Eine *Darstellung* ist die *Wirkung* der Lie-Algebra – bzw. weiter unten der Lie-Gruppe – auf einem Vektorraum. Die mathematische Definition ist die folgende: Eine Darstellung einer Lie-Algebra \mathfrak{g} auf einem Vektorraum \mathcal{V} ist ein Lie-Algebra-Homomorphismus

$$\phi : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{gl}(\mathcal{V}), \quad T \mapsto \phi(T), \quad [\phi(T_i), \phi(T_j)] = \phi([T_i, T_j])$$

mit dem Kommutator als Lie-Klammer, der die algebraische Struktur von \mathfrak{g} erhält. $\mathfrak{gl}(\mathcal{V})$ ist die *allgemeine lineare Algebra* von \mathcal{V} , die Lie-Algebra, welche von allen linearen Abbildungen Φ von $\mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}$ gebildet wird.

Die für diese Arbeit wichtigste Darstellung ist die *adjungierte Darstellung*. Diese ist ein spezieller Homomorphismus

$$\text{ad} : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), \quad T_i \mapsto \text{ad}_{T_i}, \quad \text{ad}_{T_i} T_j = [T_i, T_j]$$

der Lie-Algebra, der jedem Element von \mathfrak{g} eine lineare Abbildung $\mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}$ zuordnet. Die Einträge der Darstellungsmatrix der Generatoren sind die Strukturkonstanten:

$$[\text{R}_{\text{ad}}(T_a)]_b{}^c = i f_{ab}{}^c$$

Mit dieser Wahl sind die Darstellungsmatrizen *hermitesche* $n \times n$ -Matrizen. Für kompakte Lie-Algebren ist es immer möglich, eine Darstellung zu finden, so daß die Strukturkonstanten f_{abc} vollständig antisymmetrisch sind. Die Dimension der Darstellungsmatrix in der adjungierten Darstellung ist gleich der Dimension der Lie-Algebra. Die adjungierte Darstellung existiert für jede Lie-Algebra.

Der Kern der adjungierten Darstellung ist gleich dem *Zentrum* \mathfrak{z} der Lie-Algebra. Das Zentrum enthält die Elemente der Lie-Algebra, die mit allen anderen Elementen der Lie-Algebra vertauschen:

$$\text{Ker}(\text{ad}) = \{T | [T, \mathfrak{g}] = 0\} = \mathfrak{z}$$

2.1.1 Die Lie-Algebra $\mathfrak{su}(3)$

Die $\mathfrak{su}(3)$ spielt eine wichtige Rolle bei der Beschreibung der starken Wechselwirkung und wird in dieser Arbeit benötigt. Sie kann durch 3×3 hermitesche, spurlose Matrizen

dargestellt werden. Als Basis werden in der Regel die *Gell-Mann-Matrizen*

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \hat{\lambda}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \hat{\lambda}_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \hat{\lambda}_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \hat{\lambda}_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \hat{\lambda}_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \hat{\lambda}_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \hat{\lambda}_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

verwendet. Als Generatoren der Lie-Algebra werden meist $T_a \equiv \hat{\lambda}_a/2$ definiert, die den Kommutatorrelationen der Lie-Algebra $[T_i, T_j] = if_{ij}^k T_k$ genügen. In Tabelle 2.1 sind die Strukturkonstanten der $\mathfrak{su}(3)$ aufgeführt. Eine ausführliche Diskussion der $\mathfrak{su}(3)$ findet sich z. B. in [33].

abc	123	147	156	246	257	345	367	458	678
f_{ab}^c	1	1/2	-1/2	1/2	1/2	1/2	-1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$

Tabelle 2.1: Die Strukturkonstanten der $\mathfrak{su}(3)$, die nichtaufgeführten Strukturkonstanten ergeben sich aus der Antisymmetrie von f_{abc} (Tabelle aus [41]).

2.2 Lie-Gruppen

Eine Lie-Gruppe G der Dimension d ist eine endlichdimensionale, differenzierbare Mannigfaltigkeit mit algebraischer Gruppenstruktur, so daß Inversenbildung und Gruppenmultiplikation C^∞ sind. Eine Lie-Gruppe heißt *kompakt*, wenn die zugrundeliegende Mannigfaltigkeit kompakt ist. Die Struktur der Mannigfaltigkeit erlaubt es, einen Zusammenhang zu Lie-Algebren herzustellen. Dazu identifiziert man den Tangentialraum an das Einselement e als Lie-Algebra der Gruppe. Man wählt eine Koordinatenumgebung U von e und lokale Koordinaten $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$. Das Einselement ist durch die Wahl $g(\alpha = 0) = e$ ausgezeichnet. Die Gruppenelemente lassen sich in der Nähe der Identität um das Einselement entwickeln:

$$g(\alpha) = g(0) + i\alpha^k T_k + \mathcal{O}(\alpha^2), \quad T_k \equiv \left. \frac{\partial g(\alpha)}{\partial \alpha_k} \right|_{\alpha=0} \quad (2.1)$$

Die T_k sind die Generatoren der Lie-Algebra, k läuft von eins bis zur Dimension d der Lie-Algebra.

Eine wichtige Rolle spielt im folgenden das *Zentrum* Z_G einer Gruppe G . Diese Untergruppe enthält alle Gruppenelemente, die mit allen anderen vertauschen. Für abelsche Gruppen besteht das Zentrum aus der ganzen Gruppe, für eine Gruppe mit trivialem Zentrum enthält es nur das Einselement.

2.2.1 Darstellungen

Eine der Hauptanwendungen der Darstellungstheorie von Gruppen ist es, Symmetrien von Problemen auszunutzen.

Die *Darstellung* einer Gruppe auf dem linearem Raum \mathcal{V} ist ein Homomorphismus

$$D : G \rightarrow GL(\mathcal{V}), \quad G \rightarrow D(g).$$

\mathcal{V} ist im folgenden ein n -dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum, $GL(\mathcal{V})$ ist als

$$GL(\mathcal{V}) := \{A \mid A \text{ bijektive Abbildung in } \mathcal{V}\}$$

definiert. Die Dimension von \mathcal{V} ist die Dimension der Darstellung. Nach Wahl einer Basis in \mathcal{V} kann man $GL(\mathcal{V})$ mit der Matrixgruppe $GL(n, \mathbb{K})$ identifizieren und den $D(g)$ *Darstellungsmatrizen* zuordnen. Eine Darstellung heißt *treu*, wenn D injektiv ist, d. h. die Darstellung erhält alle Eigenschaften der Gruppe. Der Vektorraum \mathcal{V} wird im weiteren Verlauf auch als *Gruppenraum* bezeichnet.

Zwei Darstellungen D und D' einer Gruppe heißen *äquivalent*, wenn sie durch eine Übergangsmatrix auseinander hervorgehen, wie dies z. B. bei einem Basiswechsel der Fall ist:

$$D'(g) = SD(g)S^{-1}$$

Eine Darstellung ist *irreduzibel*, wenn \mathcal{V} keinen echten Teilraum besitzt, der unter allen $D(g)$ invariant ist. Im nächsten Abschnitt wird die adjungierte Darstellung vorgestellt, die im Laufe dieser Arbeit benötigt wird.

Adjungierte Darstellung

Die adjungierte Darstellung einer Gruppe G ist die Darstellung von G auf der zugehörigen Lie-Algebra \mathfrak{g} . Sie ist als

$$\text{Ad}(g) : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}, \quad \text{Ad}(g)T = gTg^{-1}, \quad g \in G, \quad T \in \mathfrak{g}$$

definiert [98]. Dabei sind die T die Generatoren der Lie-Algebra \mathfrak{g} von G und wie in Gleichung (2.1) definiert. Die Dimension der adjungierten Darstellung ist gleich der Dimension der Gruppe. Sie ist bis auf Zentrumselemente *treu*, d. h.

$$\text{Ad}(g_1) = \text{Ad}(g_2) \Leftrightarrow g_2 = g_1 \cdot z, \quad z \in \mathcal{Z}_G.$$

2.2.2 Konjugationsklassen

Die *Konjugation* eines Gruppenelementes $a \in G$ mit $g \in G$ ist als

$$gag^{-1}$$

definiert. Zwei Gruppenelemente, die durch Konjugation ineinander überführt werden können, heißen *konjugiert*. Die Konjugation ist eine *Äquivalenzrelation*, d. h. eine symmetrische, transitive und reflexive Relation. Jede Gruppe läßt sich damit in disjunkte Konjugationsklassen zerlegen. Die Konjugationsklasse eines Elementes a ist als

$$K_a = \{gag^{-1} | g \in G\}$$

definiert. Funktionen $f : G \mapsto \mathbb{C}$, die auf Konjugationsklassen konstant sind, d. h. für die

$$f(a) = f(gag^{-1}) \quad \forall g \in G$$

gilt, heißen *Klassenfunktionen*. Eine wichtige Klassenfunktion ist die Spur der Darstellungsmatrizen, da Darstellungen bis auf Äquivalenzen durch ihre Spur charakterisiert sind. Diese Klassenfunktion heißt deshalb auch *Charakter*:

$$\chi_D(K_a) \equiv \chi_D(a) \equiv \text{tr } D(a)$$

Jede Klassenfunktion $f(K_a)$ läßt sich in Charaktere entwickeln, d. h.

$$f(K_a) = \sum_D \alpha_D \cdot \chi_D(K_a),$$

wobei die Summe über alle irreduziblen Darstellungen läuft.

2.2.3 Invariantes Integrationsmaß

Dieser Abschnitt führt ein invariantes Integrationsmaß für kompakte Lie-Gruppen ein, er folgt [16, 72, 79]. Ein Existenzbeweis für ein solches Integrationsmaß findet sich z. B. in [16].

Das Maß muß die grundlegenden Eigenschaften eines Integrationsmaßes

$$\begin{aligned} \int dg (af(g) + bh(g)) &= a \int dg f(g) + b \int dg h(g) \\ \int dg f(g) &> 0 \quad \text{wenn } f(g) > 0 \quad \forall g \end{aligned}$$

erfüllen, wobei f, h beliebige Funktionen auf der Gruppe und a, b beliebige komplexe Zahlen sind. Zusätzlich fordert man die *Linksinvarianz* des Integrationsmaßes

$$\int dg f(g) = \int dg f(g'g)$$

mit g' einem beliebigem, festen Element der Gruppe. Für kompakte Lie-Gruppen ist das Haar-Maß sowohl rechts- als auch linksinvariant [25]. Ein Beweis hierfür findet sich z. B. in [16]. In [25, S. 377] sind die Haar-Maße für einige wichtige Gruppen aufgeführt. Für kompakte Gruppen kann man das Maß so normieren, daß

$$\int dg 1 = 1$$

gilt. Eine weitere Eigenschaft des Integrationsmaßes ist

$$\int dg f(g^{-1}) = \int dg f(g).$$

Für Gittereichtheorien bedeutet dies, daß die Richtung der Linkvariable nicht in das Integrationsmaß eingeht.

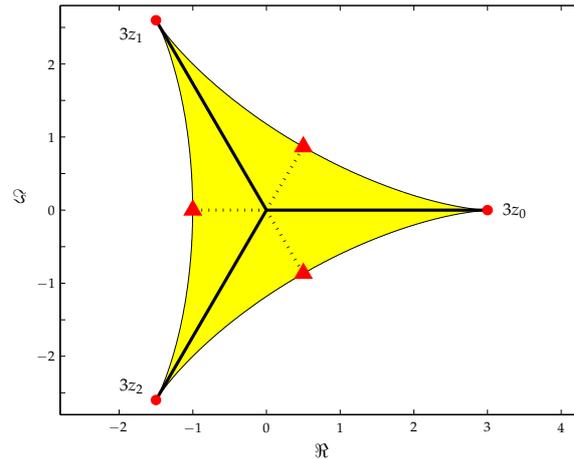


Abbildung 2.1: zur Definition der Antizentrumselemente (Abbildung aus [101])

2.3 Die Gruppe $SU(\mathcal{N})$

In dieser Arbeit wird als Eichgruppe die $SU(\mathcal{N})$ betrachtet, darunter versteht man die Gruppe der unitären $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ Matrizen mit Determinante eins. Es handelt sich um eine $\mathcal{N}^2 - 1$ dimensionale, kompakte Lie-Gruppe. Im folgenden werden einige allgemeine Eigenschaften der $SU(\mathcal{N})$ vorgestellt sowie die Gruppen $SU(2)$ und $SU(3)$ näher betrachtet.

In dieser Arbeit spielt das Zentrum der $SU(\mathcal{N})$ eine wichtige Rolle, welches in diesem Fall isomorph zur diskreten Gruppe $\mathbb{Z}_{\mathcal{N}}$ ist, die durch

$$z \in \mathbb{Z}_{\mathcal{N}} \iff z = e^{2i\pi k/\mathcal{N}}, \quad k \in \{1, 2, \dots, \mathcal{N}\}$$

gegeben ist. Das Zentrum der $SU(\mathcal{N})$ ist in der definierenden Darstellung

$$\mathbb{Z}_{SU(\mathcal{N})} = \{e^{2i\pi k/\mathcal{N}} \cdot \mathbb{1}_{\mathcal{N}}\}.$$

Für die $SU(3)$ ist es möglich, Antizentrumselemente zu definieren, die im Laufe der Arbeit benötigt werden. Antizentrumselemente sind die Elemente, deren Spur in der komplexen Ebene der Spur der Zentrumselemente gegenüberliegt (s. Abb. 2.1).

Die Gruppe $SU(2)$

Die Generatoren der $SU(2)$ sind die unitären 2×2 Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Gruppe $SU(3)$

Aus den Gell-Mann-Matrizen – einer Darstellung der Lie-Algebra $\mathfrak{su}(3)$ (vgl. Abschnitt 2.1.1) – erhält man die *definierende* oder **3**-Darstellung der $SU(3)$, siehe z. B. [69, S. 114]. Diese Darstellung wird in der Quantenchromodynamik benötigt.

2.4 Eichtransformationen

Das Konzept der *Eichtransformation* und daraus abgeleitete *Eichtheorien* sind ein mächtiges Werkzeug in der theoretischen Physik und spielen eine wichtige Rolle in dieser Arbeit. Dieser Abschnitt folgt [77] und der Einleitung von [80].

Eichtransformationen sind orts- und zeitabhängige Transformationen mit Elementen der *Eichgruppe* – in der Regel eine kompakte Lie-Gruppe – welche die beobachtbaren Größen wie z. B. Feldstärken nicht ändern. Wenn die Eichgruppe nichtabelsch ist, spricht man von *nichtabelschen Eichtheorien* oder *Yang-Mills-Theorien* nach C. N. Yang und R. L. Mills, die als erste solche Theorien betrachtet haben [104]. Eine ausführliche differentialgeometrische Behandlung von Eichtheorien findet sich z. B. in [77].

Der Begriff *Eichtransformation* ist eigentlich eine unglückliche Fehlbezeichnung. H. Weyl meinte damit ursprünglich eine Skalentransformation der Metrik $g_{\mu\nu} \mapsto e^{\lambda(x)} g_{\mu\nu}$ mit reellen Funktionen $\lambda(x)$, also eine Transformation, bei der Koordinaten im alten Sinn des Wortes „geeicht“ wurden.

Eichtransformationen lassen sich in Homotopieäquivalenzklassen¹ von Abbildungen der Raumzeit in die Eichgruppe einteilen, die durch eine natürliche Zahl n – die *Windungszahl* – unterschieden werden. Die Eichtransformationen mit $n = 0$ sind homotop zur Einheit und werden *kleine* Eichtransformationen genannt. Eichtransformationen mit $n \neq 0$ heißen *große* Eichtransformationen. Ein Übersichtsartikel zu diesem Thema ist [46]. Große Eichtransformationen werden im Laufe dieser Arbeit benötigt.

Das Verhalten der in dieser Arbeit verwendeten Operatoren unter Eichtransformationen wird später ausführlich behandelt (s. Abschnitt 3.3).

2.5 Clifford-Algebren

Clifford-Algebren stellen die mathematische Grundlage dar, um Fermionen beschreiben zu können. Eine ausführliche Diskussion von Clifford-Algebren findet sich z. B. in [15], dieser Abschnitt gibt nur die für diese Arbeit relevanten Aspekte wieder und folgt [18] und [97].

Im folgenden werden die Clifford-Algebren des Minkowskiraums und des euklidischen

¹Für eine Definition von Homotopieäquivalenzklassen siehe z. B. [63].

Raums benötigt. Diese sind durch

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = \begin{cases} 2\delta_{\mu\nu} & \text{Euklid} \\ 2\eta_{\mu\nu} & \text{Minkowski} \end{cases}$$

gegeben. Für einen d -dimensionalen Minkowskiraum bzw. euklidischen Raum ist die Dimension der Clifford-Algebra $2^{\lfloor d/2 \rfloor}$. Eine Darstellung der Clifford-Algebra ist durch Tensorprodukte der Paulimatrizen gegeben.

Um einen konjugierten Spinor definieren zu können, benötigt man die unitäre Matrix $\mathcal{A} = \prod \gamma^i$, wobei das Produkt über alle „zeitartigen“ γ -Matrizen läuft. Die Matrix \mathcal{A} hat die Eigenschaft

$$\mathcal{A} \gamma^\mu \mathcal{A}^\dagger = (-)^{t+1} (\gamma^\mu)^\dagger. \quad (2.2)$$

Die *Dirac-Konjugation* eines Spinors in einer flachen Raumzeit ist als

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \mathcal{A}$$

definiert. Nach Gleichung (2.2) sind die euklidischen γ -Matrizen hermitesch.

2.6 Grassmann-Algebra

Fermionen werden durch antikommutierende *Grassmann-Variablen* beschrieben. Einen Überblick über Grassmann-Variablen bieten [60, 66].

Grassmann-Variablen quadrieren zu null, wodurch dem Pauli-Prinzip Rechnung getragen wird. Erzeugt wird eine n -dimensionale Grassmann-Algebra durch n antikommutierende Generatoren η_1, \dots, η_n mit $\{\eta_i, \eta_j\} = 0$. Jede Funktion in Grassmann-Variablen hat die *endliche* Reihenentwicklung

$$\phi(\eta) = \phi_0 + \sum_i \phi_1(i) \eta_i + \sum_{i < j} \phi_2(i, j) \eta_i \eta_j + \dots$$

mit total antisymmetrischen $\phi_k(i_1, \dots, i_k)$.

Ableitungen sind über

$$\frac{\partial}{\partial \eta_i} \eta_i \eta_k \equiv +\eta_k = -\frac{\partial}{\partial \eta_i} \eta_k \eta_i$$

definiert. Ableitungen von Funktionen gewinnt man mit Hilfe dieser Regel, indem man die obige Ableitungsvorschrift auf die Reihenentwicklung anwendet. Die Antikommutativität führt dazu, daß zweite Ableitungen nach dem gleichen Argument verschwinden. Dies hat zur Folge, daß die Differentiation nicht invertierbar ist [66]. Eine *Integration* für Grassmann-Variablen muß deshalb definiert werden, indem man ihre Eigenschaften axiomatisch fordert. Daraus ergeben sich die folgenden Regeln:

$$\int d\eta_i = 0, \quad \int d\eta_i \eta_i = 1 \quad \text{und} \quad \{d\eta_i, d\eta_j\} = 0$$

Das Integral ist unter Translation mit einem Element der Grassmann-Algebra invariant.

Bei der Berechnung von Mehrfachintegralen muß die Integrationsvariable zuerst bis zum jeweiligen Differential im Integrationsmaß kommutiert werden, danach können die obigen Regeln angewendet werden.

Bei linearen Transformationen $\eta' = A\eta$ tritt die Jakobi-Determinante im Nenner anstatt wie bei gewöhnlichen kommutierenden Zahlen im Zähler auf.

Komplexe Grassmann-Variablen

Eine komplexe Grassmann-Algebra der Dimension N ist eine reelle Grassmann-Algebra über dem Körper der komplexen Zahlen mit

$$\eta \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_r + i\eta_i).$$

Für komplexe Grassmann-Variablen η, θ und $c \in \mathbb{C}$ gelten die Regeln

$$(\eta^*)^* = \eta \quad (\eta\theta)^* = \theta^*\eta^* \quad (c\eta)^* = c^*\eta^*.$$

Im weiteren Verlauf werden *gaußsche Integrale* der Form

$$\mathcal{Z} \sim \int d\eta_1^* d\eta_1 \dots d\eta_n^* d\eta_n \exp(-\eta^\dagger M \eta) = \det(M)$$

mit einer antisymmetrischen $n \times n$ -Matrix M benötigt. Dieses Ergebnis erhält man durch Entwickeln der Exponentialfunktion in eine Reihe und anschließende gliedweise Integration.

Grassmann-Felder

In einer Feldtheorie wie der Quantenchromodynamik werden Fermionen durch Grassmann-Felder beschrieben. Diese Felder treten auf, wenn die Anzahl der Generatoren der Grassmann-Algebra gegen unendlich geht. Sie erfüllen die Kommutatorrelationen

$$\{\psi(x), \psi(y)\} = \{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} = \{\bar{\psi}(x), \bar{\psi}(y)\} = 0$$

Für die Definition fermionischer Pfadintegrale werden außerdem die folgenden Eigenschaften benötigt:

$$\frac{\delta}{\delta\psi(x)}\psi(y)\psi(z) = \psi(y)\delta(z-x), \quad \int d\psi(x) = 0, \quad \int d\psi(x)\psi(x) = 1$$

3 Feldtheoretische Grundlagen

*Begriffe ohne Anschauung sind leer,
Anschauung ohne Begriffe ist blind.*

Immanuel Kant

Dieses Kapitel widmet sich der Feldtheorie und stellt die Konzepte und Begriffe bereit, die im weiteren Verlauf der Arbeit benötigt werden. Die Feldtheorie ist eine Erweiterung des Lagrange-Formalismus der klassischen Mechanik. Kräfte, Materie und Wechselwirkungen werden in dieser Theorie durch Felder beschrieben, also dadurch, daß jedem Raumpunkt bestimmte Eigenschaften zugeschrieben werden. Die bekanntesten klassischen Feldtheorien, welche quantenmechanische Effekte vernachlässigen, sind die Elektrodynamik und die allgemeine Relativitätstheorie. Die Quantenfeldtheorie ist eine Vereinigung von Quantenmechanik und spezieller Relativitätstheorie und eine der erfolgreichsten Theorien in der Physik.

In dieser Arbeit werden natürliche Einheiten verwendet, d. h. es wird

$$\hbar = c = 1$$

gesetzt. Die sich daraus ergebenden Einheiten der übrigen physikalischen Größen sind im Anhang A.2 aufgeführt.

3.1 Pfadintegrale

Pfadintegrale sind in der modernen Quantenfeldtheorie ein unverzichtbares Werkzeug geworden und bieten einen eleganten Ausgangspunkt der störungstheoretischen Behandlung quantenfeldtheoretischer Probleme. Dieser Abschnitt folgt, soweit nicht anders angegeben, den Quellen [23, 60, 99, 100].

Dirac suchte 1933 nach einer Formulierung der Quantenmechanik, bei der die Wirkung S eine ähnliche Rolle spielt wie in der klassischen Mechanik. Für freie Teilchen und Teilchen, deren Mittelwert den klassischen Bewegungsgleichungen genügen, ist der Propagator vom Ort q nach q' tatsächlich durch

$$\mathcal{K}(t, q', q) \propto e^{iS[q_k]}$$

gegeben. 1948 fand Feynman auch für nichtlineare Systeme einen solchen Zusammenhang, indem er in der Wirkung *alle* Wege von q nach q' zuließ und nicht nur die Lösungen der klassischen Bewegungsgleichung. Er konnte zeigen, daß seine Formulierung äquivalent zur Formulierung Heisenbergs und Schrödingers ist [23].

Feynman legte seiner Ableitung der Quantenmechanik zwei Postulate zu Grunde [23]:

1. Wenn eine *ideale Messung* durchgeführt wird, um zu bestimmen, ob der Weg eines Teilchens in einem bestimmten Raumzeitgebiet liegt, dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Ergebnis positiv ist, durch das absolute Quadrat einer Summe komplexer Beiträge von jedem Weg in diesem Gebiet gegeben.
2. Der Betrag dieser Beiträge ist für jeden Weg gleich, aber ihre Phase ist das Zeitintegral der Lagrangefunktion \mathcal{L} über diesen Weg in Einheiten von \hbar .

Das Raumzeitgebiet \mathcal{R} wird so gewählt, daß zu jedem Weg $q(t)$ ein endliches Zeitintervall gehört, welches in endliche viele Intervalle der Länge $\varepsilon = t_{k+1} - t_k$ unterteilt wird. Für die Ortsvariablen gilt die Bezeichnungskonvention $q(t_k) \equiv q_k$. Das Pfadintegral ist durch

$$\psi(\mathcal{R}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{C} \int_{\mathcal{R}} \exp \left[i \sum_k S[q_{k+1}, q_k] \right] \dots dq_{k+1} dq_k \dots \quad (3.1)$$

definiert, \mathcal{C} ist dabei ein Normierungsfaktor. Die Integration läuft über alle Werte von q_1, \dots, q_k, \dots die in der Region \mathcal{R} liegen. Die Wirkung

$$S[q_{k+1}, q_k] \equiv \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathcal{L}(\dot{q}(t), q(t)) dt.$$

gibt wegen der starken Oszillation des Integranden nur in der Nähe der klassischen Wirkung wesentliche Beiträge, da diese den Exponenten minimiert – dies ist das Prinzip der stationären Phase (siehe z. B. [90]). Anschaulich gesprochen „testet“ ein Teilchen auch Wege vom Anfangs- in den Endzustand aus, die keine Lösung der klassischen Bewegungsgleichungen sind.

Führt man ein formales Integrationsmaß $\mathcal{D}q$ „über alle Wege“ ein, das über den Grenzprozeß in Gleichung (3.1) bestimmt ist, kann man das Pfadintegral formal als

$$\psi(\mathcal{R}) = \mathcal{C} \int_{\mathcal{R}} \mathcal{D}q e^{iS[q]}$$

schreiben. Allerdings existiert das unendliche Produkt von Lebesgue-Maßen nicht, deshalb hat $\mathcal{D}q$ keine präzise mathematische Bedeutung. Setzt man aber das Pfadintegral zu imaginären Zeiten fort, läßt sich als strenges Maß das *Wiener-Maß* konstruieren. In diesem Fall spricht man vom *euklidischen Pfadintegral*.

Die anschauliche Bedeutung eines Pfadintegrals ist eine „Summe über alle Wege“, gewichtet mit einer Phase, die von der zugehörigen Wirkung abhängt. Die Pfadintegralmethode gestattet eine einheitliche Beschreibung von Quantenmechanik, Quantenfeldtheorie und statistischer Mechanik.

Mit Hilfe eines Integralkerns läßt sich Gleichung (3.1) als

$$\psi(t, q') = \int \mathcal{K}(t, q', q) \psi(t_0, q) dq \quad \text{mit} \quad \mathcal{K}(q, q', t) = \mathcal{C} \int_{q(t_0)=q}^{q(t)=q'} \mathcal{D}q e^{iS[q]}$$

schreiben. Dabei ist $\mathcal{K}(t, q', q)$ der *Propagator*, der die Wahrscheinlichkeitsamplitude für den Übergang des System vom Zustand q in den Zustand q' angibt, \mathcal{C} ist wieder eine Normierungskonstante.

Mit Pfadintegralen lassen sich quantenmechanische Wahrscheinlichkeitsamplituden für Übergänge als Integrale über klassische Felder ausdrücken.

3.1.1 Erwartungswerte

Der Erwartungswert eines Operators \mathcal{O} im Pfadintegralformalismus im Minkowski-Raum ist

$$\langle \mathcal{O} \rangle_M = \frac{\int \mathcal{D}q \mathcal{O}(q) \exp(iS[q])}{\int \mathcal{D}q \exp(iS[q])}.$$

Für euklidische Pfadintegrale nach Fortsetzung zu imaginären Zeiten ist er

$$\langle \mathcal{O} \rangle_E = \frac{\int \mathcal{D}q \mathcal{O}(q) \exp(-S_E[q])}{\int \mathcal{D}q \exp(-S_E[q])}.$$

3.1.2 Zusammenhang zur statistischen Mechanik

Der Pfadintegralformalismus liefert einen direkten Zusammenhang zwischen statistischer Mechanik und Quantenmechanik, denn die Zustandssumme der Quantenstatistik kann als Pfadintegral mit imaginärer Zeit aufgefaßt werden. Identifiziert man die inverse Temperatur mit der euklidischen Zeit $\tau = \hbar\beta$, ist die Zustandssumme der kanonischen Verteilung gerade ein euklidisches Pfadintegral

$$\mathcal{Z}(\beta) = \text{tr} e^{-\beta H} = \mathcal{C} \oint_{q(0)=q(\beta)} \mathcal{D}q e^{-S_E[q]},$$

d. h. es wird über alle *periodischen* Wege integriert – die euklidische Raumzeit der Quantenstatistik ist ein Zylinder $S^1 \times \mathbb{R}^{d-1}$. Dieser Zusammenhang wird z. B. ausgenutzt, um Quantenfeldtheorien bei endlicher Temperatur auf einem Gitter mit periodischen Randbedingungen zu simulieren.

In dieser Arbeit wird, wenn nicht anders gekennzeichnet, immer eine euklidische Theorie betrachtet.

3.1.3 Fermionisches Pfadintegral

Um Pfadintegrale für Fermionen zu definieren, muß man das Pauli-Prinzip berücksichtigen, dies geschieht durch die Verwendung von Grassmann-Variablen (s. Abschnitt 2.6) für die Fermionenfelder ψ und $\bar{\psi}$. Das fermionische erzeugende Funktional im Minkowski-Raum lautet

$$\mathcal{Z}[\eta, \bar{\eta}] = \mathcal{Z}_0^{-1} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L} + \bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x)) \right],$$

dabei sind η und $\bar{\eta}$ grassmannwertige Felder. Die Lagrangefunktion ist durch

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi$$

gegeben und

$$\mathcal{Z}_0 = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L} \right]$$

ist die Normierungskonstante. Nach Ausintegration der Fermionenfelder erhält man

$$\mathcal{Z}[\eta, \bar{\eta}] = \mathcal{Z}_0^{-1} \det(-i\mathcal{M}) e^{-i\bar{\eta}\cdot\mathcal{M}^{-1}\eta} \quad \text{mit} \quad \mathcal{M}(x, y) = -(i\gamma_\mu \partial^\mu + m)\delta^4(x - y).$$

Der Feynman-Propagator für Fermionen und damit der Propagator der Dirac-Gleichung ist durch $S_F = \mathcal{M}^{-1}$ gegeben. Er bewegt Lösungen mit positiver Energie vorwärts und Lösungen mit negativer Energie rückwärts in der Zeit. Der Propagator der Bewegungsgleichung ist – bis auf eine Phase – die *Zweipunktsfunktion*.

Die Ableitungen, die hier nicht ausgeführt wurden, sind in [60] zu finden.

3.2 Greenfunktionen

Greenfunktionen hängen mit Übergangsraten für Streuzustände mit m einlaufenden und n auslaufenden Zuständen zusammen. Diese Übergangsraten werden durch *Korrelationsfunktionen* bestimmt¹, d. h. durch die Vakuumerwartungswerte

$$G(x'_1, \dots, x'_n, x_1, \dots, x_m) = \langle 0 | \mathcal{T} [\hat{\phi}(x'_1) \dots \hat{\phi}(x'_n) \hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_m)] | 0 \rangle$$

der zeitgeordneten Feldoperatoren $\hat{\phi}$, dabei steht \mathcal{T} für den Zeitordnungsoperator. Das Vakuum ist das der vollen, wechselwirkenden Theorie. Diese Erwartungswerte lassen sich mit Hilfe von Pfadintegralen nach der Vorschrift

$$G(x_1, \dots, x_n) = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{iS[\phi]}}{\int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]}}$$

berechnen. Oft werden diese Korrelationsfunktionen auch als *Greenfunktionen* oder *n-Punkt-Funktionen* bezeichnet. Sie sind – bis auf eine Phase von π – Propagatoren. Mit Hilfe von *Feynmandiagrammen* kann man sich Greenfunktionen graphisch veranschaulichen. Mathematisch versteht man unter einer Greenfunktion die Lösung einer Differentialgleichung zu einer δ -förmigen Inhomogenität.

Die fermionische Greenfunktion hat die Form

$$G(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) = \langle \mathcal{T} [\hat{\psi}(x_n) \dots \hat{\psi}(x_1) \hat{\bar{\psi}}(x_{2n}) \dots \hat{\bar{\psi}}(x_{n+1})] \rangle.$$

Für eine ausführlichere Beschreibung und die Ableitung der angeführten Formeln sei auf [60] verwiesen.

¹dies ist das sogenannte *Reduktionstheorem*

3.2.1 Regularisierung und Renormierung

Die Berechnung von Greenfunktionen führt im allgemeinen auf divergente Ausdrücke; um ihnen einen Sinn zu geben, muß den Integralen zuerst ein endlicher Wert gegeben werden, dies nennt man *regularisieren*. Übliche Regularisierungsmethoden sind z. B. die Einführung eines Abschneidewertes („cutoff“) oder eine Abweichung von vier Dimensionen. Ein wichtiges Hilfsmittel zur Regularisierung ist die Einführung eines Raumzeitgitters und eines damit verbundenen Abschneideimpulses („momentum cutoff“).

Der bei der Regularisierung eingeführte Regularisierungsparameter muß am Ende der Rechnung durch *Renormierung* entfernt werden. Es gibt verschiedene Renormierungsschemata, die aber physikalisch äquivalente Aussagen liefern müssen.

3.3 Nichtabelsche Eichtheorien

Dieser Abschnitt folgt [59, 67, 77], insbesondere [59] enthält eine ausführliche Einführung in nichtabelsche Eichtheorien, welche eine wichtige Rolle in der Physik spielen. Beispiele sind die elektroschwache Kraft mit der Eichgruppe $SU(2) \times U(1)$ und die starke Kernkraft mit der Eichgruppe $SU(3)$.

Bei der Ableitung einer Eichtheorie stellt man die *Eichinvarianz* – die Wirkung darf sich nicht ändern, wenn man eine lokale Eichtransformation durchführt (vgl. Abschnitt 2.4) – an den Anfang und erhält daraus die Form der Lagrangefunktion, deren Eigenschaften durch die Wahl der Eichgruppe festgelegt wird.

3.3.1 Paralleltransporter

Es werden im folgenden die unitären Eichgruppen $SU(\mathcal{N})$ betrachtet, weil diese Gruppen für diese Arbeit relevant sind. Die Konventionen für die Eichtransformationen folgen [59].

Um die für eine Eichtheorie benötigten Größen abzuleiten, fordert man, daß sich die Wirkung unter Eichtransformation der Felder

$$\psi(x) \mapsto \Omega \psi(x) = \Omega^\dagger(x) \psi(x), \quad \psi^\dagger(y) \mapsto \Omega \psi^\dagger(y) = \psi^\dagger(y) \Omega(y)$$

mit dem Gruppenelement Ω aus der Eichgruppe nicht ändert. Die partielle Ableitung liefert in diesem Fall keinen sinnvollen Ableitungsbegriff, da die Eichtransformation ortsabhängig ist. Sie vergleicht Felder an unterschiedlichen Orten, die unterschiedlichen Transformationen unterworfen wurden:

$$\partial_\mu \psi(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [\psi(x + \varepsilon e_\mu) - \psi(x)]$$

Benötigt wird ein Operator $\mathcal{U}(y, x)$, der die Eichtransformation kompensiert, d. h. dessen Transformationsverhalten durch

$$\Omega \mathcal{U}(y, x) = \Omega^\dagger(y) \mathcal{U}(y, x) \Omega(x)$$

gegeben ist. Dieser Operator ist ein *Paralleltransporter*. Er hat das gleiche Transformationsverhalten wie ein Quark-Antiquark-Paar.

Differentialgeometrisch wird der Paralleltransporter folgendermaßen definiert: Einer Kurve \mathcal{C}_{yx} mit gegebener Parametrisierung, die die Raumzeitpunkte x und y verbindet, wird eine $SU(\mathcal{N})$ -Matrix durch

$$\mathcal{U}(\mathcal{C}_{yx}) : V_x \rightarrow V_y$$

zugeordnet. Ein Paralleltransporter hat die folgenden Bedingungen zu erfüllen:

$$\mathcal{U}(\emptyset) = \mathbb{1}, \quad \mathcal{U}(\mathcal{C}_1 \circ \mathcal{C}_2) = \mathcal{U}(\mathcal{C}_1)\mathcal{U}(\mathcal{C}_2), \quad \mathcal{U}(-\mathcal{C}) = \mathcal{U}(\mathcal{C})^{-1}$$

Der paralleltransportierte Vektor ist als $\mathcal{U}(\mathcal{C}_{yx})\psi(x) \in V_y$ definiert. Der explizite Ausdruck für $\mathcal{U}(\mathcal{C}_{yx})$ entlang des Weges \mathcal{C}_{yx} ist

$$\mathcal{U}(\mathcal{C}_{yx}) = \mathcal{P} \exp \left(ig_0 \int_{\mathcal{C}_{yx}} dz^\mu \mathfrak{A}_\mu(z) \right), \quad (3.2)$$

dabei ist \mathcal{P} der Pfadordnungsoperator². Der Paralleltransporter ist ein Element der $SU(\mathcal{N})$, \mathfrak{A}_μ ein matrixwertiges Feld mit Einträgen aus der zugehörigen Lie-Algebra, μ ein Lorentz-Index.

Die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d}{ds} \mathcal{U}(x(s), y) = \left(ig_0 \frac{dx^\mu}{ds} \mathfrak{A}_\mu(x(s)) \right) \cdot \mathcal{U}(x(s), y)$$

liefert eine äquivalente Definition des Paralleltransporters.

Mit Hilfe des Paralleltransporters läßt sich in Analogie zur allgemeinen Relativitätstheorie die *kovariante Ableitung*

$$D_\mu \psi \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [\psi(x + \varepsilon e_\mu) - \mathcal{U}(x + \varepsilon e_\mu, x)\psi(x)]$$

als sinnvolle Ableitung definieren.

Infinitesimale Beschreibung der kovarianten Ableitung

Für eine infinitesimale Form der kovarianten Ableitung wird der Paralleltransporter in der Verschiebung $\varepsilon \cdot n^\mu e_\mu$ der beiden Felder entwickelt:

$$\mathcal{U}(x + \varepsilon e_\mu, x) = 1 + ig_0 \varepsilon \mathfrak{A}_\mu^a T_a + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

²Für die Pfadordnung wird der Integrationsweg in n infinitesimale Segmente unterteilt mit x_0, \dots, x_n als Stützpunkte und $x_0 = x, x_n = y$. Außerdem definiert man $dx_l = x_l - x_{l-1}$. Auf jedem dieser Segmente kann der Exponentialausdruck näherungsweise durch die erste Ordnung in der Taylorentwicklung ausgewertet werden. Der pfadgeordnete Ausdruck ist damit definiert als

$$\mathcal{U}(\mathcal{C}_{yx}) = \lim_{dx_l \rightarrow 0} \prod_{l=0}^{n-1} [1 + ig \mathfrak{A}_\mu(x_l) dx_{l+1}^\mu].$$

Dabei tritt als Vorfaktor der Generatoren T_a das Vektorpotential \mathfrak{A}_μ^a auf. Die kovariante Ableitung ist damit

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_0 \mathfrak{A}_\mu^a T_a.$$

Um einen eichinvarianten Term zu erhalten, der nur vom Eichpotential \mathfrak{A}_μ^a abhängt, bildet man die Feldstärke $\mathfrak{F}_{\mu\nu}^a$ aus dem Kommutator der kovarianten Ableitung (s. auch Anhang A.1):

$$\begin{aligned} -ig_0 \mathfrak{F}_{\mu\nu}^a T_a &\equiv [D_\mu, D_\nu] \\ \Rightarrow \mathfrak{F}_{\mu\nu}^a T_a &\equiv \partial_\mu \mathfrak{A}_\nu^a T_a - \partial_\nu \mathfrak{A}_\mu^a T_a + g_0 f_{bc}^a \mathfrak{A}_\mu^b \mathfrak{A}_\nu^c T_a \end{aligned}$$

In dieser Arbeit wird die kovariante Ableitung in Zusammenhang mit dem *Dirac-Operator*

$$\mathfrak{D} = \gamma^\mu D_\mu$$

benötigt. Damit die Wirkung eichinvariant bleibt, muß der Dirac-Operator kovariant transformieren:

$$\Omega \mathfrak{D} = \Omega^\dagger \mathfrak{D} \Omega$$

Für das Eichfeld ergibt sich daraus das Transformationsverhalten

$$\Omega \mathfrak{A}_\mu = \Omega^\dagger \mathfrak{A}_\mu \Omega - \frac{i}{g_0} \Omega^\dagger \partial_\mu \Omega.$$

3.4 Quantenchromodynamik

Dieser Abschnitt gibt einen kurzen Überblick über die Quantenchromodynamik (QCD). Er folgt im wesentlichen [34, 41, 93]. Eine gute Einführung in die QCD ist außerdem [62]. Ein Überblick insbesondere zur asymptotischen Freiheit findet sich in den Nobelpreisreden von Gross [36] und Wilcek [95] sowie ihrer Originalveröffentlichung [35] und der Veröffentlichung von Politzer [68].

1964 postulierten Gell-Mann [30] und Zweig [106] das Quarkmodell, nach dem alle bekannten Teilchen als Anregungen von Subpartikeln – den *Quarks*³ – aufgefaßt werden. Sie hatten beobachtet, daß sich der „Elementarteilchenzoo“ durch Multipletts der SU(3) klassifizieren läßt. Sie postulierten, daß es drei Quarks – unterschieden durch ihre *Flavour* – gibt, welche die 3-Darstellung dieser Flavour-SU(3) bilden, sowie Antiquarks, welche die $\bar{3}$ -Darstellung der SU(3) bilden. In den 1970er Jahren wurde die Existenz von weiteren Quarks entdeckt, zusätzlich zu den drei „leichten“ Quarks *up*, *down* und *strange* gibt es noch die „schweren“ Quarks *charmed*, *bottom* und *top*. Bei der Flavour-SU(3)-Symmetrie handelt es sich um eine zufällige Symmetrie, die dadurch zustande kommt, daß die zuerst bekannten Quarks mit den Flavours *up*, *down* und *strange* im Vergleich zur Skala der starken Wechselwirkung verhältnismäßig leicht sind. Eine ausführliche Auflistung aller bekannten Teilchen und ihrer Eigenschaften ist in [105] zu finden.

³nach dem Satz „Three Quarks for Muster Mark“ aus *Finnegan's Wake* von James Joyce

Die Dynamik der Quarks – und damit die starke Wechselwirkung – wird aber nicht durch die Flavours bestimmt, sondern durch eine weitere Eigenschaft, die *Farbe* genannt wird. Die Austauschteilchen der Quark-Quark-Wechselwirkung – die *Gluonen* – koppeln an die Farbladung und sind „Flavour-blind“, d. h. sie wechselwirken mit allen Quark-Arten. Um die Quark-Quark-Wechselwirkung zu beschreiben, wird heutzutage eine SU(3)-Eichtheorie verwendet, welche die Farbe als Freiheitsgrad besitzt. Diese Theorie wird als *Quantenchromodynamik* bezeichnet. Sie ist die Theorie der starken Wechselwirkung und beschreibt den Aufbau und die Wechselwirkungen in Atomkernen. Es gibt drei Farbladungszustände rot, grün und blau. Diese drei Farbzustände werden als Darstellung einer SU(3)-Farbgruppe aufgefaßt.

Der endgültige Durchbruch – die Anerkennung der QCD als die korrekte Theorie der starken Wechselwirkung – kam im Jahr 1973, als Gross, Wilczek und Politzer entdeckten, daß nichtabelsche Eichtheorien eine Eigenschaft aufweisen, die als asymptotische Freiheit bezeichnet wird. Darunter versteht man, daß die effektive Quark-Gluon- und Gluon-Gluon-Kopplung bei kleinen Abständen schwächer wird, sie aber zunimmt, wenn die Teilchen auseinandergebracht werden. Dies ist eine Konsequenz der Selbstwechselwirkung der Gluonen, die selbst eine Farbladung tragen. Die asymptotische Freiheit liefert den theoretischen Rahmen, um die experimentellen Ergebnisse, daß sich Quarks nicht isoliert beobachten lassen – was auf eine sehr stark bindende Kraft hinweist und als *Confinement* bezeichnet wird –, sich aber bei kleinen Abständen nahezu wie freie Teilchen verhalten, zu verstehen. Da Confinement eine zentrale Rolle in dieser Arbeit spielt, wird dieses Phänomen im nächsten Abschnitt noch einmal ausführlich betrachtet.

Die Lagrange-Funktion der QCD ist

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \mathfrak{F}^{a\mu\nu} \mathfrak{F}_{\mu\nu}^a - \sum_n \bar{\psi}_n \gamma^\mu \left(\partial_\mu - ig_0 \mathfrak{A}_\mu^a T_a + m_n \right) \psi_n = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_M$$

mit einem reinen Gluonenanteil

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4} \mathfrak{F}^{a\mu\nu} \mathfrak{F}_{\mu\nu}^a$$

und einem Materieanteil

$$\mathcal{L}_M = - \sum_n \bar{\psi}_n \gamma^\mu \left(\partial_\mu - ig_0 \mathfrak{A}_\mu^a T_a + m_n \right) \psi_n.$$

$\mathfrak{F}_a^{\mu\nu}$ ist der zugehörige Feldstärketensor (für die Definition siehe Anhang A.1), g_0 die Kopplungskonstante und die T_a sind die Generatoren der SU(3)-Farbgruppe in der fundamentalen Darstellung mit der Normierung $\text{tr}(T_a T_b) = \delta_{ab}/2$, n steht für die Flavourindizes.

3.5 Confinement

Das Konzept des *Confinement* wird von dem experimentellen Befund erzwungen, daß freie Quarks noch nie beobachtet wurden. Dieses Konzept ist mittlerweile anerkannt, allerdings fehlt bis heute eine Erklärung dieses Phänomens und insbesondere des zugrundeliegenden physikalischen Mechanismus. Es gibt viele Vorschläge, ein Überblick über

die prominentesten diskutierten Mechanismen, daß Confinement durch *Zentrumswirbel* oder durch *abelsche Monopole* hervorgerufen wird, findet sich in [32]. Ein Review über Theorien zum Quarkconfinement ist der Artikel von M. Bander [6]. Ein Rückblick auf die Entdeckungen, die zum heutigen Verständnis von Confinement geführt haben, gibt der Vortrag von G. 't Hooft [87].

In dieser Arbeit wird die folgende Definition von Confinement verwendet [32]: *Im Grenzfall unendlicher Quarkmassen geht die Arbeit, die benötigt wird, um ein Quark-Antiquark-Paar, das sich im Abstand L befindet, in freie Quarks aufzuspalten, asymptotisch gegen σL , wobei σ eine Konstante ist.*

Insbesondere bedeutet Confinement, daß das Potential eines statischen Quarks für große Abstände L das asymptotische Verhalten $V(L) \sim \sigma L$ zeigt und die freie Energie eines isolierten Quarks unendlich ist.

Die obige Definition ist allerdings nur in reinen Eichtheorien sinnvoll, die keine dynamischen Objekte enthalten, welche zu einem Aufbrechen des Quark-Antiquark-Paares führen können.

3.6 Quantenchromodynamik auf dem Torus

Um die Frage des Confinements in Eichtheorien zu untersuchen, hat G. 't Hooft vorgeschlagen, QCD auf einem Torus zu betrachten [85, 86]. Eine differentialgeometrische Formulierung mit Hilfe von Faserbündeln wurde von P. van Baal in [88, 89] vorgestellt. Der folgende Abschnitt folgt dem Übersichtsartikel von A. Gonzalez-Arroyo [31].

3.6.1 Notation

Es wird ein d -dimensionaler Torus \mathbb{T}^d der Länge L_μ in μ -Richtung mit $\mu = 0, \dots, d-1$ betrachtet. Die Koordinaten erfüllen die Bedingung

$$0 \leq x_\mu < L_\mu.$$

Außerdem wird das Symbol $\hat{\mu} \equiv (0, \dots, L_\mu, \dots, 0)$ für eine Verschiebung um eine Toruslänge in μ -Richtung eingeführt. Das Eichfeld \mathfrak{A}_μ lebt in der adjungierten Darstellung der $SU(\mathcal{N})$. Unter Eichtransformationen ändert es sich zu (vgl. Abschnitt 3.3.1)

$$\Omega \mathfrak{A}_\mu \equiv [\Omega(x)] \mathfrak{A}_\mu \equiv \Omega^\dagger(x) \mathfrak{A}_\mu \Omega(x) - \frac{i}{g_0} \Omega^\dagger(x) \partial_\mu \Omega(x).$$

3.6.2 Übergangsbedingungen

Auf dem Torus sind Punkte, die um ganzzahlige Toruslängen verschoben sind äquivalent, insbesondere müssen alle eichinvarianten Größen periodisch sein. Das bedeutet, daß auch die Eichfelder, die um eine Toruslänge verschoben sind, *physikalisch* äquivalent sein müssen, d. h. sie müssen bis auf eine Eichtransformation übereinstimmen. Sie

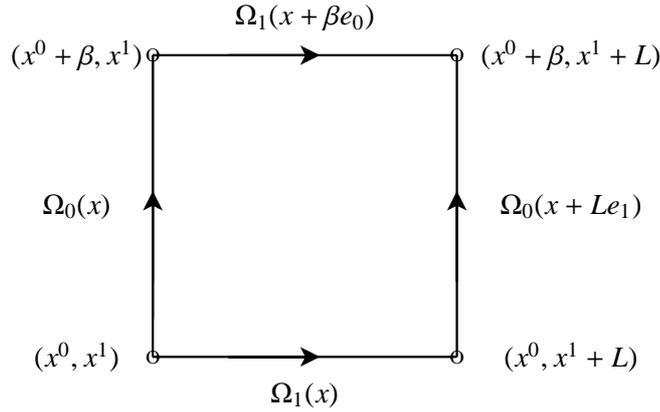


Abbildung 3.1: Illustration zur Konsistenz der Übergangsbedingungen am zweidimensionalen Torus

gehören deshalb der Randbedingung

$$\mathfrak{A}_\mu(x + \hat{v}) = [U_\nu(x)]\mathfrak{A}_\mu(x),$$

wobei $U_\nu(x)$ Elemente der $SU(\mathcal{N})$ sind, die nur von den Koordinaten x_ρ mit $\rho \neq \nu$ abhängen. Die $U_\nu(x)$ heißen *Twistmatrizen*.

Einen physikalisch äquivalenten Punkt kann man auf verschiedenen Wegen erreichen, in Abbildung 3.1 ist dies für einen zweidimensionalen Torus dargestellt. Damit die Übergangsbedingungen konsistent sind, muß man

$$\mathfrak{A}_\mu(x + \hat{v} + \hat{\rho}) = [U_\nu(x + \hat{\rho})U_\rho(x)]\mathfrak{A}_\mu(x) = [U_\rho(x + \hat{v})U_\nu(x)]\mathfrak{A}_\mu(x)$$

verlangen und damit die Bedingung

$$U_\rho(x + \hat{v})U_\nu(x) = z_{\rho\nu}U_\nu(x + \hat{\rho})U_\rho(x)$$

fordern, da die adjungierte Darstellung nur bis auf Zentrumselemente $z_{\rho\nu}$ treu ist. Die $z_{\rho\nu}$ können als

$$z_{\rho\nu} = \exp\left(\frac{2\pi i}{\mathcal{N}}\eta_{\rho\nu}\right) \cdot \mathbb{1}_{SU(\mathcal{N})}$$

mit dem *Twisttensor* $\eta_{\rho\nu} \in \mathbb{Z}_\mathcal{N}$ geschrieben werden. Dieser Tensor ist antisymmetrisch und seine Einträge sind ganze Zahlen. Differentialgeometrisch definiert dies eine *Kozykel-Bedingung* [88, 89].

Randbedingungen mit $z_{\rho\nu} \neq \mathbb{1}_{SU(\mathcal{N})}$ werden im folgenden *getwistet* genannt, Randbedingungen mit $z_{\rho\nu} = \mathbb{1}_{SU(\mathcal{N})}$ heißen *ungetwistet*.

Unter Eichtransformationen verhalten sich die Twistmatrizen wie

$$U_\mu(x) \rightarrow \Omega'_\mu(x) = \Omega(x + \hat{\mu})U_\mu(x)\Omega^\dagger(x),$$

d. h. durch eine Eichtransformation wird der Twisttensor $\eta_{\mu\nu}$ nicht geändert. Das bedeutet, daß Randbedingungen mit verschiedenen Twistmatrizen nicht eichäquivalent sind.

3.6.3 Realisierung von getwisteten Randbedingungen

In dieser Arbeit werden getwistete Randbedingungen dadurch realisiert, daß das Eichfeld abgeändert wird, die periodischen Randbedingungen aber beibehalten werden. Anstatt mit einer Eichfeldkonfiguration und \mathcal{N} eichinäquivalenten Randbedingungen wird mit *einer* Randbedingung und \mathcal{N} eichinäquivalenten Eichkonfigurationen gearbeitet. Die Observablen, die in dieser Arbeit von Interesse sind, insbesondere der Polyakov-Loop, reagieren darauf genauso, als ob die Randbedingungen getwistet wurden. Die Eichfelder werden als *getwistete* Eichfelder bezeichnet, die zugehörigen Operatoren als *getwistete* Operatoren.

Im nächsten Abschnitt werden Ordnungsparameter für den Phasenübergang zwischen der Confined- und der Deconfined-Phase vorgestellt.

3.7 Eichinvariante Objekte der Gluonentheorie

Betrachtet man den Limes für unendlich schwere Quarks, d. h. den reinen Eichsektor, sind die Eichfelder – die Gluonen – die einzig möglichen dynamischen Variablen. Man spricht in diesem Fall auch von einer *Gluonentheorie*. Ein Überblick über dieses Thema findet sich in den Büchern von Creutz [16], Lenz, Grieshammer und Stoll [54] sowie von Rothe [72].

3.7.1 Wilson-Loops und das Flächengesetz

Der *Wilson-Loop* ist ein Paralleltransporter entlang eines geschlossenen Weges \mathcal{C} . Die Eichinvarianz wird durch Bildung der Spur gewährleistet. Der Wilson-Loop ist damit als

$$\mathcal{W}(\mathcal{C}) \equiv \text{tr} \left[\mathcal{P} \exp \left(ig_0 \oint_{\mathcal{C}} dx_\mu \mathcal{A}_\mu \right) \right]$$

definiert, wobei \mathcal{A}_μ das Eichfeld bezeichnet und g_0 die Kopplungskonstante. In dieser Arbeit bezeichnet der Begriff *Wilson-Loop* nur Loops mit Windungszahl⁴ null, d. h. kontrahierbare Loops.

Das Flächengesetz und die Stringspannung

Wilson schlug 1974 das *Flächengesetz* als Kriterium für Confinement vor [96]. Die Argumentation wird im folgenden kurz skizziert, für einen ausführlicheren Überblick siehe z. B. [16, 72].

⁴Windungszahl bedeutet in diesem Zusammenhang die Anzahl Windungen um die zylinderförmige Raumzeit

Für einen rechteckigen Loop der Größe $R \times T$ mit R der Ausdehnung in räumlicher Richtung und T der Ausdehnung in *euklidischer* Zeitrichtung ergibt sich

$$\mathcal{W}(R, T) \stackrel{T \rightarrow \infty}{\sim} \exp(-\mathcal{E}(R)T),$$

wobei $\mathcal{E}(R)$ die Energie eines statischen Quark-Antiquark-Paares im Abstand R ist. In der Confined-Phase wächst diese Energie linear mit dem Abstand, d. h. $\mathcal{E}(R) \stackrel{R \rightarrow \infty}{\rightarrow} \sigma R$. Damit ergibt sich für die rechteckigen Wilson-Loops

$$\mathcal{W}(\mathcal{C}) \sim \exp(-\sigma RT) \equiv \exp(-\sigma \mathcal{A}(\mathcal{C})).$$

Der Proportionalitätsfaktor σ ist die *Stringspannung*. Das Flächengesetz gilt unter bestimmten Bedingungen auch für beliebig geformte Loops, $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ ist in diesem Fall die minimale Oberfläche, die von \mathcal{C} eingeschlossen wird.

Ohne Confinement wird die Energie eines Quarkpaares bei Separation nicht unendlich und der Erwartungswert des Wilson-Loops fällt exponentiell mit dem Umfang des Loops ab, d. h.

$$\mathcal{W}(\mathcal{C}) \sim \exp(-k p(\mathcal{C})),$$

wobei $p(\mathcal{C})$ der Umfang des Weges \mathcal{C} und k die Selbstenergie in den Eichfeldern um eine isolierte Quark-Quelle ist. Auch mit Confinement gibt es ein Verhalten, das dem Umfangsgesetz gehorcht, aber das Flächengesetz überwiegt. Dementsprechend ist die Stringspannung σ ein Ordnungsparameter für Confinement, denn es gilt

$$\begin{aligned} \sigma = 0 & \quad \text{Deconfinement} \\ \sigma \neq 0 & \quad \text{Confinement.} \end{aligned}$$

Das Flächengesetz als Kriterium für Confinement versagt, sobald dynamische Quarks eingeführt werden, da dann Abschirmeffekte auftreten.

3.7.2 Polyakov-Loops

Die zweite eichinvariante Größe der Gluonentheorie ist der *Polyakov-Loop*, dieser windet sich in Zeitrichtung um die zylinderförmige Raumzeit. Seine Eichinvarianz wird durch Spurbildung und periodische Randbedingungen gesichert.

Die Definition der *Polyakov-Loop-Variable* ist

$$\mathfrak{P}(\mathbf{x}) \equiv \mathcal{P} \exp \left(ig_0 \int_0^\beta \mathfrak{A}_d(\mathbf{x}, t) dt \right),$$

wobei \mathfrak{A}_d das Eichfeld in zeitlicher Richtung ist. Die *gespurte Polyakov-Loop-Variable*, bzw. im folgenden kurz *Polyakov-Loop* genannt, ist als

$$\mathfrak{L}(\mathbf{x}) \equiv \text{tr} \left[\mathcal{P} \exp \left(ig_0 \int_0^\beta dt \mathfrak{A}_d(\mathbf{x}, t) \right) \right]$$

definiert. Diese Definition unterscheidet sich von der Definition in [57] durch einen Faktor, der von der verwendeten Eichgruppe abhängt.

Der Erwartungswert des Polyakov-Loops liefert die Verteilungsfunktion des Gluonenfeldes in Anwesenheit eines einzelnen, statischen Quarks bei der inversen Temperatur β . Die freie Energie von N_q Quarks und $N_{\bar{q}}$ Antiquarks läßt sich als

$$e^{-\beta F_{N_q N_{\bar{q}}}} = \text{tr} \left[e^{-\beta H} \mathfrak{L}(\mathbf{x}_1) \dots \mathfrak{L}(\mathbf{x}_{N_q}) \mathfrak{L}^\dagger(\mathbf{y}_1) \dots \mathfrak{L}^\dagger(\mathbf{y}_{N_{\bar{q}}}) \right]$$

schreiben. Die Spur wird über alle Zustände der reinen Gluonentheorie gebildet. Teilt man diesen Ausdruck durch den Ausdruck für das Vakuum, bekommt man Differenzen der freien Energie $\Delta F_{N_q N_{\bar{q}}} = F_{N_q N_{\bar{q}}} - F_{00}$. Für ein einzelnes Quark ergibt sich damit

$$\langle \mathfrak{L}(0) \rangle = e^{-\beta F_q} = e^{-\beta \Delta F_{10}}.$$

Die Korrelationsfunktion zweier Polyakov-Loops mit unterschiedlicher Orientierung an unterschiedlichen Raumpunkten hängt mit der freien Energie des Quark-Antiquark-Paares über

$$\langle \mathfrak{L}(\mathbf{x}) \mathfrak{L}^\dagger(\mathbf{y}) \rangle = e^{-\hat{\beta} \hat{F}_{q\bar{q}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}$$

zusammen. Eine explizite Ableitung findet sich in [57]. Die Clustereigenschaft⁵ verlangt, daß

$$\langle \mathfrak{L}(\mathbf{x}) \mathfrak{L}^\dagger(\mathbf{y}) \rangle \rightarrow |\langle \mathfrak{L} \rangle|^2 \quad \text{für} \quad |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \rightarrow \infty$$

gilt. Für $\langle \mathfrak{L} \rangle = 0$ nimmt die freie Energie des Quark-Antiquark-Paares mit wachsendem Abstand zu, es liegt Confinement vor. Für $\langle \mathfrak{L} \rangle \neq 0$ strebt die freie Energie gegen einen konstanten Wert, in der reinen Gluonentheorie liegt Deconfinement vor. Der Polyakov-Loop ist also ein Ordnungsparameter für die reine Gluonentheorie.

Im Gegensatz zum Wilson-Loop transformiert der Polyakov-Loop nichttrivial unter Eichtransformationen, die mit einem Zentrumselement getwistet sind, es gilt ${}^z \mathcal{P} = z \cdot \mathcal{P}$.

Die Bedeutung der Zentrumssymmetrie in der Gluonentheorie

Die Zentrumssymmetrie ist eine Symmetrie der Transfermatrix, die die räumliche Evolution des Systems im thermodynamischen Gleichgewicht beschreibt. Sie ist eine Symmetrie der euklidischen Wirkung und nicht des Hamiltonoperators. Die Zentrumstransformationen beeinflussen die gesamte Zeitevolution, wohingegen der Hamiltonoperator nur an einem bestimmten Zeitpunkt wirkt [45].

In der reinen Gluonentheorie geht der Phasenübergang zwischen Confinement und Deconfinement mit der Brechung der Zentrumssymmetrie der $SU(3)$ einher. Es wird vermutet, daß der Phasenübergang für die $SU(3)$ erster Ordnung ist (vgl. [10] und [52]), d. h. daß die verschiedenen Phasen koexistieren können. Für eine ausführlichere Diskussion siehe z. B. [45, 83, 103]. Gluonen transformieren in der adjungierten Darstellung der $SU(3)$ und sind zentrumsneutral.

⁵Die Clustereigenschaft besagt, daß wenn die ersten n und die letzten m Felder einer $(n + m)$ -Punktsfunktion für große Abstände Cluster bilden, die $(n + m)$ -Punktsfunktion in das Produkt der n - und m -Punktsfunktion übergeht [26].

3.8 Chirale Symmetrie und die Banks-Casher-Relation

Ein weiterer interessanter Grenzfall ist der chirale Limes, d. h. der Grenzfall verschwindender Quarkmasse. Die Ausführungen in diesem Abschnitt folgen [24, 47, 55, 72, 100].

Im chiralen Limes ist die chirale Transformation

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha\gamma_*}\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}e^{i\alpha\gamma_*}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

eine Symmetrietransformation der QCD-Wirkung, welche oft auch γ_* -Symmetrie genannt wird, sie folgt aus $\{\gamma_*, \mathcal{D}\} = 0$. Mit Hilfe der γ_* -Matrix ist es möglich, eine Händigkeit zu definieren, denn jeder Zustand ψ läßt sich in einen links- und einen rechtshändigen Anteil ψ_L und ψ_R aufspalten mit

$$\begin{aligned} \psi_R &= P_+\psi, & \psi_L &= P_-\psi, & \bar{\psi}_R &= \bar{\psi}P_-, & \bar{\psi}_L &= \bar{\psi}P_+ \\ P_{\pm} &= \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_*), & P_{\pm}^2 &= P_{\pm}. \end{aligned}$$

Bei chiral invarianten Theorien mischen die rechts- und linkshändigen Anteile der Wellenfunktion ψ nicht.

Die spontane Brechung der chiralen Symmetrie geht einher mit einer qualitativen Umordnung des Vakuums, der Grundzustand wird von skalaren Quark-Antiquarkpaaren bevölkert [94]. Der zugehörige Erwartungswert des Grundzustandes ist das chirale Kondensat $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$, das als

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle \equiv \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial m_q} \ln \mathcal{Z}$$

definiert ist, wobei \mathcal{Z} die Zustandssumme und m_q die Quarkmasse ist. Das chirale Kondensat ist unter der chiralen Transformation nicht invariant und ist ein Ordnungsparameter für die chirale Symmetriebrechung, es gilt

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle &= 0 && \text{symmetrische Phase} \\ \langle \bar{\psi}\psi \rangle &> 0 && \text{gebrochene Phase.} \end{aligned}$$

Die Banks-Casher-Relation [7]

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -\pi \langle \rho(0) \rangle$$

verknüpft das chirale Kondensat mit der Eigenwertdichte des Dirac-Operators bei null, also dem infraroten Anteil des Spektrums. Das bedeutet, daß chirale Symmetriebrechung eine Signatur im Spektrum hinterläßt. Insbesondere impliziert die Banks-Casher-Relation, daß sich in der symmetrischen Phase eine *spektrale Lücke* im Spektrum öffnet, d. h. daß $\langle \rho(\lambda) \rangle = 0$ in einem endlichen Gebiet um den Ursprung gilt.

Eine Herleitung und ausführliche Diskussion der Banks-Casher-Relation ist in [55] zu finden. In Abschnitt 4.4 wird die Banks-Casher-Relation auf dem Gitter abgeleitet.

4 Quantenchromodynamik auf dem Gitter

Man darf nicht erwarten, daß dies irgendeine vernünftige Definition von Realität zuläßt.

A. Einstein, B. Podolski, N. Rosen

Sofern nicht anders angegeben, folgt dieses Kapitel den Lehrbüchern von M. Creutz [16] und H. Rothe [72].

Die Gitterformulierung von Eichtheorien wurde 1970 von Wilson vorgestellt [96], um einen Abschneideimpuls für große Impulse zu erhalten, da durch ein Gitter eine minimale Wellenlänge und damit ein maximaler Impuls eingeführt wird. Dadurch kann das im Minkowski-Raum divergente Pfadintegral regularisiert werden. Parallel zur Regularisierungstechnik entwickelte sich aber die Computertechnologie, und die Gitterformulierung erwies sich für numerische Simulationen als sehr geeignet. Diese Formulierung ist eine Möglichkeit, nichtstörungstheoretische Aussagen über die QCD bei starken Kopplungen zu erhalten.

Die Idee, Eichtheorien auf dem Gitter zu formulieren, ist motiviert durch die Definition des Paralleltransporters als pfadabhängiger Phasenfaktor (vgl. Gl. (3.2)). Die grundlegenden Freiheitsgrade der Gitterformulierung sind Gruppenelemente, die auf den Verbindungslinien zwischen nächsten Nachbarn – den *Links* – sitzen. Sie werden *Linkvariablen* genannt. Ein Pfad auf dem Gitter wird mit dem Produkt dieser Linkvariablen entlang des Pfades identifiziert, wodurch die Pfadordnung der Kontinuumstheorie berücksichtigt wird.

In diesem Kapitel wird zuerst die Gitterformulierung der QCD eingeführt, danach werden Confinement und chirale Symmetriebrechung mit ihren jeweiligen Ordnungsparametern auf dem Gitter vorgestellt.

4.1 Konventionen der Gitterformulierung

Die Raumzeit wird als d -dimensionaler Torus mit der Ausdehnung $a \cdot N_\mu$ in μ -Richtung betrachtet und durch ein Gitter mit der Gitterlänge a diskretisiert. Wie in Abschnitt 3.6.2 dargestellt, gibt es auch hier für die Eichfelder \mathcal{N} eichinäquivalente Randbedingungen, die in dieser Arbeit ebenfalls durch Abändern (*Twisten*) der Eichfelder unter Beibehaltung der periodischen Randbedingungen realisiert werden.

Im folgenden wird auf euklidischen Gittern gearbeitet, d. h. die Metrik ist

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, \dots, 1) = \delta_{\mu\nu}$$

und die Zeit damit imaginär.

Das Gitter besteht aus Gitterpunkten $x = (\mathbf{x}, x_d) = (x_1, \dots, x_{d-1}, x_d)$, dabei bezeichnet x_d die Zeitrichtung und \mathbf{x} die räumlichen Richtungen. Ein Einheitsvektor in μ -Richtung hat die Länge des Gitterabstandes und wird mit e_μ bezeichnet, μ läuft von 1 bis d . Die numerischen Simulationen in dieser Arbeit werden für $d = 4$ durchgeführt. Die Anzahl der Gitterpunkte in räumlicher Richtung wird mit N_s bezeichnet, die in Zeitrichtung mit N_t .

Die verwendeten Konventionen für die Formulierung auf dem Gitter folgen [72]. Es werden euklidische hermitesche γ -Matrizen in d Dimensionen benötigt (vgl. Abschnitt 2.5).

4.1.1 Reskalierungen

Um dimensionslose Variablen zu erhalten, die für Simulationen auf dem Gitter benötigt werden, müssen die Kontinuumsgrößen mit der Gittergröße reskaliert werden:

$$m \rightarrow \frac{1}{a} \hat{m}, \quad \psi_\alpha \rightarrow \frac{1}{a^{3/2}} \hat{\psi}_\alpha, \quad \bar{\psi}_\alpha \rightarrow \frac{1}{a^{3/2}} \hat{\bar{\psi}}_\alpha, \quad \partial_\mu \psi_\alpha \rightarrow \frac{1}{a^{5/2}} \hat{\partial}_\mu \hat{\psi}_\alpha$$

Da sich im folgenden aus dem Zusammenhang ergibt, ob es sich um Größen auf dem Gitter oder im Kontinuum handelt, wird der Hut nur noch dort, wo Verwechslungsgefahr besteht, explizit ausgeschrieben.

4.1.2 Gittervariablen

Die nächsten Abschnitte folgen, soweit nicht anders angegeben [72, 100], die Konventionen halten sich an [72]. Aufgrund ihrer Definition über infinitesimale Abstände sind die liealgebrawertigen Felder \mathfrak{A}_μ auf dem Gitter nicht mehr sinnvoll zu definieren, an ihre Stelle als dynamische Variablen treten die gruppenwertigen Linkvariablen \mathfrak{U}_μ .

Linkvariablen



Abbildung 4.1: zur Bedeutung der Linkvariable und der inversen Linkvariable

Die Linkvariable

$$\mathfrak{U}_\mu(x) \equiv \mathfrak{U}_{x, x+e_\mu} = e^{iag_0 \mathfrak{A}_\mu(x)}$$

kann als Paralleltransporter von x nach $x + e_\mu$ entlang des Links $(x, x + e_\mu)$ interpretiert werden. In Abbildung 4.1 ist die Linkvariable und die inverse Linkvariable $\mathfrak{U}_\mu^\dagger(x + e_\mu)$ dargestellt.

Ein Produkt von Linkvariablen, das die Punkte y und x verbindet, transformiert unter Eichtransformation wie ein Quark-Antiquark Paar $\psi(y)\bar{\psi}(x)$. Eine Kette von Linkvariablen mißt die Antwort des Gluonenfeldes auf eine externe Quark-Antiquark-Quelle.

Eichinvariante Objekte kann man nur aus geschlossenen Loops von Linkvariablen konstruieren, außerdem müssen *periodische* Randbedingungen für die Linkvariablen gewählt werden, d. h. die Linkvariablen erfüllen die Bedingung

$$\mathfrak{U}_\mu(x_1, \dots, N_\mu, \dots, x_d) = \mathfrak{U}_\mu(x_1, \dots, 1, \dots, x_d).$$

Paralleltransporter

Für den Paralleltransporter geht der Exponentialausdruck der Kontinuumstheorie in das geordnete Produkt aller Linkvariablen entlang eines Weges, der die Punkte x und y verbindet, über.

Kinks, Spikes und dicke Links

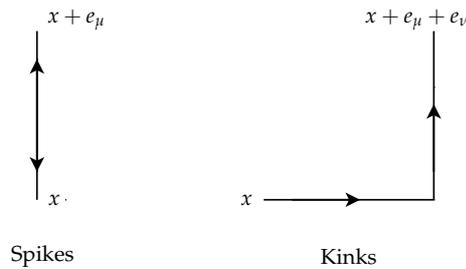


Abbildung 4.2: Kinks und Spikes

Bestimmte Produkte von Linkvariablen spielen eine wichtige Rolle in der Gitter-QCD und tragen eigene Namen. In dieser Arbeit treten *Kinks* und *Spikes* auf (s. Abb. 4.2). Ein Spike ist das Produkt der Linkvariablen $\mathfrak{U}_\mu \mathfrak{U}_\mu^\dagger$, d. h. man geht einen Schritt vor und sofort wieder einen zurück. Wege mit Spikes sind *reduzierbar*, da \mathfrak{U}_μ unitär ist. Ein Kink besteht aus dem Produkt $\mathfrak{U}_\mu \mathfrak{U}_\nu$ mit $\mu \neq \nu$ und ist nicht *reduzierbar*.

Die Zusammensetzung einer Linkvariable mit einem Kink, d. h. das Produkt der Linkvariablen $\mathfrak{U}_\mu(x) \mathfrak{U}_\nu(x + e_\mu) \mathfrak{U}_\mu^\dagger(x + e_\mu + e_\nu) \mathfrak{U}_\nu^\dagger(x + e_\nu)$ mit $\mu \neq \nu$ wird als *dicker Link* (nach engl. *fat link*) bezeichnet.

Plaquetvariablen

Plaquetvariablen sind über

$$\mathfrak{U}_{\mu\nu}(x) \equiv \mathfrak{U}_\mu(x) \mathfrak{U}_\nu(x + e_\mu) \mathfrak{U}_\mu^\dagger(x + e_\mu + e_\nu) \mathfrak{U}_\nu^\dagger(x + e_\nu) \equiv \mathfrak{U}_p$$

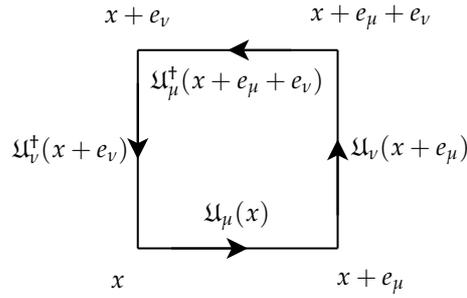


Abbildung 4.3: Plaquetvariable

definiert (s. Abb. 4.3). Die Spur einer solchen Plaquetvariable ist die einfachste, mit Linkvariablen konstruierbare eichinvariante Größe und stellt das pfadgeordnete Produkt entlang einer elementaren Plaquette dar. Mit ihrer Hilfe definiert man den matrixwertigen Gitterfeldtensor $\mathfrak{F}_{\mu\nu}$ über

$$\mathfrak{U}_{\mu\nu} = e^{ig_0 a^2 \mathfrak{F}_{\mu\nu}}.$$

Der Zusammenhang zwischen $\mathfrak{F}_{\mu\nu}$ und \mathfrak{A}_μ ergibt sich mit der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel. Ein Beweis dieser Formel findet sich z. B. in [40]. Entwickelt man \mathfrak{U}_p für kleine Gitterabstände, geht $\mathfrak{F}_{\mu\nu}$ im Grenzfall $a \rightarrow 0$ in den Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$ der Kontinuums-
theorie über.

4.1.3 Symmetrien auf dem Gitter

Eine ausführliche Beschreibung der Symmetrien, die auf dem Gitter erhalten bleiben, findet sich in [37]. Die Rotationssymmetrie der Kontinuums-
theorie wird beim Übergang zum Gitter notwendigerweise gebrochen und durch eine diskrete, hyperkubische Symmetrie ersetzt. Erhalten bleiben die Invarianz unter Poincaré-Transformationen und unter Parität (Raumspiegelung), Ladungskonjugation (Austauschen von Teilchen und Antiteilchen) und Zeitumkehr. Außerdem möchte man die lokale Eichinvarianz erhalten, da ohne Eichinvarianz bei allen Gitterabständen a zusätzliche, im Kontinuum irrelevante Operatoren auftreten, die weitere Diskretisierungsfehler bewirken. Chirale Symmetrie ist auf dem Gitter schwierig zu implementieren, wie sich im folgenden zeigen wird.

4.1.4 Pfadintegrale für Eichtheorien

Definiert man formal ein Pfadintegral für Eichtheorien, tritt eine Integration über alle Eichfelder auf. Für kompakte Eichgruppen lässt sich ein Pfadintegral über Gruppenelemente als

$$\mathcal{Z} \equiv \int \mathcal{D}\mathfrak{U} e^{S[\mathfrak{U}]} \quad \text{mit} \quad \mathcal{D}\mathfrak{U} = \prod_{x,\mu} d\mathfrak{U}_\mu(x)$$

definieren, $d\mathfrak{U}$ ist ein Volumenelement im Gruppenraum. Für kompakte Gruppen ist das Gesamtvolumen des Gruppenraums endlich und \mathcal{Z} im euklidischen Raum, und damit

insbesondere auf dem Gitter, wohldefiniert. Damit \mathcal{L} eichinvariant ist, muß auch das Integrationsmaß eichinvariant sein, d. h. es muß

$$\mathcal{D}\mathcal{U} = \mathcal{D}^\Omega \mathcal{U} \quad \text{mit} \quad \Omega \mathcal{U}_\mu(x) = \Omega(x) \mathcal{U}_\mu(x) \Omega^\dagger(x + e_\mu)$$

erfüllt sein. Eine Eichtransformation ist eine Kombination von Links- und Rechtstranslation, für ein eichinvariantes Integrationsmaß verwendet man das rechts- und linksinvariante eindeutige *Haar-Maß* (vgl. Abschnitt 2.2.3). Explizite Konstruktionen des Haar-Maßes finden sich z. B. in [24, 72, 79].

4.2 Formulierung der Gitterwirkung

Mit den so definierten Größen ist es möglich, die QCD-Wirkung auf dem Gitter zu formulieren.

4.2.1 Die Wirkung der Gluonentheorie

Der reine Gluonenanteil der QCD-Wirkung muß eichinvariant sein und wird deshalb mit Plaquetvariablen konstruiert. Die Wirkung einer $SU(\mathcal{N})$ -Eichtheorie auf dem Gitter ist

$$S_G = \beta \sum_p \left[1 - \frac{1}{2\mathcal{N}} \text{tr} \left(\mathcal{U}_p(x) + \mathcal{U}_p^\dagger(x) \right) \right] \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{2\mathcal{N}}{a^4 g_0^2},$$

d. h. es wird über alle Plaquetvariablen summiert [72]. Für eine nichtabelsche Eichtheorie gibt es Selbstwechselwirkungen der Gluonen, so daß auch der reine Eichsektor interessante Effekte zeigt.

4.2.2 Fermionen auf dem Gitter

Um Fermionen auf dem Gitter formulieren zu können, benötigt man eine Diskretisierung von Differentialoperatoren erster Ordnung. Dies ist problematisch, da die Greenfunktionen solcher Operatoren auch für sehr große Gitter von der Diskretisierung abhängen. Dieses Problem wird im nächsten Abschnitt, der [72, 100] folgt, besprochen.

Gitterableitungen

Der Ableitungsoperator ist auf dem Gitter nicht eindeutig formulierbar, es gibt mehrere verschiedene Gitterableitungen, die im Grenzfall verschwindender Gitterlänge zur gleichen Kontinuumsableitung führen. Die einfachsten sind die *Rechts-* und *Linksableitung*

$$\partial_\mu^\pm \psi = \psi(x \pm e_\mu) - \psi(x).$$

Die am häufigsten verwendete Ableitung ist die *antisymmetrische Ableitung*

$$\partial_\mu^A \psi(x) = \frac{1}{2} [\psi(x + e_\mu) - \psi(x - e_\mu)],$$

die Rechts- und Linksableitung kombiniert.

Fermionenwirkung

Fermionen auf dem Gitter zu formulieren ist wegen der ersten Ableitung im Dirac-Operator problematisch. Es ist unmöglich, chirale Fermionen ohne *Fermionendoppler* mit einem lokalen Operator auf dem Gitter zu formulieren, dies ist das *No-Go-Theorem* von Nielsen und Ninomiya [65]. Fermionenverdopplung bedeutet, daß man im Kontinuums-*limes* doppelt so viele Fermionen erhält wie in der ursprünglichen Theorie. Zum Beispiel führt die naive Diskretisierung des Dirac-Operators durch Vorwärts- oder Rückwärtsableitung zu solchen Verdopplern.

Es gibt verschiedene Ansätze, dieses Theorem zu umgehen. In der vorliegenden Arbeit werden nur zwei mögliche Arten verwendet, Fermionen auf dem Gitter zu formulieren, *Wilson-Fermionen* und *Staggered-Fermionen*. Weitere Möglichkeiten sind z. B. *Overlap-Fermionen* [20, 48] und *chiral verbesserte Fermionen* [56].

Die allgemeine Form der Fermionenwirkung ist

$$S_F = \sum_{x,y} \bar{\psi}(x) \mathfrak{D}(x,y) \psi(y)$$

mit einem geeignet diskretisierten Dirac-Operator \mathfrak{D} . Summiert wird über alle Punkte des Gitters.

Wilson-Fermionen

Um die Fermionenverdopplung zu vermeiden, führte Wilson eine nach ihm benannte impulsabhängige Masse ein. Der zusätzliche Term bricht die chirale Symmetrie explizit, erst im Kontinuums-*limes* wird sie wieder hergestellt. Der *Dirac-Wilson-Operator* $\mathfrak{D}^{(W)}$ hat in d Dimensionen die Form

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}^{(W)}(x,y) &= \left(m + \frac{rd}{a} \right) \delta_{x,y} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^d \left[\left(\frac{r}{a} - \gamma_{\mu} \right) \mathfrak{U}_{\mu}(x) \delta_{x+e_{\mu},y} + \left(\frac{r}{a} + \gamma_{\mu} \right) \mathfrak{U}_{\mu}^{\dagger}(x+e_{\mu}) \delta_{x-e_{\mu},y} \right]. \end{aligned}$$

Dabei wird der Wilson-Parameter r im Intervall $(0, 1]$ gewählt. In dieser Arbeit wird nur $r = 1$ betrachtet. Das Spektrum von $\mathfrak{D}^{(W)}$ liegt in der komplexen Ebene innerhalb einer Ellipse mit Mittelpunkt $(rd/a, 0)$, die Länge der großen Halbachse ist rd/a und die der kleinen Halbachse $\sqrt{rd/a}$. Die Eigenschaften des Dirac-Wilson-Operators werden ausführlich in Abschnitt 5.1 behandelt.

Staggered-Fermionen

Einen guten Überblick über *Staggered-Fermionen* bieten die Arbeiten von R. Gupta [37] und F. Lenz et. al. [54], denen auch dieser Abschnitt folgt. Vorgeschlagen wurde diese Fermionenformulierung 1974 von Susskind [53]. Sie umgeht des No-Go-Theorem nicht, sondern reduziert lediglich die Anzahl der Freiheitsgrade der Fermionen, wodurch sich

die Anzahl der unphysikalischen Fermionendoppler verringert. Die γ -Matrizen werden durch die Phasen $\eta_{x,\mu} = (-)^{\sum_{\nu < \mu} x_\nu}$ ersetzt. Der Operator für die Staggered-Fermionen lautet

$$\mathfrak{D}^{(S)}(x, y) = m\delta_{x,y} + \frac{1}{2a} \sum_{\mu} \eta_{x,\mu} \left[\mathfrak{U}_{\mu}(x)\delta_{x,y-\mu} - \mathfrak{U}_{\mu}^{\dagger}(x + e_{\mu})\delta_{x,y+\mu} \right].$$

Da die Spinkomponenten entkoppeln, bleiben nur die Farbfreiheitsgrade übrig, wodurch die 2^d -fache Entartung der naiven Fermionen um einen Faktor 4 verringert wird. Der Staggered-Operator hat – wie der Kontinuums-Operator – ein rein imaginäres Spektrum und bricht nur einen Teil der chiralen Symmetrie. Der Nachteil der Staggered-Fermionen besteht darin, daß sie in vier Dimensionen vier Flavours haben und es mit ihnen deshalb nicht möglich ist, zwei oder drei Flavours – die physikalisch relevanten Fälle – zu behandeln. Außerdem wird die Gitterauflösung im Vergleich zu Wilson-Fermionen halbiert.

Allerdings wurden Staggered-Fermionen lange Zeit für numerische Simulationen benutzt, da sie numerisch verhältnismäßig „billig“ sind. Inzwischen gibt es aber andere Ansätze, die chirale Symmetrie auf dem Gitter zu verallgemeinern, so daß die Staggered-Fermionen an Bedeutung verloren haben.

Randbedingungen

Für Fermionen verwendet man periodische Randbedingungen in den räumlichen Richtung. In der Zeitrichtung wählt man antiperiodische Randbedingungen, da in der Formulierung der Spur als Grassmannintegral ein negatives Vorzeichen auftritt [59].

4.3 Eichinvariante Objekte der Gluonentheorie in der Gitterformulierung

Wie im Kontinuum gibt es auch auf dem Gitter eichinvariante Objekte, die eine wichtige Rolle spielen. Dieser Abschnitt überträgt die Konzepte der Kontinuumstheorie auf die diskretisierte Theorie.

4.3.1 Wilson-Loop

In der Gitterformulierung von Wilson ist der Wilson-Loop

$$\mathcal{W}(\mathcal{C}) \equiv \text{tr} \prod_{x \in \mathcal{C}} \mathfrak{U}_{\mu}(x)$$

als die Spur über das Produkt der Linkvariablen entlang des geschlossenen Weges \mathcal{C} definiert. Die Spurbildung sichert die Eichinvarianz, da die Linkvariablen unter dieser zyklisch getauscht werden können. Der Wilson-Loop ist ein Ordnungsparameter der reinen Gluonentheorie, da er mit dem Flächengesetz ein Kriterium für Confinement liefert (s. Abschnitt 3.7.1).

Der Wilson-Loop ändert sich nicht, wenn die Randbedingungen getwistet werden, da er invariant unter Zentrumstransformationen ist.

4.3.2 Polyakov-Loop

Auf dem Gitter läßt sich die Polyakov-Loop-Variable als

$$\mathfrak{P}(\mathbf{x}, t) \equiv \prod_{s=t}^{N_t+t} \mathcal{U}_d(\mathbf{x}, s)$$

definieren, der Polyakov-Loop – als Spur der Polyakov-Loop-Variable – ist als

$$\mathfrak{L}(\mathbf{x}) \equiv \text{tr} \prod_{s=1}^{N_t} \mathcal{U}_d(\mathbf{x}, s) = \frac{1}{N_t} \sum_{t=1}^{N_t} \text{tr} \mathfrak{P}(\mathbf{x}, t)$$

definiert. $\mathfrak{L}(\mathbf{x})$ ist unabhängig von der zeitlichen Koordinate, da die Spur unter zyklischer Vertauschung invariant ist. Die zeitliche Mittelwertbildung in der obigen Definition ist im Hinblick auf Kapitel 5 hinzugenommen.

Der räumlich gemittelte Polyakov-Loop ist als

$$\mathcal{P} \equiv \frac{1}{N_s^{d-1}} \sum_{\mathbf{x}} \mathfrak{L}(\mathbf{x}) = \frac{1}{N_s^{d-1}} \sum_{\mathbf{x}} \text{tr} \prod_{s=1}^{N_t} \mathcal{U}_d(\mathbf{x}, s) = \frac{1}{N_t N_s^{d-1}} \sum_{\mathbf{x}} \sum_{t=1}^{N_t} \text{tr} \mathfrak{P}(\mathbf{x}, t) \quad (4.1)$$

definiert. Die räumliche Mittelwertbildung erfolgt, um bei Monte-Carlo-Simulationen eine bessere Statistik zu bekommen.

Der Polyakov-Loop ändert sich, wenn die Randbedingungen getwistet werden, weil er unter Zentrumstransformationen nicht invariant ist.

Der rotierte Polyakov-Loop als Ordnungsparameter

In dieser Arbeit wird anstatt des Betrags des Polyakov-Loops ein rotierter Polyakov-Loop [101, 102] als Ordnungsparameter verwendet. Der Wertebereich des Polyakov-Loops wird entsprechend der Abbildung 4.4 in sechs Bereiche unterteilt, Bereiche gleicher Farbe gehen unter der \mathbb{Z}_3 -Symmetrie ineinander über und sind damit äquivalent. In den hellen Bereichen ist der Polyakov-Loop in Richtung der Zentrumselemente ausgerichtet, in den dunklen Bereichen in Richtung der Antizentrumselemente. Um die Zentrumssymmetrie zu eliminieren, werden die Bereiche in Abbildung 4.4 entsprechend der Pfeile identifiziert. Daraus erhält man den fundamentalen Bereich \mathcal{F} des Polyakov-Loops entlang der reellen Achse.

Jedes $\mathfrak{L}(\mathbf{x})$ wird zuerst durch eine Zentrumstransformation in den fundamentalen Bereich \mathcal{F} und anschließend auf die reelle Achse gedreht. Dies liefert die Variable $\mathfrak{L}^{\text{rot}}(\mathbf{x})$, deren Vorzeichen geeignet ist, zwischen der zentrumssymmetrischen Phase mit $\mathfrak{L}^{\text{rot}}(\mathbf{x}) > 0$ und der antizentrumssymmetrischen Phase mit $\mathfrak{L}^{\text{rot}}(\mathbf{x}) < 0$ zu unterscheiden. Der räumlich gemittelte Loop wird mit \mathcal{P}^{rot} bezeichnet.

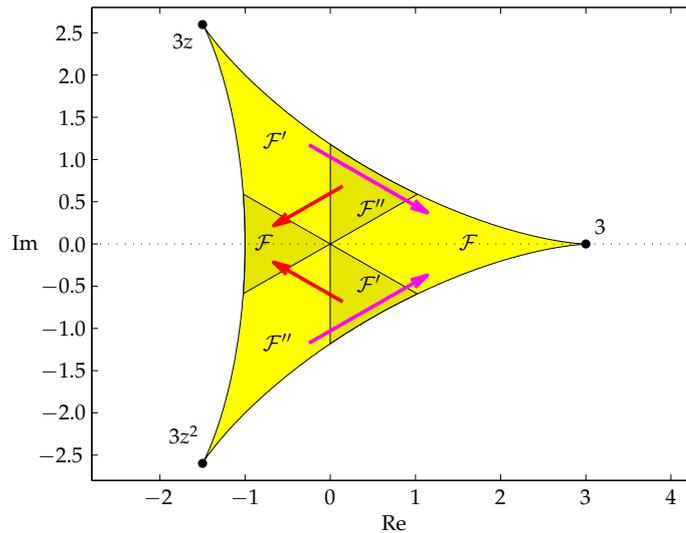


Abbildung 4.4: Fundamentaler Bereich \mathcal{F} des Ordnungsparameters \mathfrak{L} , die \mathbb{Z}_3 -Kopien werden entsprechend der Pfeile identifiziert (Abbildung aus [102])

4.3.3 Dicke Loops

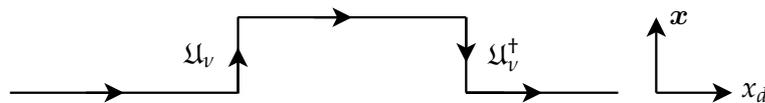


Abbildung 4.5: dicker Loop

Neben den Polyakov-Loops, die nur zeitliche Linkvariablen enthalten, werden in dieser Arbeit auch *dicke Loops* benötigt. Auch diese Loops winden sich wie die Polyakov-Loops einmal um die Zeitrichtung, enthalten aber zusätzlich auch räumliche Kinks (vgl. Abschnitt 4.1.2). In **Abbildung 4.5** ist ein typischer dicker Loop dargestellt. Man erhält dicke Loops aus einem Polyakov-Loop, indem man Linkvariablen durch dicke Links ersetzt.

4.4 Ableitung der Banks-Casher-Relation

Dieser Abschnitt folgt dem Artikel von H. Leutwyler und A. Smilga [55]. Für festes Eichfeld $\mathfrak{A}_\mu^a(x)$ hat die fermionische Green-Funktion die Form

$$S_G(x, y) = \langle \psi(x) \bar{\psi}(y) \rangle_{\mathfrak{A}} = \sum_n \frac{u_n(x) u_n^\dagger(y)}{m - i\lambda_n}$$

wobei $u_n(x)$ und λ_n Eigenfunktionen bzw. Eigenwerte eines Gitter-Dirac-Operators sind. Die Eigenfunktionen sind orthonormal, d. h. es gilt

$$\int_V dx u_n(x) u_m^\dagger(x) = \delta_{n,m}.$$

Bildet man die Spur über die räumlichen Koordinaten, berücksichtigt, daß die Eigenfunktionen in Paaren $u_n(x)$ und $\gamma_* u_n^\dagger(x)$ mit komplex konjugierten Eigenwerten auftreten, ergibt sich

$$\frac{1}{V} \int_V dx \langle \bar{\psi}(x) \psi(x) \rangle_{\mathfrak{A}} = -\frac{2m}{V} \sum_{\lambda_n > 0} \frac{1}{m^2 + \lambda_n^2}.$$

Das Quark-Antiquark-Kondensat – der Ordnungsparameter für die chirale Symmetriebrechung – erhält man, wenn man die linke Seite über alle Eichfeldkonfigurationen mittelt und den Limes für unendliches Volumen – den thermodynamischen Limes – nimmt¹:

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \mathcal{D}\mathfrak{A} \langle \bar{\psi}(x) \psi(x) \rangle_{\mathfrak{A}} e^{-S[\mathfrak{A}]}$$

Im thermodynamischen Limes ist das Eigenwertspektrum dicht und die Anzahl Eigenwerte pro gegebenes Intervall ist proportional zum Volumen. Damit ergibt sich

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle = -2m \int_0^\infty d\lambda \frac{\varrho(\lambda)}{m^2 + \lambda^2},$$

wobei $\varrho(\lambda)d\lambda$ die mittlere Anzahl Eigenwerte im Intervall $d\lambda$ bezeichnet.

Das Integral ist quadratisch divergent für $\lambda \rightarrow \infty$. Im chiralen Grenzfall $m \rightarrow 0$ verschwinden alle divergenten Beiträge und nur der infrarote Teil des Spektrums liefert einen Beitrag. Für eine ausführliche Diskussion der Renormierung dieses Integrals siehe [55].

Der Wert des Integrals hängt vom Verhalten von $\varrho(\lambda)$ für $\lambda \rightarrow 0$ ab. Für $\varrho(\lambda) \propto \lambda^\alpha$ ist das Integral proportional zu m^α und verschwindet im chiralen Limes. Ein nichtverschwindender Wert ist also nur möglich, falls $\varrho(\lambda)$ gegen einen endlichen Wert strebt. Ausführen des Integrals führt dann auf die Banks-Casher-Relation

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle = -\pi \varrho(0).$$

¹Der thermodynamische Limes $V \rightarrow \infty$ muß genommen werden, weil in endlichen Volumina keine spontane Symmetriebrechung auftreten kann, der thermodynamische und der chirale Limes sind nicht vertauschbar.

5 Der Polyakov-Loop und das Spektrum des Dirac-Wilson-Operators

*The great tragedy of Science – the slaying
of a beautiful hypothesis by an ugly fact.*

Thomas Henry Huxley

In diesem Kapitel wird, ausgehend von einer Idee Christof Gattringers [27], der Polyakov-Loop als spektrale Funktion des Dirac-Wilson-Operators ausgedrückt. Dazu werden zuerst die benötigten Eigenschaften des Dirac-Wilson-Operators rekapituliert. Außerdem werden die Eigenwerte für eine einfache Eichfeldkonfiguration analytisch bestimmt und untersucht, wie das Spektrum auf eine Änderung der Randbedingungen reagiert. Die Hoffnung ist, daß sich über das Spektrum des Dirac-Operators ein Zusammenhang zwischen chiraler Symmetriebrechung und Confinement herstellen läßt. Über die Idee Gattringers hinausgehend und im Vorgriff auf das nächste Kapitel werden desweiteren allgemeinere spektrale Funktionen untersucht und ihre Beziehung zum Polyakov-Loop herausgearbeitet.

Die wesentlichen Ergebnisse dieses und des nächsten Kapitels sind in [84] veröffentlicht.

5.1 Der Dirac-Wilson-Operator

Es wird ein d -dimensionales Gitter mit periodischen Randbedingungen betrachtet. Der Gitterabstand a wird eins gesetzt, ebenso der Wilson-Parameter r . Ausgangspunkt ist der Dirac-Wilson-Operator in der Form

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(x|y) = (d + m)\delta_{x,y} - \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^d [1 - \gamma_{\mu}] \mathfrak{U}_{\mu}(x) \delta_{x+e_{\mu},y} \\ - \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^d [1 + \gamma_{\mu}] \mathfrak{U}_{\mu}^{\dagger}(x - e_{\mu}) \delta_{x-e_{\mu},y}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Die Linkvariablen \mathfrak{U}_{μ} sind Elemente der Gruppe $SU(\mathcal{N})$.

5.1.1 Spektralzerlegung

Dieser Abschnitt folgt dem Artikel von I. Hip et. al. [43]. Der Dirac-Wilson-Operator ist im allgemeinen ein nichtnormaler Operator, d. h. $[\mathfrak{D}, \mathfrak{D}^{\dagger}] \neq 0$ und damit kann er nicht

durch eine unitäre Transformation diagonalisiert werden. Mit nichtunitären Matrizen S ist es aber möglich, den Dirac-Wilson-Operator durch $S^{-1}\mathfrak{D}S$ zu diagonalisieren. Die Einträge der entstehenden Diagonalmatrix sind die Eigenwerte, die Spalten der Matrix S die Rechtseigenvektoren, die Zeilen von S^{-1} die Linkseigenvektoren, d. h. es gilt

$$\mathfrak{D}|\mathbf{r}_i\rangle = \lambda_i|\mathbf{r}_i\rangle \quad \text{bzw.} \quad \langle\mathbf{l}_i|\mathfrak{D} = \lambda_i\langle\mathbf{l}_i|.$$

Aus $SS^{-1} = \mathbb{1}$ folgt, daß die Rechts- und Linkseigenvektoren ein Orthogonalsystem bilden, d. h. es gilt $\langle\mathbf{l}_i|\mathbf{r}_j\rangle = \delta_{ij}$. Die Rechts- und Linkseigenvektoren bilden für sich alleine allerdings kein Orthonormalsystem. Der Dirac-Wilson-Operator hat damit die Spektralzerlegung

$$\mathfrak{D} = \sum_{i,j=1}^{\dim(\mathfrak{D})} |\mathbf{r}_i\rangle\langle\mathbf{l}_i|\mathfrak{D}|\mathbf{r}_j\rangle\langle\mathbf{l}_j| = \sum_{i=1}^{\dim(\mathfrak{D})} \lambda_i |\mathbf{r}_i\rangle\langle\mathbf{l}_i|,$$

wobei die Dimension durch

$$\dim(\mathfrak{D}) = N_s^{d-1} \cdot N_t \cdot \mathcal{N} \cdot 2^{\lfloor d/2 \rfloor}$$

gegeben ist. Er ist ein γ_* -hermitescher Operator, somit ist der Linkseigenvektor zu λ_i gleich dem konjugierten Rechtseigenvektor zu λ_i^* , d. h. es gilt $\mathbf{l}_i = \mathbf{r}_i^\dagger \gamma_*$.

5.1.2 Symmetrien des Dirac-Wilson-Operators

Die späteren Diskussionen benutzen die folgenden Symmetrien des Spektrums:

$\lambda - \lambda^*$ -Symmetrie: Wegen der γ_* -Hermitizität des Dirac-Wilson-Operators ist in geraden Dimensionen mit λ auch λ^* ein Eigenwert. In ungeraden Dimensionen gibt es keine γ_* -Matrix, deshalb kann diese Symmetrie hier nicht auftreten.

$2 \cdot (d + m) - \lambda$ -Symmetrie: Wenn das Gitter in *allen* Richtungen eine gerade Anzahl an Gitterpunkten hat, ist mit λ auch $2(d + m) - \lambda$ ein Eigenwert. Der Beweis hierfür wird in Anhang C.1 gegeben.

5.2 Eigenwerte für eine feste Eichfeldkonfiguration

In diesem Abschnitt werden die Eigenwerte des Dirac-Wilson-Operators für spezielle Konfigurationen des Eichfeldes analytisch bestimmt. Diese Eichfeldkonfigurationen haben eine verschwindende Feldstärke, sie werden deshalb im folgenden *flache Konnektionen* genannt und im weiteren Verlauf benutzt, um Beobachtungen an Monte-Carlo-Daten zu verstehen.

Für diese Rechnung wird der Dirac-Wilson-Operator in der Form

$$\mathfrak{D} = m + \sum_{\mu=1}^d \frac{1}{2} \gamma_\mu \nabla_\mu - \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^d \Delta_\mu \tag{5.2}$$

mit

$$\begin{aligned}\nabla_\mu &= \mathfrak{U}_\mu(x)\delta_{x+e_\mu,y} - \mathfrak{U}_\mu^\dagger(x+e_\mu)\delta_{x-e_\mu,y} \\ \Delta_\mu &= \mathfrak{U}_\mu(x)\delta_{x+e_\mu,y} + \mathfrak{U}_\mu^\dagger(x+e_\mu)\delta_{x-e_\mu,y} - 2\delta_{x,y}\end{aligned}$$

benötigt. Die Eichfeldkonfiguration wird in allen Raumrichtungen translationssymmetrisch gewählt. Als Eichfelder in zeitlicher Richtung an einem festem Raumpunkt werden beliebige $SU(\mathcal{N})$ -Matrizen zugelassen. Die räumlichen Links tragen die Einheitsmatrix.

5.2.1 Berechnung der Eigenwerte und Eigenfunktionen

Der Dirac-Wilson-Operator (5.2) wird auf den freien Dirac-Wilson-Operator $\mathfrak{D}_{\text{frei}} = (\gamma^\mu \partial_\mu + m) \otimes \mathbb{1}_{SU(\mathcal{N})}$ transformiert, die Information über die Eichfelder ist in den Randbedingungen enthalten, die sich bei dieser Transformation ändern.

Eichtransformation des Dirac-Wilson-Operators

Um die Notation übersichtlich zu halten, bezeichnet x in diesem Abschnitt einen Gitterpunkt in zeitlicher Richtung mit $x \in \{1, \dots, N_t\}$. Wenn auf einen räumlichen Gitterpunkt Bezug genommen wird, wird dieser mit i bezeichnet, wobei $i \in \{1, \dots, N_s\}$ ist. Wegen der räumlichen Translationsinvarianz müssen die räumlichen Gitterpunkte nicht weiter unterschieden werden.

Der Dirac-Wilson-Operator transformiert kovariant, d. h. für die zeitlichen Linkvariablen gilt

$$\Omega \mathfrak{U}_{x,x+1} = \Omega_x^\dagger \mathfrak{U}_{x,x+1} \Omega_{x+1}.$$

Die räumlichen Linkvariablen ändern sich dabei nicht, d. h. auch die transformierten Linkvariablen tragen die Einheitsmatrix, da die Transformationen wegen der räumlichen Translationsinvarianz der Eichkonfiguration nicht von den Linkvariablen in Raumrichtung abhängen:

$$\Omega \mathfrak{U}_{i,i+1}^s = \Omega_{i,x}^\dagger \mathbb{1} \Omega_{i+1,x} = \mathbb{1}$$

Damit *alle* zeitlichen Linkvariablen auf die Einheitsmatrix transformiert werden können, muß man *nichtperiodische* Randbedingungen für die Eichtransformation zulassen:

$$\Omega_{N_t+x} = \Omega_x \Omega_{N_t}$$

Wie sich im folgenden zeigen wird, ändert dies nicht nur die Randbedingungen der Eichfelder, sondern auch die Randbedingungen der Wellenfunktionen.

Für die zeitlichen Linkvariablen ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\Omega_1^\dagger \mathfrak{U}_{1,2} \Omega_2 &= \mathbb{1} \implies \Omega_1 = \mathfrak{U}_{1,2} \Omega_2, \\ \Omega_2^\dagger \mathfrak{U}_{2,3} \Omega_3 &= \mathbb{1} \implies \Omega_2 = \mathfrak{U}_{2,3} \Omega_3, \\ &\dots \\ \Omega_{N_t}^\dagger \mathfrak{U}_{N_t,1} (\Omega_1 \Omega_{N_t}) &= \mathbb{1} \implies \Omega_1^\dagger = \mathfrak{U}_{N_t,1}.\end{aligned}$$

Daraus lassen sich alle Transformationsmatrizen rekursiv bestimmen und man erhält

$$\Omega_j = \prod_{i=1}^j \mathfrak{U}_{i-1,i}^\dagger \quad \text{mit} \quad \mathfrak{U}_{0,1} \equiv \mathfrak{U}_{N_t,1}.$$

Es ergibt sich der freie Dirac-Wilson-Operator mit *nichtperiodischen* Randbedingungen. Die Eigenwerte sind (vgl. z. B. [100])

$$\Omega \lambda = m + d - \sum_{\mu=1}^d \cos(p_\mu) \pm i \left(\sum_{\mu=1}^d \sin^2(p_\mu) \right)^{1/2}, \quad \text{wobei} \quad p_\mu \in \left\{ \frac{2\pi}{N_\mu} k_\mu \right\} \quad \text{mit} \quad k_\mu \in \mathbb{Z}.$$

Eichtransformation der Wellenfunktionen

Die einzelnen Komponenten der Wellenfunktionen transformieren wie

$$\tilde{\psi}(x) = \Omega_x \psi(x).$$

Wenn die nichttransformierten Wellenfunktionen in Zeitrichtung periodischen Randbedingungen mit $\psi(x + N_t) = \psi(x)$ genügen, dann gilt für die transformierten Wellenfunktionen

$$\tilde{\psi}(x + N_t) = \Omega_{x+N_t} \psi(x + N_t) = \Omega_{x+N_t} \psi(x) = \Omega_{N_t} \tilde{\psi}(x).$$

Gibt man die Periodizität der Eichtransformationen auf, müssen also auch die Fermionenfelder nichtperiodischen Randbedingungen genügen.

Eigenwerte und ortsabhängiger Anteil der Eigenfunktionen

Für die Berechnung der Gitterimpulse p_μ werden die Randbedingungen für die ortsabhängigen Anteile der Eigenfunktionen benötigt. Für den freien Dirac-Wilson-Operator sind diese Anteile ebene Wellen $\varphi_p = \exp(ip_\mu x^\mu)$ (vgl. [100]), die in Raumrichtung periodischen Randbedingungen genügen. Damit ergibt sich für die räumlichen Gitterimpulse

$$p_i = \frac{2\pi}{N_s} k_i \quad \text{mit} \quad k_i \in \mathbb{Z}.$$

In Zeitrichtung müssen die Eigenfunktionen den nichtperiodischen Randbedingungen

$$\tilde{\psi}(x + N_t) = \Omega_{N_t} \tilde{\psi}(x) = \prod_{k=1}^{N_t} \mathfrak{U}_{k-1,k}^\dagger \tilde{\psi}(x)$$

genügen. $\prod_{k=1}^{N_t} \mathfrak{U}_{k-1,k}^\dagger$ ist eine $SU(\mathcal{N})$ -Matrix und läßt sich durch eine unitäre Matrix S diagonalisieren. Damit ergibt sich für die Eigenfunktionen

$$\zeta(x + N_t) = D \zeta(x) \quad \text{mit} \quad D = S^{-1} \left(\prod_{k=1}^{N_t} \mathfrak{U}_{k-1,k}^\dagger \right) S \quad \text{und} \quad \zeta(x) = S^{-1} \tilde{\psi}(x).$$

Werden die Eigenwerte von D mit $\exp(i\xi_l)$, $l = 1, \dots, \mathcal{N}$ bezeichnet, sind die Gitterimpulse in Zeitrichtung

$$p_d(l) = \frac{2k\pi}{N_t} + \frac{\xi_l}{N_t}.$$

Die betrachtete Form des Eichfeldes führt also im Vergleich zum freien Dirac-Wilson-Operator nur zu einer Abänderung des Gitterimpulses in Zeitrichtung.

Die ortsabhängigen Anteile der Eigenfunktionen des *transformierten* Dirac-Wilson-Operators haben damit die Form

$$\varphi_p(x) = \exp\left(\sum_{\mu=1}^d i p_\mu x_\mu\right) \quad \text{mit} \quad p_i = \frac{2k_i\pi}{N_s} \quad \text{und} \quad p_d = \frac{2k_d\pi}{N_t} + \frac{\xi_l}{N_t}.$$

Die Eigenfunktionen des *nichttransformierten* Dirac-Wilson-Operators \mathfrak{D} erhält man aus

$$\chi_p(x) = \Omega_x^\dagger \tilde{\psi}(x) = \Omega_x^\dagger S \zeta(x).$$

5.2.2 Eigenwerte des Dirac-Operators mit Zentrumstransformation

Als Spezialfall werden im folgenden Eichfeldkonfigurationen betrachtet, bei denen die räumlichen Links die Einheitsmatrix tragen und die zeitlichen eine konstante, diagonale, sonst aber beliebige $SU(3)$ -Matrix.

Von besonderem Interesse ist das Spektrum des Dirac-Wilson-Operators, wenn die zeitlichen Randbedingungen mit einem Zentrumselement getwistet werden. Der Twist der Randbedingungen wird hier dadurch realisiert, daß am letzten Link in Zeitrichtung das Eichfeld unter Beibehaltung der periodischen Randbedingungen mit einem Zentrumselement multipliziert wird (vgl. Abschnitt 3.6.2). Das heißt, es werden in Zeitrichtung die Linkvariablen

$$\mathfrak{U}_{x,x+1} = \begin{cases} \text{diag}(e^{i\theta}, 1, e^{-i\theta}), & x \neq N_d \\ \text{diag}(e^{i\theta+i\varphi}, e^{i\varphi}, e^{-i\theta+i\varphi}), & x = N_d \end{cases}$$

betrachtet. Dabei ist $\theta \in \mathbb{R}$ ein Parameter, der das Eichfeld charakterisiert und $e^{i\varphi} \cdot \mathbb{1}_{SU(3)}$ die Twistmatrix. Damit $\mathfrak{U}_{x,x+1}$ gruppenwertig bleibt, muß $\varphi \in \{0, 2\pi/3, 4\pi/3\}$ erfüllt sein, d. h. die Twistmatrix muß ein Zentrumselement sein.

Für die Transformationsmatrizen ergibt sich damit

$$\Omega_x = \text{diag}(e^{ix\theta+i\varphi}, e^{i\varphi}, e^{-ix\theta+i\varphi})$$

und für den Impuls in zeitlicher Richtung

$$p_d = \frac{2\pi}{N_t} k_d + l\theta + \frac{\varphi}{N_t} \quad \text{mit} \quad k_d \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad l = 0, \pm 1.$$

Die Eigenwerte des Dirac-Wilson-Operators sind

$$\lambda = m + d - \sum_{\mu=1}^d \cos(p_\mu) \pm i \left(\sum_{\mu=1}^d \sin^2(p_\mu) \right)^{1/2} \quad (5.3)$$

mit

$$p_i = \frac{2k_i\pi}{N_i}, \quad p_d = \frac{2k_d\pi}{N_t} + l\theta + \frac{\varphi}{N_t} \quad \text{wobei} \quad k_i, k_d \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad l = 0, \pm 1.$$

5.2.3 Eigenschaften des Spektrums

Die Eigenwerte sind vierfach entartet, da der betrachtete Dirac-Wilson-Operator mit Eichfeld sich auf den freien Dirac-Wilson-Operator mit nichtperiodischen Randbedingungen transformieren läßt.

Die Spektren des Dirac-Wilson-Operators zu $\varphi = 2\pi/3$ und $\varphi = 4\pi/3$ stimmen überein. Dies folgt aus der Beziehung

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3N} + \frac{2k\pi}{N}\right) \stackrel{!}{=} \cos\left(\frac{4\pi}{3N} + \frac{2l\pi}{N}\right) = \cos\left(-\frac{4\pi}{3N} - \frac{2l\pi}{N}\right)$$

zwischen den Realteilen der Eigenwerte. Diese Gleichung kann immer erfüllt werden, da l und k unter Berücksichtigung der Periodizität beliebig aus \mathbb{Z} wählbar sind. Damit die obige Gleichung gültig ist, muß

$$1 + 3 \cdot k = -2 - 3 \cdot l \quad \Rightarrow \quad l = -(k + 1)$$

gewählt werden. Für den Imaginärteil gilt das gleiche Argument, da der Sinus im Quadrat auftritt.

5.3 Die Lage des Spektrums des Dirac-Wilson-Operators

Die Darstellung des Polyakov-Loops durch die Eigenwerte des Dirac-Wilson-Operators, die im Abschnitt 5.4 abgeleitet wird, basiert darauf, daß das Spektrum des Dirac-Wilson-Operators unter Transformationen mit einem Zentrumselement nicht invariant ist, bzw. daß es sich für die drei betrachteten Eichfeldsektoren unterscheidet.

In diesem Abschnitt wird untersucht, wie das Spektrum auf die getwisteten Randbedingungen reagiert. Die folgenden Aussagen sind aber eher qualitativer Natur, weil es schwer ist, eine Eigenwertdichte und damit eine spektrale Lücke der Eigenwertdichte zu definieren. O. B. d. A. wird im folgenden angenommen, daß der Polyakov-Loop sich in der Phase befindet, die entlang der reellen Achse ausgerichtet ist. Dies ist immer durch eine einfache Drehung zu erreichen. Es werden Gitter der Größe $4^3 \times 3$ und $6^3 \times 4$ betrachtet, die Konfigurationen sind durch Monte-Carlo-Simulationen erzeugt worden.

5.3.1 Verhalten der kleinsten Eigenwerte

In der gebrochenen Phase werden die kleinsten Eigenwerte durch Twisten der Randbedingung in der komplexen Ebene „vom Ursprung weggetrieben“. Dieses Phänomen ist in Abbildung 5.1 beispielhaft für drei Eichfeldkonfigurationen dargestellt. Die drei Konfigurationen wurden übereinandergezeichnet, um den Effekt deutlicher sichtbar zu machen. Für jede Konfiguration sind jeweils die 30 kleinsten Eigenwerte für den ungetwisteten Dirac-Wilson-Operator (grün) und für die getwisteten (rot und blau) dargestellt.

Eine Erklärung hierfür findet sich im unterschiedlichen Verhalten des chiralen Kondensats in den \mathbb{Z}_3 -Sektoren, welches zuerst in [13] beobachtet und in [14, 29, 82] erklärt wurde, dort allerdings für *antiperiodische* Randbedingungen, bei denen ein Twist die kleinsten

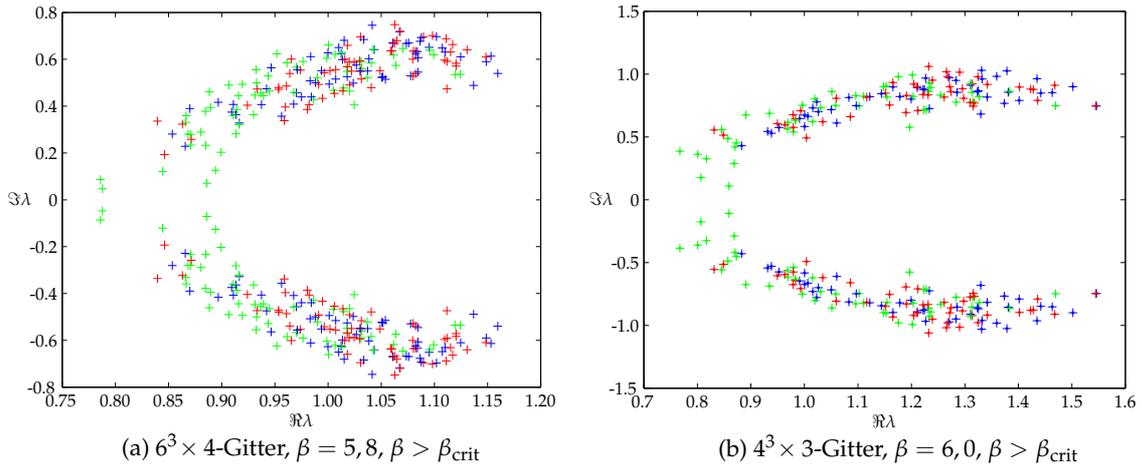


Abbildung 5.1: Lage der 30 kleinsten Eigenwerte, jeweils 3 Konfigurationen (übereinandergezeichnet), grün ist das ungetwistete Spektrum, rot und blau die getwisteten.

Eigenwerte *erniedrigt*. Die Argumentation in [29, 82] ist aber auf periodische Randbedingungen übertragbar und sagt eine Vergrößerung der Eigenwerte voraus. In der ungebrochenen Phase sind die Eichfeldkonfigurationen \mathbb{Z}_3 -symmetrisch, so daß ein Twist keine Auswirkung auf das Spektrum haben sollte.

5.3.2 Verhalten der größten Eigenwerte

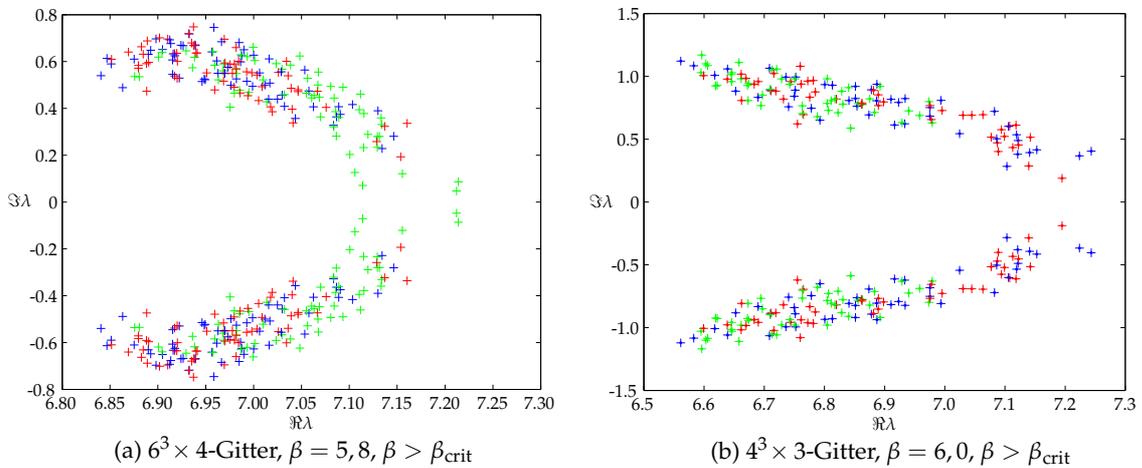


Abbildung 5.2: Lage der 30 größten Eigenwerte, jeweils 3 Konfigurationen (übereinandergezeichnet), grün ist das ungetwistete Spektrum, rot und blau die getwisteten.

Für gerade Gitter wird das Verhalten der größten Eigenwerte wegen der $(8 - \lambda)$ -Symmetrie in $d = 4$ durch die kleinsten Eigenwerte festgelegt, twisten treibt die größten Eigenwerte vom Punkt 8 weg. Dieses Verhalten ist in Abbildung 5.2 a dargestellt, der Punkt 8 ist auf der Abbildung nicht gezeigt, weil ein nichttriviales Eichfeld dazu führt, daß sich

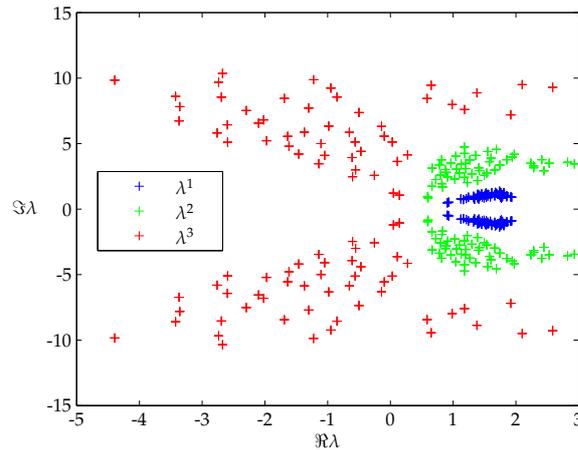


Abbildung 5.3: Drei Potenzen des Spektrums für ein $4^3 \times 3$ -Gitter mit $\beta = 5,720$ und ungetwisteten Randbedingungen, aufgetragen sind jeweils die 100 kleinsten Eigenwerte.

das Spektrum auf der reellen Achse nicht ganz bis $2d$ erstreckt [28]. Wieder werden beispielhaft drei Konfigurationen gezeigt, für die jeweils das ungetwistete (grün) und die getwisteten Spektren (blau und rot) aufgetragen sind.

Für ungerade Gitter¹ ist das entgegengesetzte Verhalten zu beobachten, der Twist führt dazu, daß die Eigenwerte zum Punkt π hingetrieben werden (s. Abb. 5.2 b). Für die flache Konnektion ist dieses Verhalten leicht zu verstehen: Auf ungeraden Gittern ist es nicht möglich, die Bedingung $p_d = \pi$ zu erfüllen, die notwendig ist, damit sich das Spektrum auf der reellen Achse bis zu $2d$ erstrecken kann. Das bedeutet, daß das Spektrum am Ende „aufgeklappt“ wird und nicht mehr symmetrisch zur Achse $\lambda = d$ ist. Twisten der Randbedingungen bewirkt, daß das Argument p_d näher an π herankommt und der Realteil größer wird. Hierbei sollte es sich aber um ein Gitterartefakt handeln, denn für $N_t \rightarrow \infty$ rückt p_d immer näher an π heran.

5.3.3 Verschiedene Potenzen des Spektrums

Potentieren der Eigenwerte führt zu einer Drehung in der komplexen Ebene. Dabei wird, abhängig von der Potenz, ein Teil des Spektrums in den negativen Halbraum gedreht. Dies ist in Abbildung 5.3 für die 100 kleinsten Eigenwerte eines $4^3 \times 3$ -Gitters dargestellt.

Dieses Verhalten ist unabhängig von der Gittergröße, da es nur vom Argument von λ bestimmt wird. Die Eigenwertspektren im Bereich der kleinsten Eigenwerte sind qualitativ ähnlich, insbesondere liegen ihre Argumente für alle Gitter im gleichen Bereich.

Betrachtet man eine feste Anzahl von Eigenwerten bei wachsender Gittergröße, werden die zugehörigen Argumente der betrachteten Eigenwerte kleiner, weil das Spektrum dichter wird. Das bedeutet, daß die Potenz, bei der ein Eigenwert in den negativen Halbraum gedreht wird, mit zunehmender Gittergröße ebenfalls wächst. Diese Gitterabhän-

¹ungerade bezieht sich auf die Anzahl Gitterpunkte in Zeitrichtung

gigkeit sollte aber klein sein.

5.4 Der Polyakov-Loop ausgedrückt durch Potenzen des Dirac-Wilson-Operators

Der Dirac-Wilson-Operator enthält nur nächste Nachbarterme. Nimmt man den Operator zur Potenz n , d. h.

$$\mathfrak{D}^n(x|y) = \sum_{x_1 \dots x_{n-1}} \mathfrak{D}(x|x_1) \mathfrak{D}(x_1|x_2) \dots \mathfrak{D}(x_{n-2}|x_{n-1}) \mathfrak{D}(x_{n-1}|y),$$

können höchstens Wege der Länge n auftreten. Im folgenden wird die Potenz $n = N_t$ und geschlossene Wege mit $y = x$ betrachtet. Für Gitter mit $N_s < N_t$ können in $\mathfrak{D}^{N_t}(x|x)$ für $N_t < 4$ nur in Zeitrichtung geschlossene Wege

$$(-)^{N_t} P_-^{N_t} \cdot \prod_{k=t}^{N_t+t} \mathfrak{U}_d(\mathbf{x}, k) \quad \text{und} \quad (-)^{N_t} P_+^{N_t} \cdot \prod_{k=t-1}^{N_t+t-2} \mathfrak{U}_d^\dagger(\mathbf{x}, N_t - k) \quad (5.4)$$

auftreten. Hier wurden die Projektoren

$$P_\pm = \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_d) \quad \text{mit} \quad \text{tr} P_\pm^{N_t} = \text{tr} P_\pm = 2^{\lfloor d/2 \rfloor - 1} \equiv \frac{d_S}{2}$$

eingeführt, d_S ist die Dimension des Spinorraums. Für $N_t \geq 4$ sind auch räumlich geschlossene Wege möglich. Betrachtet man die Spur über die Spinorindizes von $\mathfrak{D}^{N_t}(x|x)$, liefert (5.4) die Terme

$$(-)^{N_t} \cdot \frac{d_S}{2} \cdot \mathfrak{P}(\mathbf{x}, t) \quad \text{bzw.} \quad (-)^{N_t} \cdot \frac{d_S}{2} \cdot \mathfrak{P}^*(\mathbf{x}, t).$$

Bildet man die Spur über die Farbindizes und mittelt über die Zeit, erhält man

$$(-)^{N_t} \cdot \frac{d_S}{2} \cdot \mathfrak{L}(\mathbf{x}) \quad \text{bzw.} \quad (-)^{N_t} \cdot \frac{d_S}{2} \cdot \mathfrak{L}^*(\mathbf{x}).$$

Die räumlich geschlossenen Schleifen, die für $N_t \geq 4$ auftreten können, führen zu Wilson-Loops mit einem Faktor $d_S/2$.

Bei endlichen Temperaturen erfüllen die Linkvariablen in Zeitrichtung periodische Randbedingungen, d. h. es gilt

$$\mathfrak{U}_d(\mathbf{x}, 1) = \mathfrak{U}_d(\mathbf{x}, N_t + 1).$$

Neben periodischen Eichtransformationen können auch große Eichtransformationen (vgl. Abschnitt 2.4) zugelassen werden, die mit einem nichttrivialen Zentrumselement getwistet sind:

$$\Omega(\mathbf{x}, 1) = z \cdot \Omega(\mathbf{x}, N_t + 1), \quad z \in \mathcal{Z}_{\text{SU}(\mathcal{N})}$$

Der zugehörige Polyakov-Loop erhält das Zentrumselement als zusätzlichen Faktor (der komplex konjugierte Loop erhält entsprechend einen Faktor z^* [57]), wohingegen der Wilson-Loop sich nicht ändert [79].

Betrachtet man den Dirac-Wilson-Operator für die mit dem Zentrumselement z getwisteten Eichtransformationen, erhält man deshalb

$$\frac{1}{N_t} \sum_{t=1}^{N_t} \text{tr} \, {}^z \mathfrak{D}^{N_t}(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}, t) = (-)^{N_t} \frac{d_S}{2} [z \cdot \mathfrak{L}(\mathbf{x}) + z^* \cdot \mathfrak{L}^*(\mathbf{x})] + \alpha \cdot \text{Wilson-Loops}.$$

Dabei sind in α sämtliche Faktoren, die vor den Wilson-Loops auftreten, zusammengefaßt.

Um hieraus den Polyakov-Loop $\mathfrak{L}(\mathbf{x})$ herauszuprojezieren, betrachtet man für die Eichgruppe $SU(\mathcal{N})$ die Summe

$$\begin{aligned} \frac{1}{N_t} \sum_{t=1}^{N_t} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} z_k^* \cdot \text{tr} \, {}^{z_k} \mathfrak{D}^{N_t}(x|x) &= (-)^{N_t} \frac{d_S}{2} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} [\mathfrak{L}(\mathbf{x}) + (z_k^*)^2 \mathfrak{L}^*(\mathbf{x})] \\ &+ \tilde{\alpha} \cdot \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} z_k^* \cdot \text{Wilson-Loops}. \end{aligned}$$

Mit $\sum_{k=1}^{\mathcal{N}} z_k = 0$ fallen die Wilson-Loops heraus, außerdem gilt $\sum_{k=1}^{\mathcal{N}} z_k^2 = 0$ für $\mathcal{N} > 2$ (s. Anhang C.2). Mit Ausnahme der $SU(2)$, für die der Polyakov-Loop reell ist, verschwindet damit auch der Faktor vor $\mathfrak{L}^*(\mathbf{x})$, so daß man den Ausdruck

$$\mathfrak{L}(\mathbf{x}) = \frac{1}{N_t} (-)^{N_t} \sum_t \frac{2}{d_S \cdot \mathcal{N}} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} z_k^* \cdot \text{tr} \, {}^{z_k} \mathfrak{D}^{N_t}(x|x) \quad (5.5)$$

für den Polyakov-Loop erhält. Der komplex konjugierte Loop ergibt sich entsprechend zu

$$\mathfrak{L}^*(\mathbf{x}) = \frac{1}{N_t} (-)^{N_t} \sum_t \frac{2}{d_S \cdot \mathcal{N}} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} z_k \cdot \text{tr} \, {}^{z_k} \mathfrak{D}^{N_t}(x|x).$$

Benutzt man die Spektraldarstellung des Dirac-Wilson-Operators mit Hilfe von Rechts- und Linkseigenwerten, erhält man (Farb- und Spinorindizes sind unterdrückt)

$$\mathfrak{D}(x|x) = \sum_{i=1}^{\dim(\mathfrak{D})} \lambda_i \cdot \mathbf{r}_\lambda(x) \otimes \mathbf{I}_\lambda(x) \quad \text{und} \quad \mathfrak{D}^{N_t}(x|x) = \sum_{i=1}^{\dim(\mathfrak{D})} \lambda_i^{N_t} \cdot \mathbf{r}_\lambda(x) \otimes \mathbf{I}_\lambda(x)$$

bzw. explizit in Komponenten mit allen Indizes (c bezeichnet die Farb- und s die Spinorindizes)

$$\mathfrak{D}_{x,x|c,c'|s,s'}^{N_t} = \sum_{i=1}^{\dim(\mathfrak{D})} \lambda_i^{N_t} \cdot \mathbf{r}_\lambda(x, c', s') \otimes \mathbf{I}_\lambda(x, c, s).$$

Spurbildung über die Spinor- und Farbindexe führt auf

$$\text{tr}_{s,c} \mathfrak{D}_{x,x|c,c|s,s}^{N_t} = \sum_{i=1}^{\dim(\mathfrak{D})} \lambda_i^{N_t} \cdot \sum_{s,c} \mathbf{I}_\lambda(x, c, s) \cdot \mathbf{r}_\lambda(x, c, s) = \sum_{i=1}^{\dim(\mathfrak{D})} \lambda_i^{N_t} \cdot \varrho_\lambda(x) \quad (5.6)$$

mit der Eigenwertdichte

$$q_\lambda(x) = \sum_{s,c} I_\lambda(x,c,s) \cdot r_\lambda(x,c,s).$$

Setzt man den Ausdruck (5.6) für die Spur des Dirac-Wilson-Operators in den Ausdruck (5.5) ein, erhält man für den ortsabhängigen Polyakov-Loop

$$\mathfrak{L}(\mathbf{x}) = (-)^{N_t} \frac{2}{d_S \cdot \mathcal{N}} \frac{1}{N_t} \sum_{t=1}^{N_t} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} z_k^* \sum_{i=1}^{\dim(\mathfrak{D})} z_k \lambda_i^{N_t} \cdot z_k q_\lambda(\mathbf{x}, t).$$

Mittelt man zusätzlich über das räumliche Volumen, erhält man

$$\sum_{\mathbf{x}, t} q_\lambda(\mathbf{x}, t) = 1$$

und damit für den räumlich gemittelten Polyakov-Loop

$$\mathcal{P} = \frac{1}{\varkappa} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} z_k^* \sum_{i=1}^{\dim(\mathfrak{D})} z_k \lambda_i^{N_t} \quad \text{mit} \quad \varkappa = (-)^{N_t} \frac{d_S}{2} N_S^{d-1} N_t \mathcal{N}. \quad (5.7)$$

5.4.1 Vergleich mit der Literatur

Die Idee, daß der Polyakov-Loop in $\text{tr} [\mathfrak{D}^{N_t}(x|x)]$ enthalten ist, wurde zuerst in [27] vorgestellt. Allerdings wurden dort, um den Polyakov-Loop herauszuprojezieren, die zeitlichen Linkvariablen bei $t = N_t$ mit einer beliebigen Phase $z \in \mathbb{C}, |z| = 1$ multipliziert. Dies liefert zwar den richtigen Wert für den Polyakov-Loop, wie mit numerischen Simulationen an einem $4^3 \times 3$ Gitter verifiziert wurde, aus physikalischer Sicht ist ein solches Vorgehen jedoch fragwürdig, da die Linkvariablen nach Multiplikation mit einer beliebigen Phase im allgemeinen nicht mehr gruppenwertig sind. Außerdem fehlt in [27] das gitterabhängige Vorzeichen $(-)^{N_t}$.

Die Eigenschaft, die für die Darstellung des Polyakov-Loops durch die Eigenwerte des Dirac-Wilson-Operators benötigt wird, ist die nächste Nachbarwechselwirkung dieses Operators. Streng gültig ist die Darstellung also nur für solche Operatoren. Simulationen in [27] mit einem chiral verbesserten Dirac-Wilson-Operator, der auch übernächste Nachbarwechselwirkungen enthält, haben allerdings gezeigt, daß der Zusammenhang zwischen Polyakov-Loop und Spektrum recht „robust“ ist, d. h. auch für diesen Fall noch gültig zu sein scheint.

Für den Staggered-Operator wurde in [12] eine zu (5.7) analoge Gleichung vorgestellt, hier wurden die zeitlichen Randbedingungen ebenfalls durch eine Zentrumstransformation geändert.

5.4.2 Massenunabhängigkeit der Formel

Die Darstellung (5.7) des Polyakov-Loops ist unabhängig von der Masse, die im Dirac-Wilson-Operator steht. Eine Masse führt zu einer Verschiebung der Eigenwerte

$$\sum_{k=1}^{\mathcal{N}} z_k^* \sum_{i=1}^{\dim(\mathfrak{D})} z_k \lambda_i^{N_t} \rightarrow \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} z_k^* \sum_{i=1}^{\dim(\mathfrak{D})} (z_k \lambda_i + m)^{N_t}.$$

Multipliziert man dieses Produkt aus und sortiert nach Potenzen von m , erhält man Terme der Form

$$m^{N_t-l} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} z_k^* \sum_{i=1}^{\dim(\mathfrak{D})} z_k \lambda_i^l \quad \text{mit } l = 0, \dots, N_t.$$

Für $l = 0$ verschwindet die Summe, da nur über Zentrumsэлеmente summiert wird. Für $l < N_t$ ist $\sum_i z_k \lambda_i^l$ die gemittelte Spektraldarstellung von $\text{tr} [z_k \mathfrak{D}^l(x|x)]$. Auf einem Gitter mit zeitlicher Ausdehnung N_t führt dies nur zu Wilson-Loops, welche in der Summe über die Zentrumsэлеmente herausfallen.

5.5 Trunkierte Eigenwertsummen

Für große Gitter ist es nicht möglich, das volle Spektrum zu berechnen. Deshalb wird in diesem Abschnitt die trunkierte Eigenwertsumme

$$\Sigma_n^{(l)} \equiv \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} z_k^* \sum_{i=1}^n z_k \lambda_i^l, \quad n < \dim(\mathfrak{D}) \quad (5.8)$$

für $l \leq N_t$ betrachtet. Insbesondere wird die Ausrichtung der trunkierten Summe im Vergleich zum Polyakov-Loop untersucht und der Mechanismus betrachtet, der diese Ausrichtung bewirkt. Es wird die Abkürzung $\Sigma_n^{(N_t)} \equiv \Sigma_n$ eingeführt, da diese Potenz von besonderer Bedeutung ist.

Die Argumentation ist einfacher für den Staggered-Operator, deshalb werden die wesentlichen Ideen und Ergebnisse zuerst anhand dieses Operators dargestellt. Im nächsten Abschnitt werden die Ergebnisse auf den Dirac-Wilson-Operator ausgeweitet.

5.5.1 Die trunkierte Eigenwertsumme für den Staggered-Operator

Der Staggered-Operator hat ein rein imaginäres Spektrum, die spektrale Lücke wird als der Abstand zwischen den beiden betragsmäßig kleinsten, nichtverschwindenden Eigenwerten definiert. Twisten der periodischen Randbedingungen mit einem Zentrumsэлеment vergrößert die spektrale Lücke. Die mit z und z^* getwisteten Spektren sind im Mittel gleich [14]. Mit $z + z^* = -1$ ist die trunkierte Eigenwertsumme

$$\Sigma_n^{(4k+2)} = \sum_{p=1}^n \lambda_p^{4k+2} + \sum_{p=1}^n z^* \cdot z \lambda_p^{4k+2} + \sum_{p=1}^n z \cdot z^* \lambda_p^{4k+2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

deshalb für eine kleine Anzahl berücksichtigter Eigenwerte positiv und

$$\Sigma_n^{(4k)} = \sum_{p=1}^n \lambda_p^{4k} + \sum_{p=1}^n z^* \cdot z \lambda_p^{4k} + \sum_{p=1}^n z \cdot z^* \lambda_p^{4k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

negativ. Dies erklärt die in [12] auf einem $6^3 \times 4$ -Gitter beobachtete Phasenverschiebung der trunkierten Eigenwertsumme gegenüber dem Polyakov-Loop bei Berücksichtigung der tiefsten Eigenwerte.

Für den Staggered-Operator sind nur gerade Potenzen sinnvoll, da die Eigenwertsumme für ungerade Gitter wegen der $\lambda - \lambda^*$ -Symmetrie verschwindet.

5.5.2 Die trunkierte Eigenwertsumme für den Dirac-Wilson-Operator

Für den Dirac-Wilson-Operator zeigt das Spektrum ein ähnliches Verhalten, allerdings ist es hier schwer, eine spektrale Lücke zu definieren, weil die Eigenwerte nicht rein imaginär sind. Außerdem fluktuiert das Spektrum des Dirac-Wilson-Operators in der Nähe des Ursprungs stark. Die folgenden Aussagen sind deshalb eher qualitativ.

Die betragsmäßig kleinsten Eigenwerte reagieren ebenfalls auf den Twist der Randbedingungen (vgl. Abschnitt 5.3.1). Das Vorzeichen von $\Sigma_n^{(l)}$ wird dadurch bestimmt, daß der Twist die tiefsten Eigenwerte vom Ursprung wegtreibt. Ein Vorzeichenwechsel tritt auf, wenn die Eigenwerte durch die Potenz l in den negativen Halbraum gedreht werden. Die numerischen Ergebnisse mit 20 berücksichtigten Eigenwerten auf einem $4^3 \times 3$ -Gitter mit $\beta = 5,885$ und auf einem $6^3 \times 4$ -Gitter mit $\beta = 5,8$ sind in Tabelle 5.1 dargestellt. Betrachtet wurden 400 bzw. 100 Konfigurationen. Es ist zu beobachten, daß die Ausrichtung der spektralen Summe von der Potenz abhängt. Auch die Umkehrung des Vorzeichens bei hohen Potenzen ist zu beobachten.

Potenz l	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ausrichtung auf dem									
$4^3 \times 3$ -Gitter	-	.	.	+	+	+	.	.	-
$6^3 \times 3$ -Gitter	-	.	.	+	+	+	+	+	.

Tabelle 5.1: Ausrichtung von $\Sigma_n^{(l)}$ für den Dirac-Wilson-Operator mit $n = 10 - 50$, „+“ bedeutet Ausrichtung in Richtung des Polyakov-Loops, „-“ entgegengesetzt zum Polyakov-Loop, bei „.“ ist keine Ausrichtung erkennbar.

In der Confined-Phase ist die Eichfeldkonfiguration zentrumssymmetrisch, so daß die Eigenwertdichten, die mit den getwisteten Konfigurationen berechnet werden, gleich sind. Damit verschwindet der Erwartungswert des Polyakov-Loops, da Gleichung (5.7) bzw. Gleichung (5.8) die *Unterschiede* zwischen den Spektren mißt. In der Deconfined-Phase ist die Zentrumssymmetrie gebrochen, so daß sich die Eichfeldkonfigurationen und die damit berechneten Eigenwertdichten unter einer Zentrumstransformation ändern.

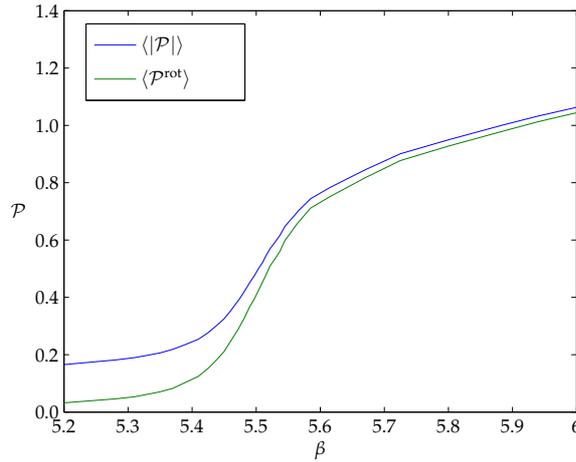


Abbildung 5.4: Verlauf der Ordnungsparameter $|\mathcal{P}|$ und \mathcal{P}^{rot} auf dem $4^3 \times 3$ -Gitter

	Confinement					Deconfinement					
β	5,200	5,330	5,440	5,475	5,505	5,530	5,560	5,6150	5,725	5,8850	6,000
$\langle \mathcal{P} \rangle$	0,1654	0,1975	0,3050	0,3980	0,5049	0,5939	0,6865	0,7832	0,9007	1,0013	1,0631
$\langle \mathcal{P}^{\text{rot}} \rangle$	0,0318	0,0615	0,1859	0,3013	0,4296	0,5363	0,6452	0,7513	0,8770	0,9797	1,0444

Tabelle 5.2: die verwendeten β -Werte und die zugehörigen Werte des Polyakov-Loops

Da die folgenden numerischen Betrachtungen auf kleinen Gittern durchgeführt werden, ist ein Hinweis auf die Dynamik von Phasenübergängen auf kleinen Gittern angebracht. Auf kleinen Gittern hat der Ordnungsparameter auch in der Deconfined-Phase einen kleinen, nichtverschwindenden Wert. Der Verlauf der hier betrachteten Ordnungsparameter $|\mathcal{P}|$ und \mathcal{P}^{rot} in Abhängigkeit von der Kopplungskonstante β auf dem $4^3 \times 3$ -Gitter ist in Abbildung 5.4 dargestellt. Der Phasenübergang auf kleinen Gittern wird über Histogramm-Methoden bestimmt [101].

Die trunkierte Eigenwertsumme als Funktion der Anzahl der Eigenwerte

In Abbildung 5.5 ist die trunkierte, rotierte Eigenwertsumme Σ_n^{rot} – die aus Σ_n mit der Vorschrift in Abschnitt 4.3.2 gebildet wird – normiert mit dem rotierten Polyakov-Loop, über der Anzahl der berücksichtigten Eigenwerte für verschiedene Kopplungskonstanten β – und damit verschiedene Werte des Polyakov-Loops – aufgetragen. Die verwendeten β -Werte und die zugehörigen Werte des rotierten Polyakov-Loops sowie der Betrag des Polyakov-Loops sind in Tabelle 5.2 zu finden. In Übereinstimmung mit [12] ergibt sich der vollständige Wert des Polyakov-Loops erst, wenn alle Eigenwerte aufsummiert werden. Außerdem kann das Ergebnis von [12], daß der Polyakov-Loop vom Ultraviolett-Anteil des Spektrums bestimmt wird, bestätigt werden.

In der gebrochenen Phase, d. h. $\beta \geq 5,47$, ist Σ_n proportional zum Polyakov-Loop, so daß die mit dem jeweiligen Polyakov-Loop normierten Kurven aufeinander liegen (vgl. Abb. 5.5). Die starken Fluktuationen der Kurven für $\beta = 5,33$ und $\beta = 5,44$ sind vermutlich auf Stabilitätsprobleme zurückzuführen, da der zugehörige Polyakov-Loop, mit dem normiert wird, sehr klein ist.

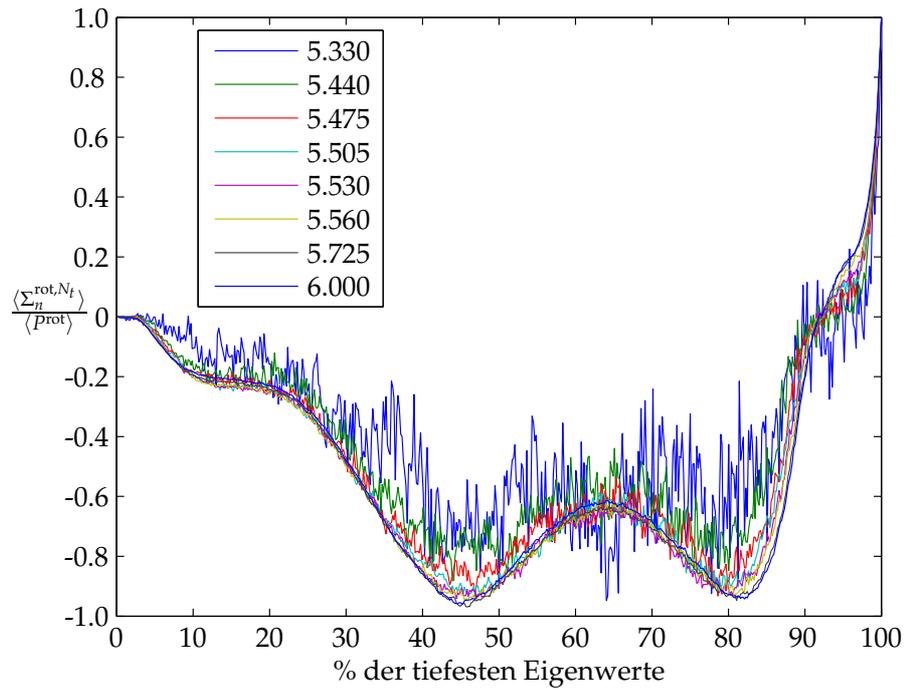


Abbildung 5.5: trunkierte, rotierte Eigenwertsumme auf dem $4^3 \times 3$ -Gitter für verschiedene β -Werte, normiert mit dem jeweiligen rotierten Polyakov-Loop

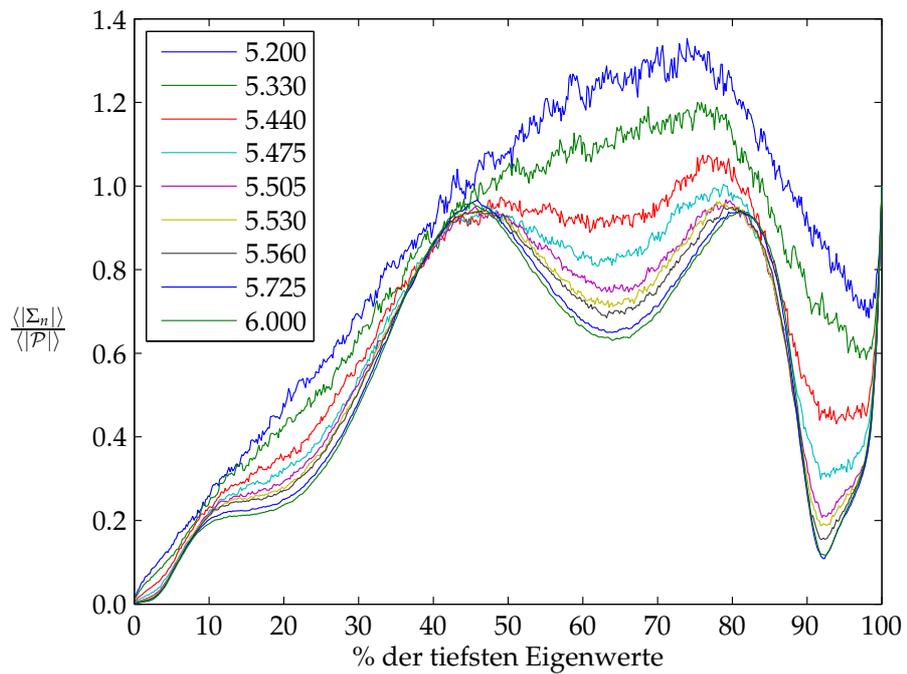


Abbildung 5.6: Betrag der trunkierten Eigenwertsumme auf dem $4^3 \times 3$ -Gitter für verschiedene β -Werte, normiert mit dem Betrag des jeweiligen Polyakov-Loop

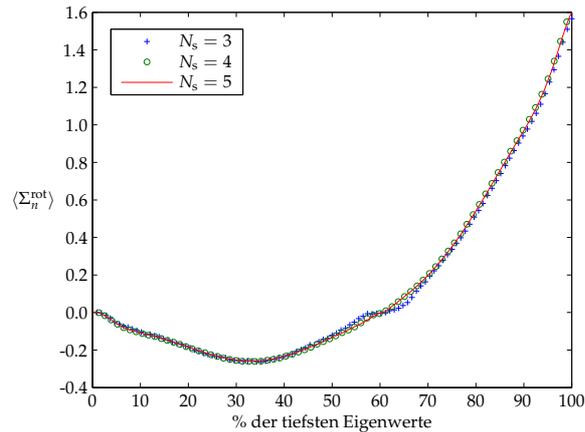


Abbildung 5.7: trunkierte, rotierte Eigenwertsumme auf $N_s^3 \times 2$ -Gittern mit verschiedenen räumlichen Gittergrößen N_s , $\beta = 5,5$.

Ein qualitativ ähnliches Bild ergibt sich, wenn man den Betrag der trunkierten Eigenwertsumme – normiert auf den Betrag des jeweiligen Polyakov-Loops – betrachtet (s. Abb. 5.6). Allerdings ist mit dem Betrag natürlich kein Vorzeichenwechsel zu beobachten. Daß bei etwa 92% der Eigenwerte die Null nicht mehr erreicht wird, hängt mit den Fluktuationen zusammen, die sich bei der rotierten Eigenwertsumme zu null mitteln, beim Betrag aber aufsummiert werden.

Volumenabhängigkeit von Σ_n

In Abbildung 5.7 ist die trunkierte Eigenwertsumme für verschiedene räumliche Gittergrößen bei fester zeitlicher Gittergröße aufgetragen, um die Abhängigkeit vom räumlichen Volumen zu untersuchen. Die räumliche Gittergröße wurde zwischen $N_s = 3$ und $N_s = 5$ variiert, die zeitliche Gittergröße bei $N_t = 2$ festgehalten. In der Definition der trunkierten Eigenwertsumme ist eine Normierung mit dem Volumen berücksichtigt.

In der gebrochenen Phase liegen die Kurven übereinander, d. h. die trunkierte Eigenwertsumme skaliert mit dem räumlichen Volumen. Diese Skalierung ist nicht verwunderlich, weil zumindest bei kleinen Variationen in der Gittergröße das Spektrum dichter wird, sich qualitativ aber nicht stark ändert. Die betrachtete Eigenwertsumme mißt die Unterschiede im Spektrum, daher sollte sich nur ein Volumenfaktor ergeben, weil mit der Gittergröße die Anzahl der Eigenwerte wächst.

Vorzeichenwechsel

Vergleicht man die Abbildungen 5.5 und 5.7 mit $N_t = 3$ bzw. $N_t = 2$ wird deutlich, daß die Form der Kurve wesentlich von der zeitlichen Gittergröße bestimmt wird. Der Nulldurchgang und damit der Wechsel in der Phase ist abhängig von der zeitlichen Gittergröße. Für die Gitter mit $N_t = 2$ liegt er bei etwa 60% der Eigenwerte, für die Gitter mit $N_t = 3$ bei etwa 92%.

5.5.3 Vergleich mit der Literatur

Während der Anfertigung dieser Diplomarbeit ist eine ähnliche Arbeit von F. Bruckmann, C. Gatttringer und C. Hagen veröffentlicht worden [12]. In dieser Publikation wird der Polyakov-Loop mit den Eigenwerten des Staggered-Operators in Verbindung gebracht und ähnliche trunkierte Summen wie im vorherigen Abschnitt untersucht. Die dort für den Staggered-Operator vorgestellten Ergebnisse decken sich mit den Ergebnissen, die im letzten Abschnitt dargestellt wurden.

Im letzten Abschnitt konnte gezeigt werden, daß der Polyakov-Loop mit dem Spektrum des Dirac-Operators verknüpft ist, da er sich als spektrale Summe mit Hilfe der Eigenwerte ausdrücken läßt. Der wesentliche Beitrag wird von den UV-Moden getragen. Dadurch bringt diese Darstellung des Polyakov-Loops aber numerische Probleme mit sich, weil für große Gitter sehr große, aber ähnliche Zahlen subtrahiert werden. Außerdem ist es wegen der Potenz N_t schwierig, zum Kontinuumslimit überzugehen. Möglichen Auswegen widmet sich das Kapitel 6.

Desweiteren läßt sich festhalten, daß das Vorzeichen von Σ_n für kleine n hauptsächlich von der Potenz N_t und damit der Gittergröße bestimmt wird.

5.6 Spektrale Summen

In diesem Abschnitt werden allgemeine spektrale Summen

$$\Sigma^{(l)} = \frac{1}{\mathcal{Z}} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} z_k^* \text{tr} z_k \mathfrak{D}^l, \quad \mathcal{Z} = (-)^{N_t} 2^{\lfloor d/2 \rfloor - 1} N_s^{d-1} N_t \mathcal{N}$$

betrachtet. Auf die Ergebnisse wird im folgenden Kapitel immer wieder zurückgegriffen. Interessant sind die Potenzen $l > N_t$, denn für $l = N_t$ ergibt sich wieder Gleichung (5.7) und für $l < N_t$ verschwinden die spektralen Summen, da nur Wilson-Loops auftreten. Die trunkierten spektralen Summen werden wieder mit $\Sigma_n^{(l)}$ bezeichnet (vgl. Abschnitt 5.5). Um die Notation zu vereinfachen, wird die Bezeichnung $m \equiv l - N_t$ eingeführt.

Für die flache Konnektion ist $\Sigma^{(l)}$ für $l < 2N_t$ proportional zum Polyakov-Loop, d. h.

$$\Sigma^l = C_l \cdot \mathcal{P}.$$

Für $l \geq 2N_t$ ist die Proportionalität zumindest näherungsweise erfüllt. Die Erklärung für die Proportionalitäten ist einfach: $\Sigma^{(l)}$ enthält nur geschlossene Wege, die längsten haben die Länge $N_t + m$. Kürzere Wege sind möglich, da der Dirac-Wilson-Operator auch Selbstwechselwirkungen (den Term $d \cdot \delta_{xx}$) enthält. Für $l < 2N_t$ treten nur gerade² und dicke Loops auf. Die räumlichen Linkvariablen tragen die Einheitsmatrix, so daß die gespurten dicken Loops ebenfalls Polyakov-Loops sind. Ab $l \geq 2N_t$ treten auch höhere Potenzen von \mathcal{P} bzw. \mathcal{P}^* auf, was zu Abweichungen von der Proportionalität führt. Solange l nicht viel größer als N_t gewählt wird, ist diese Abweichung aber klein, da es deutlich mehr dicke und gerade Loops gibt, die sich einmal um das Gitter winden als solche, die sich

²Ein *gerader Loop* ist ein Loop, der nur Linkvariablen in Zeitrichtung enthält.

mehrfach um das Gitter winden und zu höheren Potenzen von \mathcal{P} und \mathcal{P}^* führen. Es können aber nur die Potenzen \mathcal{P}^{2n+1} und \mathcal{P}^{*2n} mit $n \in \mathbb{N}_0$ auftreten, da die anderen in der Summe über die Zentrumselemente herausfallen.

5.6.1 Die Proportionalitätsfaktoren

In diesem Abschnitt werden die Proportionalitätsfaktoren C_l für die kleinsten Werte von m analytisch bestimmt. Durch den Faktor $d \cdot \delta_{xx}$ treten für alle Werte von m gerade Loops auf, die mit einem Faktor d^m multipliziert werden. Das Problem, m Faktoren auf $N_t + 1$ Gitterpunkte zu verteilen – bei N_t Links und periodischen Randbedingungen gibt es $N_t + 1$ Punkte – entspricht dem kombinatorischen Problem *Ziehen mit Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge*, da ein Gitterpunkt mehrfach besetzt werden kann. Um k Objekte aus einer n -elementigen Menge mit Zurücklegen zu ziehen, gibt es

$$\binom{n-1+k}{k} = \frac{(n-1+k)!}{k!(n-1)!} \quad \text{Möglichkeiten [75].}$$

Damit ist der Beitrag der geraden Loops in $\Sigma^{(l)}$

$$d^m \cdot \binom{N_t+m}{m} = d^m \frac{(N_t+m)!}{m!N_t!}. \quad (5.9)$$

Der Faktor für $m = 1$

Es treten nur gerade Loops auf, der Proportionalitätsfaktor ist

$$C_{N_t+1} = d \cdot \binom{N_t+1}{1} = d(N_t+1).$$

Der Faktor für $m = 2$

Die geraden Loops liefern einen Beitrag von

$$C_{N_t+2}^g = d^2 \cdot \binom{N_t+2}{2} = d^2 \frac{(N_t+2)(N_t+1)}{2}.$$

Weitere Beiträge kommen von dicken Loops mit zwei zusätzlichen Linkvariablen. Ein solcher dicker Loop enthält zwei *Kinks*, dies führt zu einem Faktor $1/4$ im Vergleich zum geraden Loop (vgl. [76]). Die Anzahl der dicken Loops läßt sich kombinatorisch bestimmen. Man verteilt die beiden zusätzlichen Schritte in Raumrichtung auf $N_t + 1$ Punkte nach dem Prinzip *Ziehen ohne Zurücklegen*, da Wege mit Spikes – d. h. reduzierbare Wege – wegen $(1 + \gamma_\mu)(1 - \gamma_\mu) = 0$ nicht auftreten können. Das ergibt

$$\frac{(N_t+1)!}{2!(N_t-1)!} = \frac{(N_t+1)N_t}{2} \quad \text{Möglichkeiten.}$$

Allerdings ist ein reduzierbarer Weg dabei, dieser tritt wegen der periodischen Randbedingungen auf, wenn die zusätzlichen Links am ersten und am letzten Gitterpunkt eingesetzt werden. Es kommt ein Faktor $2(d-1)$ hinzu, weil der dicke Link vorwärts und rückwärts in jeder Raumrichtung eingebaut werden kann.

Damit ergibt sich als Beitrag der dicken Loops zum Proportionalitätsfaktor

$$C_{N_t+2}^d = \frac{1}{4}(d-1)[(N_t+1)N_t - 2] \quad (5.10)$$

und insgesamt

$$C_{N_t+2} = C_{N_t+2}^g + C_{N_t+2}^d = d^2 \frac{(N_t+2)(N_t+1)}{2} + \frac{1}{4}(d-1)[(N_t+1)N_t - 2].$$

Diese Ergebnisse werden im nächsten Kapitel mehrfach benötigt.

6 Spektrale Summen als Ordnungsparameter für Confinement

Gerade Linien sind gottlos.
Friedensreich Hundertwasser

Das größte Problem an der Darstellung

$$\mathcal{P} = \frac{1}{\varkappa} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} z_k^* \operatorname{tr} z_k \mathfrak{D}^{N_t}, \quad \varkappa = (-)^{N_t} 2^{\lfloor d/2 \rfloor - 1} N_s^{d-1} N_t \mathcal{N}$$

des Polyakov-Loops ist, daß sie wesentlich durch den ultravioletten Teil des Spektrums bestimmt wird. Dies ist in Hinblick auf den Übergang ins Kontinuum sehr schwierig und bringt außerdem numerische Probleme mit sich. In diesem Kapitel werden deshalb allgemeine spektrale Summen der Art

$$\mathcal{S}_n(f) = \frac{1}{\varkappa} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} z_k^* \sum_{p=1}^n f(z_k \lambda_p)$$

betrachtet. Gatringers Ergebnis erhält man für $f(\lambda) = \lambda^{N_t}$. Aufsummieren aller Eigenwerte macht aus der Summe über p eine Spur, so daß

$$\mathcal{S}(f) = \frac{1}{\varkappa} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} z_k^* \operatorname{tr} f(z_k \mathfrak{D}).$$

Definiert man $z^f(\mathfrak{D}) = f(z \mathfrak{D})$ für ein beliebiges Zentrumselement z und benutzt $z z^* = 1$, erhält man nach Umbenennen des Summationsindex für das Verhalten der spektralen Summe unter einer Zentrumstransformation

$$\mathcal{S}(z^f) = z \cdot \frac{1}{\varkappa} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} z^* z_k^* \operatorname{tr} f(z z_k \mathfrak{D}) = z \cdot \mathcal{S}(f).$$

Das bedeutet, daß sich *jede* nichtverschwindende spektrale Summe unter Zentrumstransformationen wie der Polyakov-Loop transformiert und deshalb ebenfalls als Ordnungsparameter geeignet ist.

Es ist bekannt, daß der infrarote Anteil des Spektrums am empfindlichsten auf einen Twist der Randbedingungen reagiert (vgl. [12]). Im folgenden werden verschiedene spektrale Summen betrachtet, die den ultravioletten Spektralanteil unterdrücken und nur auf den infraroten reagieren. Die betrachteten Operatoren sind nichtlokal und winden sich deshalb in Zeitrichtung mehrfach um das Gitter. Betrachtet man nur den Operator selbst, der Ansatz, der in [12] und [27] verfolgt wird, muß man sich diese Windung künstlich durch Potenzen erzeugen.

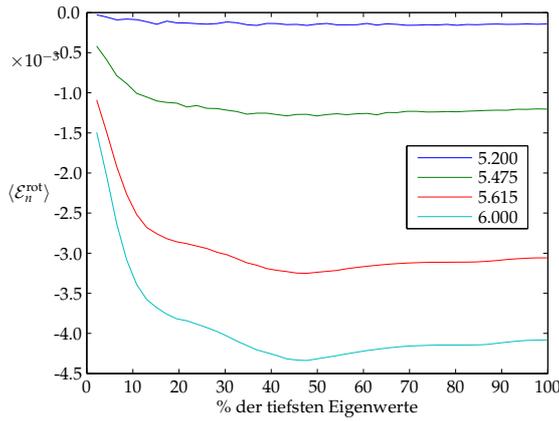


Abbildung 6.1: exponentielle Summe für vier verschiedene β -Werte in Abhängigkeit von der Anzahl der berücksichtigten Eigenwerte

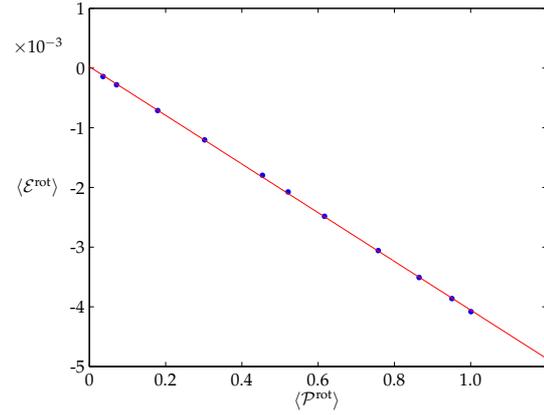


Abbildung 6.2: linearer Fit für die exponentielle Summe in Abhängigkeit vom rotierten Polyakov-Loop

6.1 Exponentielle Summe

Der erste Ordnungsparameter, der betrachtet wird, ist die *exponentielle Summe*

$$\mathcal{E} \equiv \frac{1}{\mathcal{Z}} \left[\text{tr} \exp(-\mathcal{D}) + z^* \cdot \text{tr} \exp(-z\mathcal{D}) + z \cdot \text{tr} \exp(-z^*\mathcal{D}) \right]. \quad (6.1)$$

Die Matrixexponentialfunktion ist über ihre Reihenentwicklung definiert. Im folgenden wird die Vertauschung der Summationsreihenfolge benötigt. Dies ist erlaubt, da es sich um absolut konvergente Reihen handelt.

Die trunkeierte exponentielle Summe ist durch

$$\mathcal{E}_n \equiv \frac{1}{\mathcal{Z}} \sum_k z_k^* \sum_{i=1}^n \exp(-z_k \lambda_i), \quad n \leq \dim(\mathcal{D})$$

definiert, die Eigenwerte werden aufsteigend nach ihrem Betrag sortiert.

6.1.1 Numerische Resultate

Es wurde auf einem $4^3 \times 3$ -Gitter simuliert und über 400 unabhängige Konfigurationen gemittelt. Die Werte wurden vor der Mittelwertbildung nach der Vorschrift aus Abschnitt 4.3.2 in den fundamentalen Bereich gedreht. Die exponentielle Summe wurde für die 11 Werte des Polyakov-Loops, die in Tabelle 5.2 auf Seite 50 angegeben sind, ausgewertet. Dabei ist folgendes zu beobachten:

1. Der Hauptbeitrag zur exponentiellen Summe wird von den Infrarot-Moden getragen, der Endwert in Abhängigkeit vom zugehörigen β -Wert stellt sich schnell ein (siehe Abb. 6.1).

2. Die Summe (6.1) ist in guter Näherung proportional zum Polyakov-Loop (siehe Abb. 6.2). Ein linearer Fit liefert

$$\langle \mathcal{E}^{\text{rot}} \rangle = -4,078 \cdot 10^{-3} \langle \mathcal{P}^{\text{rot}} \rangle + 2,346 \cdot 10^{-5} \quad (\text{rmse} = 1,82 \cdot 10^{-5}).$$

6.1.2 Analytische Resultate

Die Potenzreihe der exponentiellen Summe ist durch

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varkappa} \sum_k z_k^* \text{tr} \exp(-z_k \mathfrak{D}) \\ &= \frac{(-)^{N_t}}{\varkappa} \left[\frac{1}{N_t!} \sum_k z_k^* \text{tr} z_k \mathfrak{D}^{N_t} - \frac{1}{(N_t+1)!} \sum_k z_k^* \text{tr} z_k \mathfrak{D}^{N_t+1} \pm \dots \right] \end{aligned}$$

gegeben, da Terme $\sum_k z_k \mathfrak{D}^l$ mit $l < N_t$ nicht beitragen (vgl. Abschnitt 5.6). In der Spektral-darstellung ergibt sich

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varkappa} \sum_k z_k^* \sum_{i=1}^{\dim(\mathfrak{D})} \exp(-z_k \lambda_i) \\ &= \frac{(-)^{N_t}}{\varkappa} \left[\frac{1}{N_t!} \sum_k z_k^* \sum_{i=1}^{\dim(\mathfrak{D})} z_k \lambda_i^{N_t} - \frac{1}{(N_t+1)!} \sum_k z_k^* \sum_{i=1}^{\dim(\mathfrak{D})} z_k \lambda_i^{N_t+1} \pm \dots \right] \\ &= (-)^{N_t} \left[\frac{1}{N_t!} \Sigma^{(N_t)} - \frac{1}{(N_t+1)!} \Sigma^{(N_t+1)} \pm \dots \right]. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Die Proportionalität zwischen exponentieller Summe und Polyakov-Loop ist eine Folge der Proportionalität zwischen $\Sigma^{(l)}$ und dem Polyakov-Loop (vgl. Abschnitt 5.6).

Der Beitrag des Polyakov-Loops zum numerisch beobachteten Proportionalitätsfaktor

Setzt man die Vorfaktoren (5.9) aus Abschnitt 5.6 in die Reihenentwicklung (6.2) ein und sortiert in der Reihe um, erhält man die Entwicklung der exponentiellen Summe in Potenzen des Polyakov-Loops:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varkappa} \sum_k z_k^* \sum_{i=1}^{\dim(\mathfrak{D})} \exp(-z_k \lambda_i) \\ &= \frac{(-)^{N_t}}{N_t!} \left(1 - d \frac{N_t!(N_t+1)!}{1!N_t!(N_t+1)!} + d^2 \frac{N_t!(N_t+2)!}{2!N_t!(N_t+2)!} \mp \dots \right) \cdot \mathcal{P} + \dots \\ &= \frac{(-)^{N_t}}{N_t!} \left(1 - d + \frac{1}{2!} d^2 \mp \dots \right) \cdot \mathcal{P} + \dots = \frac{(-)^{N_t}}{N_t!} e^{-d} \cdot \mathcal{P} + \dots \end{aligned} \quad (6.3)$$

Dicke Loops und höhere Potenzen des Polyakov-Loops sind nicht explizit ausgeschrieben.

Für das $4^3 \times 3$ -Gitter ergibt sich ein Faktor von $e^{-4}/3! = 3,05 \cdot 10^{-3}$. Dies ist in guter Übereinstimmung mit dem numerisch bestimmten Proportionalitätsfaktor von $4,078 \cdot 10^{-3}$.

Der Beitrag der dicken Loops in der Reihenentwicklung

Eine analoge Argumentation wie im vorherigen Abschnitt kann man für die dicken Loops durchführen. Ein dicker Loop \mathcal{F}_k der Länge $N_t + k$ trägt in der Potenz $m = k + l$ durch die l Faktoren $d \cdot \delta_{xx}$ den Faktor

$$d^l \binom{N_t + k + l}{l} = d^l \cdot \frac{(N_t + k + l)!}{l!(N_t + k)!}$$

bei. Damit ist der Beitrag eines dicken Loops in der Entwicklung (6.2) der Exponentialfunktion nach Umsortieren und Abseparieren des globalen Faktors $1/N_t!$

$$\frac{1}{(N_t + 1) \dots (N_t + k)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-d)^l}{l!} = \frac{e^{-d}}{(N_t + 1) \dots (N_t + k)}. \quad (6.4)$$

Für $k = 2$ läßt sich die Anzahl der auftretenden Loops \mathcal{F}_2 und ihre Vorfaktoren durch die Spur über die γ -Matrizen explizit durch kombinatorische Überlegungen bestimmen. Nach Gleichung (5.10) auf Seite 55 ergibt sich

$$\frac{1}{4}(d-1)[(N_t+1)N_t-2] = \frac{1}{4}(d-1)[(N_t+1)(N_t+2)-2(N_t+2)].$$

Zusammen mit Gleichung (6.4) und dem globalen Faktor $1/N_t!$ ergibt sich in der Entwicklung der Exponentialfunktion ein Beitrag von

$$\frac{1}{N_t!} \frac{d-1}{4} \frac{(N_t+1)(N_t+2)-2(N_t+2)}{(N_t+1)(N_t+2)} e^{-d} \stackrel{d=4}{\approx} 0,0137 \cdot \left(1 - \frac{2}{N_t+1}\right) \frac{1}{N_t!}. \quad (6.5)$$

Für das $4^3 \times 3$ -Gitter ergibt sich damit als Beginn der Reihenentwicklung

$$\mathcal{E} = -3,05 \cdot 10^{-3} \cdot \mathcal{P} - 1,14 \cdot 10^{-3} \cdot \mathcal{F}_2 + \dots$$

Für $k > 2$ ist es schwierig abzuschätzen, wieviele dicke Loops auftreten und wie groß ihr Beitrag durch die zusätzlichen räumlichen Links ist. Die längeren Loops werden durch den Faktor $(N_t + k)!$ aus der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion unterdrückt. Es ist allerdings möglich, daß die Anzahl an langen Loops für große Gitter stärker zunimmt, als durch den Vorfaktor kompensiert werden kann. Die gute Proportionalität, die auf dem $4^3 \times 3$ -Gitter zu beobachten ist, deutet aber darauf hin, daß der Beitrag der dicken Loops nicht so gravierend ist.

Bemerkung zum Vorzeichen der einzelnen Summanden

Schreibt man die Funktion $e^{-\lambda}$ explizit aus, erhält man

$$\sum_{\lambda} e^{-\lambda} = 2 \sum_{\Re\lambda, |\Im\lambda|} e^{-\Re\lambda} \cos(\Im\lambda),$$

da mit λ auch λ^* ein Eigenwert ist. Der Kosinus ist für die tiefsten Eigenwerte positiv und liegt in der Nähe von eins, so daß der Beitrag des Realteils nicht wesentlich modifiziert wird. Für $\Im\lambda > \pi/2$ wird der Kosinus negativ, dies führt zu einem Vorzeichenwechsel einiger Summanden in \mathcal{E}_n . Dies liefert eine Erklärung für den nichtmonotonen Verlauf der Kurven in Abbildung 6.1.

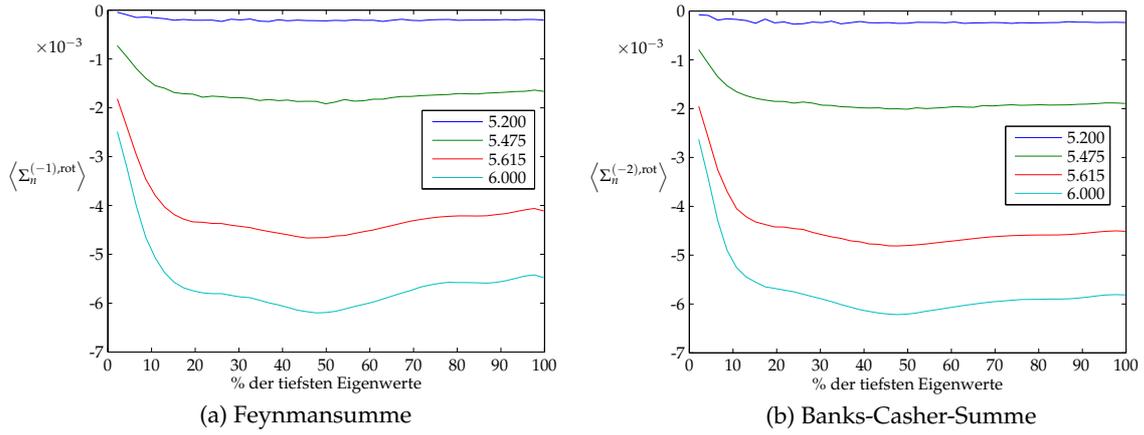


Abbildung 6.3: Inverse Potenzfunktionen für vier verschiedene Werte von β in Abhängigkeit von der Anzahl der berücksichtigten Eigenwerte. In der linken Abbildung ist die Feynman-Summe $\Sigma_n^{(-1)}$ aufgetragen, in der rechten Abbildung die Banks-Casher-Summe $\Sigma_n^{(-2)}$.

6.2 Inverse Potenzfunktionen

Ein weiterer möglicher Ordnungsparameter ist durch die Abbildung

$$\Sigma^{(-l)} \equiv \frac{1}{\mathcal{Z}} \left[\text{tr } \mathcal{D}^{-l} + z^* \cdot \text{tr } z \mathcal{D}^{-l} + z \cdot \text{tr } z^* \mathcal{D}^{-l} \right] \quad (6.6)$$

gegeben. Interessant sind hier insbesondere die Potenzen $l = 1$ und $l = 2$, da sie mit dem Feynman-Propagator bzw. der Banks-Casher-Relation zusammenhängen (vgl. Abschnitt 3.1.3 bzw. 4.4). Im folgenden wird $\Sigma^{(-1)}$ als *Feynman-Summe* und $\Sigma^{(-2)}$ als *Banks-Casher-Summe* bezeichnet.

Die trunkierte Summe ist als

$$\Sigma_n^{(-l)} \equiv \frac{1}{\mathcal{Z}} \left[\sum_k z_k^* \sum_{i=1}^n z_k \lambda_i^{-l} \right], \quad n \leq \dim(\mathcal{D})$$

definiert. Die Eigenwerte werden aufsteigend nach ihrem Betrag sortiert.

6.2.1 Numerische Resultate

Es wurde wieder auf einem $4^3 \times 3$ -Gitter simuliert und über 400 Konfigurationen gemittelt. Die Werte wurden vor der Mittelwertbildung nach der Vorschrift aus Abschnitt 4.3.2 in den fundamentalen Bereich gedreht. Dabei ist folgendes zu beobachten:

1. $\Sigma_n^{(-l)}$ mit $l = 1, 2$ aufgetragen über der Anzahl der berücksichtigten Eigenwerte zeigt am Anfang einen steilen Abfall und erreicht schnell seinen asymptotischen Wert in Abhängigkeit vom zugehörigen β -Wert (vgl. Abb. 6.3).

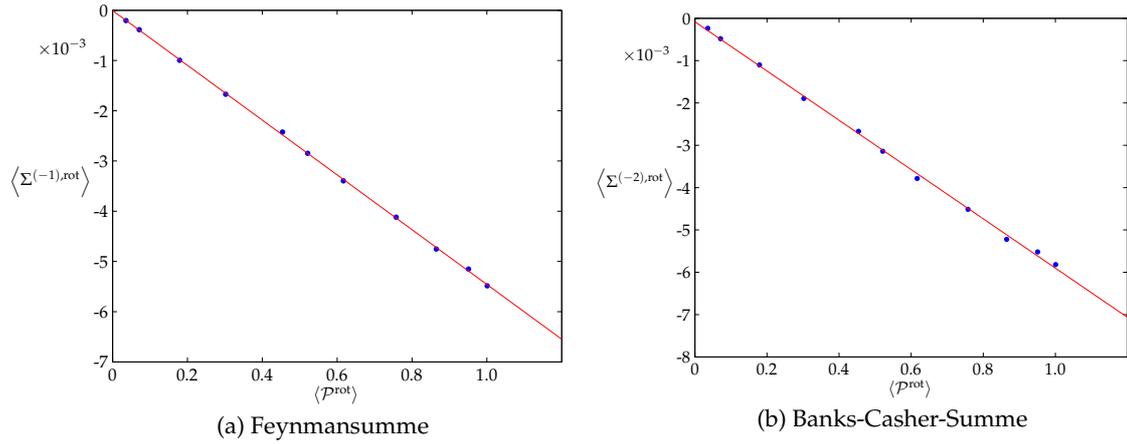


Abbildung 6.4: Linearer Fit für die inversen Potenzfunktionen in Abhängigkeit vom rotierten Polyakov-Loop. In der linken Abbildung ist die Feynmansumme aufgetragen, in der rechten Abbildung die Banks-Casher-Summe.

2. Für $l = 1$ ist eine sehr gute Proportionalität zum Polyakov-Loop zu erkennen (Abb. 6.4 (a)), für $l = 2$ wird die Proportionalität etwas schlechter, ist aber nach wie vor deutlich zu erkennen (Abb. 6.4 (b)). Ein linearer Fit liefert für die Feynmansumme

$$\langle \Sigma^{(-1),\text{rot}} \rangle = -5,45 \cdot 10^{-3} \cdot \langle \mathcal{P}^{\text{rot}} \rangle - 4,379 \cdot 10^{-6} \quad (\text{rmse} = 2,978 \cdot 10^{-5})$$

und für die Banks-Casher-Summe

$$\langle \Sigma^{(-2),\text{rot}} \rangle = -5,82 \cdot 10^{-3} \cdot \langle \mathcal{P}^{\text{rot}} \rangle - 8,035 \cdot 10^{-5} \quad (\text{rmse} = 7,645 \cdot 10^{-5}).$$

6.2.2 Analytische Resultate für die Feynmansumme

Ziel dieses Abschnitts ist eine Darstellung der Feynmansumme als „Summe über Wege beliebiger Länge“. In einer solchen Darstellung treten als Summanden nur diejenigen $\Sigma^{(N_i+k)}$ auf, die Anteile proportional zum Polyakov-Loop enthalten (vgl. Abschnitt 6.1).

Hoppingparameterentwicklung des Propagators

Die Fermionmatrix \mathfrak{M} , die in der Hoppingparameterentwicklung verwendet wird, ist

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{D}}{d} = \mathbb{1} - \left(\mathbb{1} - \frac{\mathfrak{D}}{d} \right).$$

Die Neumann-Reihe von \mathfrak{M}^{-1} existiert, denn es gilt $\|\mathbb{1} - \mathfrak{D}/d\| < 1$, da das Spektrum von \mathfrak{D} zwischen 0 und $2d$ liegt. Die Neumann-Reihe von \mathfrak{M}^{-1} ist

$$\mathfrak{M}^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\mathbb{1} - \frac{\mathfrak{D}}{d} \right)^l.$$

Einsetzen der Neumann-Reihe in Gleichung (6.6) ergibt

$$\begin{aligned}\Sigma^{(-1)} &= \frac{1}{d \cdot \varkappa} \left[\text{tr } \mathfrak{M}^{-1} + z^* \cdot \text{tr } {}^z \mathfrak{M}^{-1} + z \cdot \text{tr } {}^{z^*} \mathfrak{M}^{-1} \right] \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{d \cdot \varkappa} \left[\text{tr} \left(\mathbb{1} - \frac{\mathfrak{D}}{d} \right)^l + z^* \cdot \text{tr} \left(\mathbb{1} - \frac{{}^z \mathfrak{D}}{d} \right)^l + z \cdot \text{tr} \left(\mathbb{1} - \frac{{}^{z^*} \mathfrak{D}}{d} \right)^l \right].\end{aligned}$$

Die Summanden mit $l < N_t$ verschwinden, da nur Wilson-Loops auftreten. Der Summand mit $l = N_t$ ist

$$\frac{(-)^{N_t}}{d^{N_t+1}} \cdot \mathcal{P}.$$

In den Summanden mit $l > N_t$ treten keine geraden Loops mehr auf, sondern nur dicke Loops und höhere Potenzen von \mathcal{P} bzw. \mathcal{P}^* , da $(\mathbb{1} - \mathfrak{D}/d)$ im masselosen Fall nur nächste Nachbarwechselwirkungen enthält. Deshalb liefert der Summand mit $l = N_t + 1$ keinen Beitrag, da er keine geschlossenen Loops enthält. Der Summand mit $l = N_t + 2$ liefert

$$\frac{(-)^{N_t} d - 1}{d^{N_t+3}} \frac{d - 1}{4} [(N_t + 1)N_t - 2] \cdot \mathcal{F}_2,$$

wobei \mathcal{F}_2 den dicken Loop der Länge $N_t + 2$ bezeichnet. Die Reihenentwicklung ergibt damit

$$\Sigma^{(-1)} = \frac{(-)^{N_t}}{d^{N_t+1}} \cdot \mathcal{P} + \frac{(-)^{N_t} d - 1}{d^{N_t+3}} \frac{d - 1}{4} [(N_t + 1)N_t - 2] \cdot \mathcal{F}_2 + \dots$$

Für das $4^3 \times 3$ -Gitter mit $d = 4$ und $N_t = 3$ erhält man

$$\Sigma^{(-1)} \approx -3,90 \cdot 10^{-3} \cdot \mathcal{P} - 1,83 \cdot 10^{-3} \cdot \mathcal{F}_2 + \dots$$

Dieser Proportionalitätsfaktor von $3,90 \cdot 10^{-3}$ ist in guter Übereinstimmung mit dem numerisch bestimmten von $5,45 \cdot 10^{-3}$.

6.2.3 Analytische Resultate für die Banks-Casher-Summe

Für die Banks-Casher-Summe existiert keine Neumann-Reihe, da

$$\left\| \mathbb{1} - \frac{\mathfrak{D}^2}{d^2} \right\| < 1$$

nicht erfüllt ist. Eine analytische Abschätzung wie im Fall der Feynmansumme ist also nicht möglich.

6.3 Gaußsche Summe

Ein weiterer möglicher Ordnungsparameter ist die *gaußsche Summe*

$$\mathcal{G} \equiv \frac{1}{\varkappa} \left[\text{tr } \exp(-\mathfrak{D}\mathfrak{D}^\dagger) + z^* \cdot \text{tr } \exp(-{}^z \mathfrak{D}^z \mathfrak{D}^\dagger) + z \cdot \text{tr } \exp(-{}^{z^*} \mathfrak{D} {}^{z^*} \mathfrak{D}^\dagger) \right]. \quad (6.7)$$

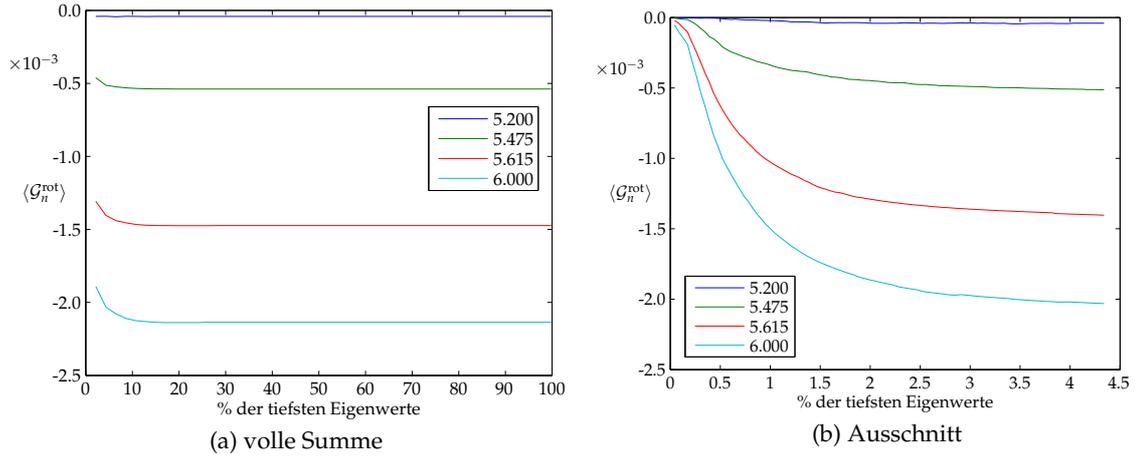


Abbildung 6.5: gaußsche Summe für vier verschiedene Werte von β in Abhängigkeit von der Anzahl der berücksichtigten Eigenwerte

Diese Größe ist interessant, weil $\exp(-\mathfrak{D}\mathfrak{D}^\dagger)$ in der *Heat-Kernel-Regularisierung* der fermionischen Determinante benutzt wird [5].

Die trunkierte gaußsche Summe in Spektraldarstellung ist durch

$$\mathcal{G}_n \equiv \frac{1}{\mathcal{Z}} \left[\sum_{i=1}^n \exp(-|\lambda_i|^2) + z^* \cdot \sum_{i=1}^n \exp(-|z^k \lambda_i|^2) + z \cdot \sum_{i=1}^n \exp(-|z^{*k} \lambda_i|^2) \right]$$

gegeben. Die Eigenwerte werden aufsteigend nach ihrem Betrag sortiert.

6.3.1 Numerische Resultate

Auch für die gaußsche Summe ist auf dem $4^3 \times 3$ -Gitter eine Proportionalität zum Polyakov-Loop zu beobachten. Es wurde wieder über 400 Konfigurationen gemittelt. Vor der Mittelwertbildung wurden die Werte in den fundamentalen Bereich gedreht. Es ist folgendes zu beobachten:

1. Die Kurven \mathcal{G}_n zeigen anfangs einen steilen Abfall und erreichen sehr schnell ihren Endwert in Abhängigkeit vom zugehörigen β -Wert, es bildet sich ein sehr stabiles Plateau aus (vgl. Abb. 6.5).
2. Für die gaußsche Summe ist allerdings kein linearer, sondern ein quadratischer Zusammenhang zum Polyakov-Loop zu erkennen. Ein quadratischer Fit (vgl. Abb. 6.6) ergibt

$$\langle \mathcal{G}^{\text{rot}} \rangle = -5,711 \cdot 10^{-4} \cdot \langle (\mathcal{P}^{\text{rot}})^2 \rangle - 1,56 \cdot 10^{-3} \cdot \langle \mathcal{P}^{\text{rot}} \rangle + 1,061 \cdot 10^{-5}$$

(rmse = $1,453 \cdot 10^{-5}$)

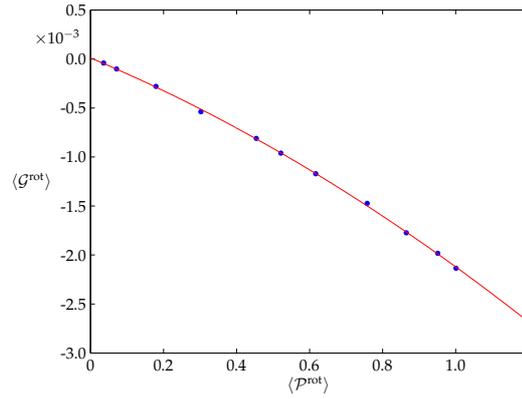


Abbildung 6.6: quadratischer Fit für die gaußsche Summe in Abhängigkeit vom rotierten Polyakov-Loop

6.3.2 Analytische Resultate

Für die gaußsche Summe ist die Argumentation schwieriger als für die exponentielle Summe, da der Operator $\mathfrak{D}\mathfrak{D}^\dagger$ Wechselwirkungen sowohl zwischen nächsten als auch zwischen übernächsten Nachbarn enthält. Die Wechselwirkungen zwischen übernächsten Nachbarn treten aber nur als *Kinks* auf, d. h. als Terme der Form $\mathfrak{U}_\mu \mathfrak{U}_\nu$ mit $\mu \neq \nu$. In der Entwicklung von Gleichung (6.7) tragen deshalb wieder nur Potenzen $k \geq N_t$ bei. Im Unterschied zu Abschnitt 6.1 treten aber in $(\mathfrak{D}\mathfrak{D}^\dagger)^k$ zusätzlich auch *Spikes* auf, also Terme der Form $\mathfrak{U}_\mu \mathfrak{U}_\mu^\dagger$, wie in der Wegedarstellung unten zu erkennen ist.

„Wegedarstellung“ von $\mathfrak{D}\mathfrak{D}^\dagger$

Für verschwindende Masse ergibt sich unter Verwendung der Darstellung (5.1)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}\mathfrak{D}^\dagger(x|y) &= d(d+1)\delta_{x,y} - \frac{d}{2} \sum_{\mu=1}^d [1 - \gamma_\mu] \left[\mathfrak{U}_\mu(x)\delta_{x+e_\mu,y} + \mathfrak{U}_\mu^\dagger(x+e_\mu)\delta_{x-e_\mu,y} \right] \\
&\quad - \frac{d}{2} \sum_{\mu=1}^d [1 + \gamma_\mu] \left[\mathfrak{U}_\mu^\dagger(x+e_\mu)\delta_{x+e_\mu,y} + \mathfrak{U}_\mu(x)\delta_{x-e_\mu,y} \right] \\
&\quad + \frac{1}{4} \sum_{\mu \neq \nu} [1 - \gamma_\mu] [1 - \gamma_\nu] \mathfrak{U}_\mu(x)\mathfrak{U}_\nu^\dagger(x+e_\nu)\delta_{x-e_\mu-e_\nu,y} \\
&\quad + \frac{1}{4} \sum_{\mu \neq \nu} [1 - \gamma_\mu] [1 + \gamma_\nu] \mathfrak{U}_\mu(x)\mathfrak{U}_\nu(x)\delta_{x-e_\mu+e_\nu,y} \\
&\quad + \frac{1}{4} \sum_{\mu \neq \nu} [1 + \gamma_\mu] [1 - \gamma_\nu] \mathfrak{U}_\mu^\dagger(x+e_\mu)\mathfrak{U}_\nu^\dagger(x+e_\nu)\delta_{x+e_\mu+e_\nu,y} \\
&\quad + \frac{1}{4} \sum_{\mu \neq \nu} [1 + \gamma_\mu] [1 + \gamma_\nu] \mathfrak{U}_\mu^\dagger(x+e_\mu)\mathfrak{U}_\nu(x)\delta_{x+e_\mu-e_\nu,y}.
\end{aligned}$$

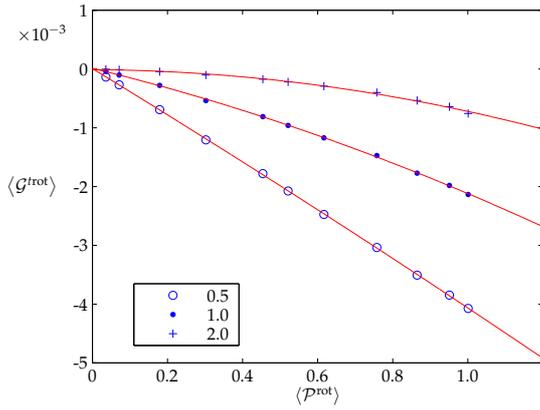


Abbildung 6.7: gaußsche Summe in Abhängigkeit vom rotierten Polyakov-Loop für drei verschiedene Dämpfungsfaktoren

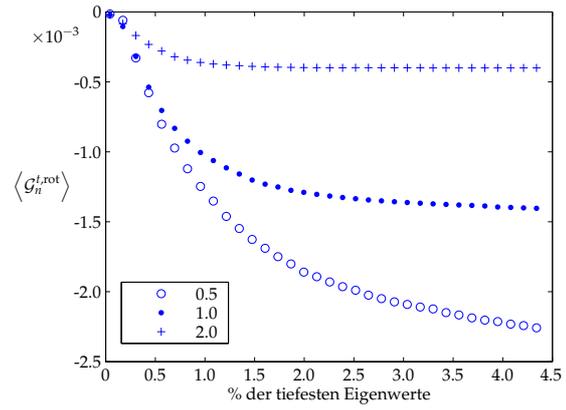


Abbildung 6.8: trunkierte gaußsche Summe für drei verschiedene Dämpfungsfaktoren, $\beta = 5,615$, $4^3 \times 3$ -Gitter

Beitrag des Polyakov-Loops in der Reihenentwicklung

Durch die Spikes gibt es zu viele Möglichkeiten, Polyakov-Loops zu bilden, als daß sich ihr Beitrag noch einfach kombinatorisch abschätzen ließe. Die leicht quadratische Abhängigkeit – der lineare Term ist um einen Faktor 2 größer als der quadratische – ist deshalb nicht quantitativ zu belegen. Vermutlich treten durch die Spikes so viele Möglichkeiten auch für längere Loops auf, daß die Dämpfung nicht mehr stark genug ist, um diese Beiträge zu unterdrücken.

6.3.3 Einführen eines Dämpfungsfaktors

Führt man im Exponenten einen Dämpfungsfaktor t ein, erhält man

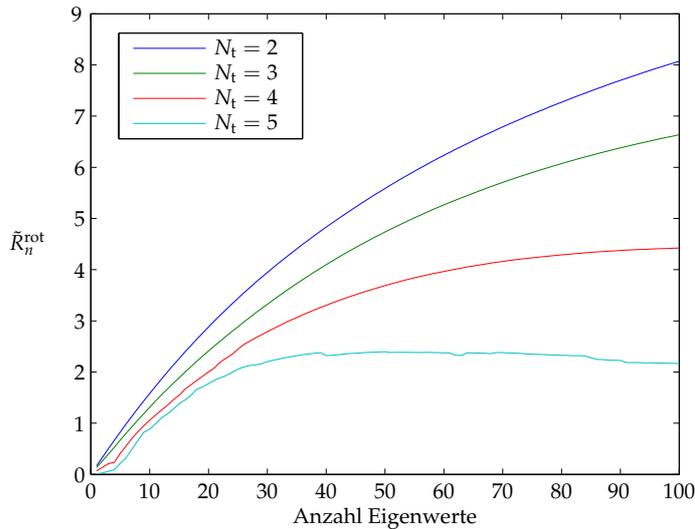
$$\mathcal{G}^t \equiv \frac{1}{\varkappa} \sum_k z_k^* \text{tr} \exp(-t \cdot z_k \mathcal{D}^k \mathcal{D}^\dagger).$$

Die Proportionalität zum Polyakov-Loop wird besser, wenn der Faktor kleiner als eins ist (vgl. Abb. 6.7), da in diesem Fall die Beiträge der dicken Loops und der höheren Potenzen unterdrückt werden. Allerdings erreicht die trunkierte gaußsche Summe langsamer ihren asymptotischen Wert (vgl. Abb. 6.8). Wählt man den Faktor hingegen größer als eins, verschlechtert sich die Proportionalität, da die dicken Loops und höhere Potenzen weniger stark unterdrückt werden. Allerdings wird der asymptotische Wert früher erreicht, weil die größeren Eigenwerte stärker gedämpft werden.

6.3.4 Skalierung mit dem zeitlichen Volumen

Für das Skalierungsverhalten der gaußschen Summe mit dem zeitlichen Volumen auf einem $6^3 \times N_t$ -Gitter wird die Größe

$$\tilde{R}_n^{\text{rot}} \equiv \frac{\varkappa \cdot \mathcal{G}_n^{\text{rot}}}{\mathcal{P}}$$



N_t	$\langle \mathfrak{g}^{\text{rot}} \rangle$	$\dim(\mathfrak{D})$
2	1,9474	5184
3	1,4019	7776
4	0,932245	10368
5	0,523142	12960

Abbildung 6.9: Reskalierte gaußsche Summe für verschiedene zeitliche Gittergrößen. Die Tabelle zeigt die zugehörigen Werte des rotierten Polyakov-Loops und die Anzahl der Eigenwerte des Dirac-Operators.

betrachtet. Die gaußsche Summe wird mit dem extensiven Faktor \varkappa reskaliert, weil nur ein geringer Anteil der Eigenwerte berücksichtigt wird und zudem das Springen des Vorzeichens verhindert werden soll. In Abbildung 6.9 ist \tilde{R}_n^{rot} in Abhängigkeit von der Anzahl der berücksichtigten Eigenwerte aufgetragen. Es wurde über 100 unabhängige Konfigurationen gemittelt und bei $\beta = 6,5$ simuliert. Es sind die betragsmäßig kleinsten 100 Eigenwerte berücksichtigt, dies entspricht auf dem $6^3 \times 2$ -Gitter etwa 2% und auf dem $6^3 \times 5$ -Gitter etwa 0,8% der Eigenwerte.

In Abbildung 6.9 ist deutlich zu erkennen, daß mit Vergrößerung der zeitlichen Ausdehnung der asymptotische Wert immer früher erreicht wird. Ein Problem in Hinblick auf den Kontinuumsimes könnte allerdings sein, daß die Größe $\tilde{R}_n^{\text{rot}}(N_t)$ umso kleiner wird, je größer N_t wird. Dies kann eventuell durch eine geeignete Normierung kompensiert werden, dieser Möglichkeit wurde aber in dieser Arbeit nicht weiter nachgegangen.

6.4 Zusammenfassung der Ergebnisse

Das nächste Kapitel betrachtet die hier vorgestellten spektralen Summen für einfache Eichfeldkonfigurationen im Kontinuum, deshalb ist es an dieser Stelle angebracht, ein Fazit über die bisherigen Ergebnisse auf dem Gitter zu ziehen. Es wurden in diesem Kapitel spektrale Funktionen des Dirac-Wilson-Operators betrachtet, die so konstruiert sind, daß sie Ordnungsparameter für den Confined-Deconfined-Phasenübergang sind und ihren Hauptbeitrag vom infraroten Anteil des Spektrums bekommen. Alle diese spektralen Summen sind für die betrachteten Gittergrößen in guter Näherung proportional zum Polyakov-Loop.

Für numerische Untersuchungen ist die gaußsche Summe am besten geeignet, weil sie

die hohen Eigenwerte stark unterdrückt und sehr schnell konvergiert. Schon bei Berücksichtigung von wenigen Prozent der Eigenwerte erreicht sie ihren Endwert. Dieses Verhalten scheint sich mit wachsender zeitlicher Gittergröße sogar noch zu verbessern.

Für die Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Confinement und chiraler Symmetriebrechung sind jedoch die Feynmansumme und die Banks-Casher-Summe interessanter, weil sie den Polyakov-Loop mit der Banks-Casher-Relation in Verbindung bringen.

Veröffentlichungen, welche die hier vorgestellten Ergebnisse aufgreifen, sind [11, 38, 81].

7 Spektrale Summen auf dem Torus im Kontinuum

A long nightmare of classical special function theory allows us to transform this expression into ...

T. H. Boyer, Ann. Phys. (NY) 56, 486

Dieses Kapitel erweitert die Ergebnisse der vorherigen Kapitel für eine spezielle Eichfeldkonfiguration auf die Kontinuumstheorie. Es wird gezeigt, wie sich die gaußsche Summe, die Feynmansumme sowie die Banks-Casher-Summe analytisch durch eine Reihe in Potenzen des Polyakov-Loops und des komplex konjugierten Polyakov-Loops ausdrücken lassen. Hierdurch wird explizit eine Beziehung zwischen dem Ordnungsparameter für den Confinement-Deconfinement-Übergang – dem Polyakov-Loop – und dem Propagator hergestellt, der in die Banks-Casher-Relation eingeht und damit für die chirale Symmetriebrechung von Bedeutung ist.

Der Dirac-Operator in diesem Abschnitt ist als

$$\mathfrak{D} \equiv i\gamma^\mu (\partial_\mu - ig_0 \mathfrak{A}_\mu) \quad (7.1)$$

mit euklidischen, hermiteschen γ -Matrizen (vgl. Abschnitt 2.5) definiert, dies folgt der Konvention in [39]. Er ist mit dieser Definition hermitesch. In zwei Dimensionen hat die Kopplungskonstante g_0 die Einheit $[\text{Länge}]^{-1}$, das \mathfrak{A} -Feld ist dimensionslos. In vier Dimensionen ist die Kopplungskonstante g_0 dimensionslos und das \mathfrak{A} -Feld hat die Dimension $[\text{Länge}]^{-1}$ (s. Anhang A.3).

7.1 Gaußsche Summe in zwei Dimensionen – SU(2)

Betrachtet wird ein zweidimensionaler Torus mit Ausdehnung β in Zeitrichtung und Ausdehnung L in Raumrichtung. Für die Felder werden periodische Randbedingungen

$$\psi(x_0 + \beta, x_1) = \psi(x_0, x_1), \quad \psi(x_0, x_1 + L) = \psi(x_0, x_1)$$

angenommen und es wird die spezielle Feldkonfiguration

$$\mathfrak{A}_0 = \alpha\sigma_3 \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}_1 = 0,$$

bzw. getwistet mit Zentrumselement

$${}^z\mathfrak{A}_0 = \alpha\sigma_3 + \frac{\pi}{\beta g_0}\sigma_3 \quad \text{und} \quad {}^z\mathfrak{A}_1 = 0$$

der Eichgruppe $SU(2)$ betrachtet. Der Parameter α ist in zwei Dimensionen dimensionslos. Der zugehörige Polyakov-Loop hat den Wert

$$\mathcal{P} = \text{tr} \mathcal{P} \exp \left[ig_0 \int_0^\beta \mathfrak{A}_0 dx^0 \right] = \text{tr} \exp \left[ig_0 \int_0^\beta \alpha \sigma_3 dx^0 \right] = \text{tr} e^{i\alpha g_0 \sigma_3 \beta} = 2 \cos(\alpha g_0 \beta),$$

bzw.

$${}^z\mathcal{P} = \text{tr} \mathcal{P} \exp \left[ig_0 \int_0^\beta \left(\alpha + \frac{\pi}{\beta g_0} \right) \sigma_3 dx^0 \right] = \text{tr} e^{i(\alpha g_0 \beta + \pi) \sigma_3} = -2 \cos(\alpha g_0 \beta).$$

Das zu lösende Eigenwertproblem ist

$$\mathfrak{D} \psi = \left(i\gamma^0 (\partial_0 - i\alpha g_0 \sigma_3) + i\gamma^1 \partial_1 \right) \psi = \lambda \psi.$$

Das \mathfrak{A}_μ -Feld ist konstant und vertauscht mit der Ableitung, die betrachtete Eichfeldkonfiguration hat eine verschwindende Feldstärke und damit keine Krümmung, d. h. es gilt $[\mathfrak{A}_\mu, \mathfrak{A}_\nu] = 0$. Daraus folgt, daß die Eigenfunktionen von \mathfrak{D} auch Eigenfunktionen von $D_\mu D^\mu$ sind. Der Dirac-Operator kann deshalb durch quadrieren diagonalisiert werden:

$$\mathfrak{D} \mathfrak{D}^\dagger \psi = \mathfrak{D}^2 \psi = \mathbb{1}_{\text{Spinor}} \otimes D_\mu D^\mu \psi = \mathbb{1}_{\text{Spinor}} \otimes \left(-(\partial_0 - i\alpha g_0 \sigma_3)^2 - \partial_1^2 \right) \psi = \lambda^2 \psi$$

Die Eigenwerte λ^2 und die zugehörigen Eigenfunktionen werden in Anhang C.3 berechnet. Die Eigenwerte sind zweifach entartet und lauten

$$\lambda(m, l)^2 = \left(\frac{2\pi}{\beta} \cdot m - \alpha g_0 \right)^2 + \left(\frac{2\pi}{L} \cdot l \right)^2, \quad l, m \in \mathbb{Z}.$$

Twisten des Eichfeldes bedeutet, αg_0 durch $\alpha g_0 + \pi/\beta$ zu ersetzen, d. h. der getwistete Operator hat die gleichen Eigenfunktionen wie der ungetwistete Operator, die Eigenwerte sind ebenfalls zweifach entartet und lauten

$${}^z\lambda(m, l)^2 = \left(\frac{2\pi}{\beta} \cdot m - \alpha g_0 - \frac{\pi}{\beta} \right)^2 + \left(\frac{2\pi}{L} \cdot l \right)^2.$$

Mit diesen Eigenwerten wird die gaußsche Summe

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \sum_i e^{-\frac{\lambda_i^2}{\Lambda^2}} - \sum_i e^{-\frac{{}^z\lambda_i^2}{\Lambda^2}} \\ &= 2 \cdot \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(2\pi \cdot l)^2}{(L\Lambda)^2}} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\left(\frac{2\pi}{\beta} \cdot m - \alpha g_0\right)^2}{\Lambda^2}} - e^{-\frac{\left(\frac{2\pi}{\beta} \cdot m - \alpha g_0 - \frac{\pi}{\beta}\right)^2}{\Lambda^2}} \right] \end{aligned} \quad (7.2)$$

gebildet. Dabei ist Λ ein Parameter, der die Dimension einer Energie hat, um einen dimensionslosen Exponenten zu erhalten. Der Faktor 2 ist der Entartungsfaktor.

7.1.1 Zusammenhang mit Theta-Funktionen

Die allgemeine Theta-Funktion ist als

$$\vartheta(z, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\pi n^2 \tau + 2\pi i n z} \quad \text{mit } z \in \mathbb{C}, \tau \in \mathbb{C}, \Im(\tau) > 0 \quad (7.3)$$

definiert [61]. Für die reellwertige Theta-Funktion mit $z = x \in \mathbb{R}$ und $\tau/i = t \in \mathbb{R}^+$ gilt die Beziehung [61, S. 33]

$$\vartheta(x, it) = t^{-1/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi(x-n)^2}{t}} = 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos(2\pi m x) e^{-\pi m^2 t}. \quad (7.4)$$

Setzt man $x = 0$ und $t = 4\pi/(L\Lambda)^2$, ergibt sich mit Gleichung (7.3) und Gleichung (7.4) für den l -abhängigen Teil von Gleichung (7.2)

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{2\pi l}{L\Lambda}\right)^2} = \vartheta\left(0, \frac{4i\pi}{(L\Lambda)^2}\right) = \frac{L\Lambda}{2\sqrt{\pi}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{l^2(L\Lambda)^2}{4}}. \quad (7.5)$$

Für den ersten Summanden des m -abhängigen Terms ergibt sich aus Gleichung (7.4) mit $x = \beta\alpha g_0/2\pi$ und $t = (\Lambda\beta)^2/4\pi$

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{2\pi}{\beta\Lambda} \cdot m - \frac{\alpha g_0}{\Lambda}\right)^2} &= \sqrt{t} \cdot \vartheta(x, it) = \frac{\Lambda\beta}{2\sqrt{\pi}} \cdot \vartheta\left(\frac{\beta\alpha g_0}{2\pi}, i \frac{4\pi}{(\Lambda\beta)^2}\right) \\ &= \frac{\Lambda\beta}{2\sqrt{\pi}} \left[1 + 2 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \cos(\beta\alpha g_0 m) e^{-\frac{(\beta\Lambda)^2}{4} m^2} \right]. \end{aligned}$$

Für den zweiten Summanden ergibt sich mit $x = \beta\alpha g_0/2\pi + 1/2$ und $t = (\Lambda\beta)^2/4\pi$

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{2\pi}{\beta\Lambda} \cdot m - \frac{\alpha g_0}{\Lambda} - \frac{\pi}{\beta\Lambda}\right)^2} &= \sqrt{t} \cdot \vartheta(x, it) = \frac{\Lambda\beta}{2\sqrt{\pi}} \cdot \vartheta\left(\frac{\beta\alpha g_0}{2\pi} + \pi, i \frac{4\pi}{(\Lambda\beta)^2}\right) \\ &= \frac{\Lambda\beta}{2\sqrt{\pi}} \left[1 + 2 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \cdot \cos(\beta\alpha g_0 m) e^{-\frac{(\beta\Lambda)^2}{4} m^2} \right]. \end{aligned}$$

Beim Zusammenfassen der beiden Summanden überleben wegen des alternierenden Vorzeichens nur die Summanden mit ungeradem $m = 2k + 1$ und es bleibt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta\Lambda}{\sqrt{\pi}} \cdot \exp\left[-(2k+1)^2 \frac{(\beta\Lambda)^2}{4}\right] \cdot 2 \cdot \cos[(2k+1)\alpha g_0 \beta]$$

übrig. Zusammen mit Gleichung (7.5) ergibt sich damit für die gaußsche Summe

$$\mathcal{G} = 2 \cdot \vartheta\left(0, i \frac{4\pi}{(L\Lambda)^2}\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta\Lambda}{\sqrt{\pi}} \cdot \exp\left[-(2k+1)^2 \frac{(\beta\Lambda)^2}{4}\right] \cdot 2 \cdot \cos[(2k+1)\alpha g_0 \beta]. \quad (7.6)$$

Dies ist die Fourierreihe der gaußschen Summe, wie sich auch durch direkte Rechnung zeigen läßt.

Die Formel von Moivre zusammen mit dem verallgemeinerten binomischen Satz liefert die trigonometrische Identität

$$\cos(m\alpha\beta g_0) = \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} (-1)^r \binom{m}{2r} \cos^{m-2r}(\alpha\beta g_0) \cdot (1 - \cos^2(\alpha\beta g_0))^r. \quad (7.7)$$

Damit läßt sich die gaußsche Summe in Gleichung (7.6) explizit durch Potenzen des Polyakov-Loops ausdrücken. Da $m = 2k + 1$ immer ungerade ist, treten nur ungerade Potenzen des Polyakov-Loop auf, d. h. die gaußsche Summe transformiert unter Zentrumstransformation wie erwartet genauso wie der Polyakov-Loop.

Mit der Zerlegung ist es möglich, den Beitrag des Polyakov-Loops in der Fourierreihenentwicklung zu bestimmen. Ein reiner Kosinus kann in Gleichung (7.7) nur in der Potenz $r = \lfloor 2k+1/2 \rfloor = k$ auftreten. Der Vorfaktor des Kosinus ist dann

$$(-1)^k \cdot \binom{2k+1}{2k} = (-1)^k \cdot (2k+1).$$

Damit ergibt sich für die Fourierreihe nach Umsortieren

$$\mathcal{G} = 2 \cdot \vartheta \left(0, i \frac{4\pi}{(L\Lambda)^2} \right) \cdot \frac{\beta\Lambda}{\sqrt{\pi}} \cdot \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot (2k+1) \cdot e^{-(2k+1)^2 \frac{(\Lambda\beta)^2}{4}} \cdot \mathcal{P} + \left(\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{9(\Lambda\beta)^2}{4}} \pm \dots \right) \cdot \mathcal{P}^3 + \dots \right].$$

Die Punkte stehen für weitere Exponentialfunktionen sowie höhere Potenzen von \mathcal{P} . Die Exponentialfunktion dämpft aber so stark, daß für hinreichend große Werte von $\Lambda \cdot \beta$ nur der lineare Beitrag übrigbleibt.

7.1.2 Numerische Berechnung

Für die numerische Rechnung werden die dimensionslosen Größen

$$\hat{\alpha} \equiv \frac{\alpha g_0}{\Lambda}, \quad \hat{\beta} \equiv \beta \cdot \Lambda \quad \text{und} \quad \hat{L} \equiv L \cdot \Lambda$$

definiert. Um die gaußsche Summe numerisch zu untersuchen, bietet sich die Darstellung

$$\mathcal{G} = 2 \cdot \vartheta \left(0, i \frac{4\pi}{(L\Lambda)^2} \right) \cdot \frac{\Lambda\beta}{2\sqrt{\pi}} \cdot \left[\vartheta \left(\frac{\beta\alpha g_0}{2\pi}, i \frac{4\pi}{(\Lambda\beta)^2} \right) - \vartheta \left(\frac{\beta\alpha g_0}{2\pi} + \pi, i \frac{4\pi}{(\Lambda\beta)^2} \right) \right]$$

über Theta-Funktionen an, da diese in vielen gängigen Mathematik-Programmen implementiert sind. Für die Abbildung 7.1 wurde allerdings die Darstellung aus Gleichung (7.2) mit jeweils 40,000 Eigenwerten für verschiedene $\hat{\alpha}$ - und $\hat{\beta}$ -Werte verwendet, da der lineare Fit für die Proportionalitätsfaktoren des Polyakov-Loops mit MATLAB gemacht wurde und dort die Theta-Funktionen nicht implementiert sind. l und m decken den Wertebereich zwischen -200 und 200 ab.

Zu jedem $\hat{\beta}$ -Wert wurden 50 verschiedene Werte von $\hat{\alpha}$ zwischen null und π betrachtet und damit der gesamte Wertebereich des Polyakov-Loops von -2 bis 2 ausgeschöpft.

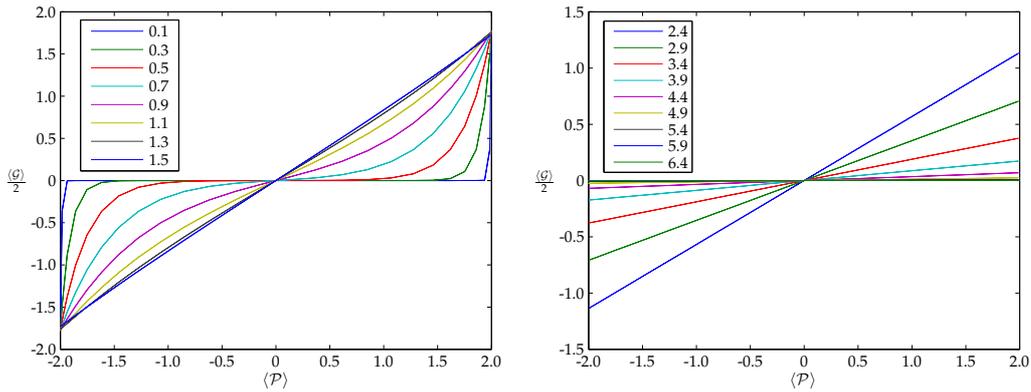


Abbildung 7.1: gaußsche Summe aufgetragen über dem Polyakov-Loop für verschiedene Werte von $\hat{\beta}$ mit $\hat{L} = 2\pi$

Vergleich mit der analytischen Rechnung

$\hat{\beta}$	a_1	a_3	MATLAB-Fit für a_1
1,5	$8,5476 \cdot 10^{-1}$	$9,4956 \cdot 10^{-3}$	$8,5476 \cdot 10^{-1}$
1,6	$8,4376 \cdot 10^{-1}$	$5,0423 \cdot 10^{-3}$	$8,4376 \cdot 10^{-1}$
1,7	$8,2550 \cdot 10^{-1}$	$2,5497 \cdot 10^{-3}$	$8,2550 \cdot 10^{-1}$
1,8	$8,0083 \cdot 10^{-1}$	$1,2283 \cdot 10^{-3}$	$8,0083 \cdot 10^{-1}$
1,9	$7,7063 \cdot 10^{-1}$	$5,6395 \cdot 10^{-4}$	$7,7063 \cdot 10^{-1}$
2,0	$7,3584 \cdot 10^{-1}$	$2,4685 \cdot 10^{-4}$	$7,3583 \cdot 10^{-1}$
2,4	$5,6869 \cdot 10^{-1}$	$5,6468 \cdot 10^{-6}$	$5,6869 \cdot 10^{-1}$
2,9	$3,5427 \cdot 10^{-1}$	$1,7559 \cdot 10^{-8}$	$3,5427 \cdot 10^{-1}$
3,4	$1,8898 \cdot 10^{-1}$	$1,7200 \cdot 10^{-11}$	$1,8898 \cdot 10^{-1}$
3,9	$8,7037 \cdot 10^{-2}$	$5,3514 \cdot 10^{-15}$	$8,7037 \cdot 10^{-2}$
4,4	$3,4795 \cdot 10^{-2}$	$5,3166 \cdot 10^{-19}$	$3,4795 \cdot 10^{-2}$
4,9	$1,2117 \cdot 10^{-2}$	$1,6927 \cdot 10^{-23}$	$1,2117 \cdot 10^{-2}$
5,9	$9,8051 \cdot 10^{-4}$	$5,6999 \cdot 10^{-34}$	$9,8050 \cdot 10^{-4}$

Tabelle 7.1: die ersten beiden Fourierkoeffizienten und die mit MATLAB bestimmten Proportionalitätsfaktoren

In Tabelle 7.1 sind die ersten beiden Fourierkoeffizienten zusammen mit dem zugehörigen MATLAB-Fit für verschiedene Werte von $\hat{\beta}$ aufgetragen. Es bestätigt sich, daß für $\hat{\beta} > 1,6$ der Hauptbeitrag vom ersten Glied der Fourierreihe kommt, da die Exponentialfunktion stark dämpft. Diese Dämpfung führt auch dazu, daß der Geradenanstieg mit wachsendem $\hat{\beta}$ abnimmt (s. Abb. 7.1). Für kleine Werte von $\hat{\beta}$ genügt die lineare Näherung nicht mehr, dann müssen höhere Potenzen des Polyakov-Loops in der Entwicklung berücksichtigt werden, dies ist in Übereinstimmung mit den numerischen Ergebnissen (vgl. den linken Teil von Abbildung 7.1).

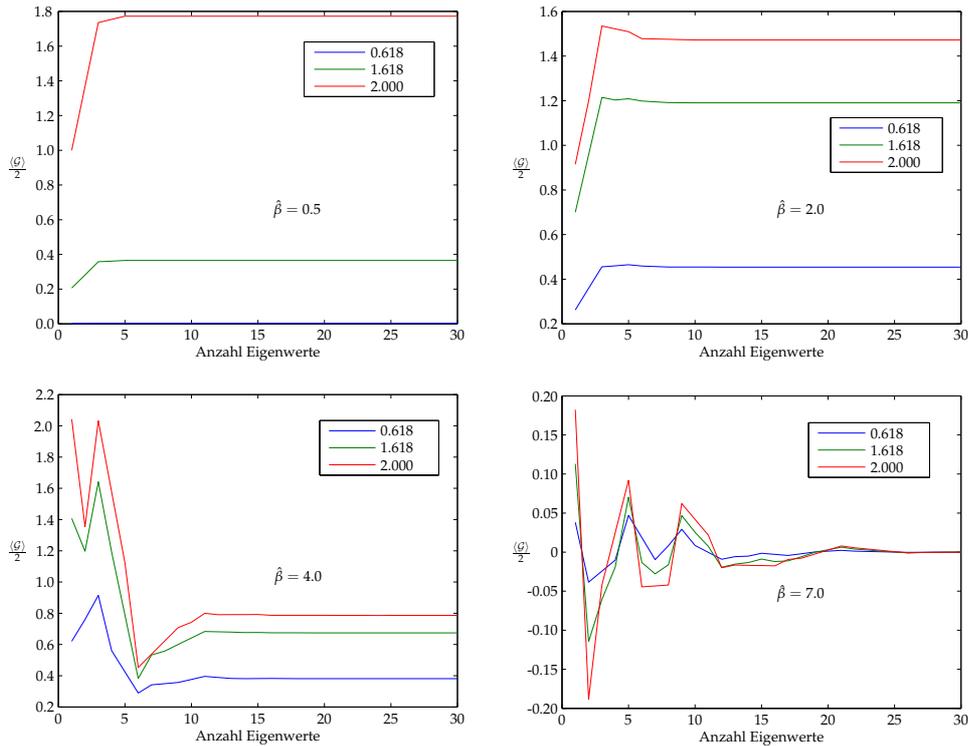


Abbildung 7.2: Die trunkeerte gaußsche Summe für vier verschiedene Werte von $\hat{\beta}$, es ist $\hat{L} = 2\pi$. Für jeden $\hat{\beta}$ -Wert sind drei verschiedene Werte des Polyakov-Loops aufgetragen.

Die trunkeerte gaußsche Summe

In Abbildung 7.2 sind die kleinsten 30 Eigenwerte, nach ihrem Betrag sortiert, aufsummiert und die gaußsche Summe in Abhängigkeit von der Anzahl der berücksichtigten Eigenwerte dargestellt. Es ist zu erkennen, daß für kleine $\hat{\beta}$ der Endwert sehr schnell erreicht wird (typischerweise nach fünf bis zehn Eigenwerten). Für große $\hat{\beta}$, für die die gaußschen Summe nahezu null ist, oszilliert die trunkeerte gaußsche Summe zuerst und erreicht erst deutlich später ihren Endwert.

7.1.3 Der Einfluß der Randbedingungen bei festem Polyakov-Loop

Um den Einfluß der Randbedingungen auf die gaußsche Summe zu untersuchen, ist in Abbildung 7.3 (a) die Gleichung (7.2) mit jeweils 40,000 Eigenwerten für festen Polyakov-Loop $\mathcal{P} = 2$ und festes \hat{L} sowie verschiedene $\hat{\beta}$ aufgetragen. In Abbildung 7.3 (b) ist Gleichung (7.2) für festes $\hat{\beta}$ und verschiedene Werte von \hat{L} aufgetragen. Im nächsten Abschnitt wird der Einfluß dieser beiden Randbedingungen im einzelnen betrachtet.

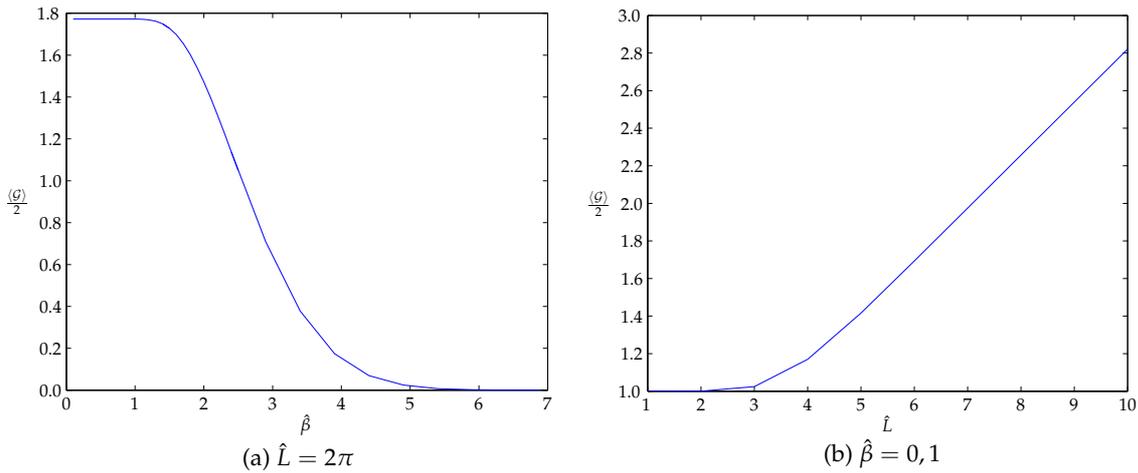


Abbildung 7.3: Einfluß der (a) zeitlichen und (b) räumlichen Randbedingungen für $\mathcal{P} = 2$

Einfluß der zeitlichen Randbedingung

In Abbildung 7.3 (a) wurde $\hat{L} = 2\pi$ gesetzt. Das bedeutet für die Eigenwerte

$$\lambda(m, l)^2 = \left(\frac{2\pi}{\hat{\beta}} \cdot m \right)^2 + l^2, \quad z\lambda(m, l)^2 = \left(\frac{2\pi}{\hat{\beta}} \cdot m - \frac{\pi}{\hat{\beta}} \right)^2 + l^2.$$

Die gaußsche Summe vereinfacht sich damit zu

$$\mathcal{G} = 2 \cdot \vartheta \left(0, \frac{i}{\pi} \right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[e^{-\left(\frac{2\pi}{\hat{\beta}} \cdot m \right)^2} - e^{-\left(\frac{2\pi}{\hat{\beta}} \cdot m - \frac{\pi}{\hat{\beta}} \right)^2} \right].$$

Der zweite Summand liefert erst ab $\hat{\beta} \approx \pi/2$ einen Beitrag, der größer ist als 10^{-3} . Dies erklärt das waagerechte Einlaufen der Kurve für kleine Werte von $\hat{\beta}$, der Endwert wird durch den Vorfaktor aus der Summe über l bestimmt. Der übrige Verlauf und insbesondere der schnelle Abfall auf null für große $\hat{\beta}$ ist an der Fourrierreihe – Gleichung (7.6) – sofort ersichtlich.

Verändern von \hat{L} bedeutet hier nichts anderes, als den gemeinsamen Vorfaktor aus der Summe über l abzuändern, d. h. die Kurven werden gestaucht oder gestreckt.

Einfluß der räumlichen Randbedingung

In Abbildung 7.3 (b) wurde $\hat{\beta} = 0,1$ gesetzt. Das bedeutet für die Eigenwerte

$$\lambda(m, l)^2 = \left(\frac{2\pi}{0,1} \cdot m \right)^2 + \left(\frac{2\pi}{\hat{L}} \cdot l \right)^2, \quad z\lambda(m, l)^2 = \left(\frac{2\pi}{0,1} \cdot m - \frac{\pi}{0,1} \right)^2 + \left(\frac{2\pi}{\hat{L}} \cdot l \right)^2.$$

Für dieses kleine β wird der Summand mit den getwisteten Eigenwerten exponentiell unterdrückt, von den ungetwisteten Eigenwerten tragen nur solche mit $m = 0$ bei.

Dadurch reduziert sich die gaußsche Summe in Abbildung 7.3 (b) auf

$$\mathcal{G} = 2 \cdot \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(2\pi \cdot l)^2}{\hat{L}^2}\right) = 2 \cdot \vartheta\left(0, i \frac{4\pi}{(L\Lambda)^2}\right) = \frac{L\Lambda}{\sqrt{\pi}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{l^2(L\Lambda)^2}{4}}.$$

7.2 Gaußsche Summe in vier Dimensionen – SU(2)

Auf einem vierdimensionalen Torus mit periodischen Randbedingungen wird die Eichfeldkonfiguration

$$\mathfrak{A}_0 = \alpha \sigma_3, \quad \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_3 = 0$$

gewählt, diese Konfiguration hat wieder eine verschwindende Feldstärke. Der Twist des Eichfeldes erfolgt wie in zwei Dimensionen nur in Zeitrichtung. Mit einer analogen Rechnung wie oben (auch hier sind die Eigenwerte zweifach entartet) ergibt sich

$$\begin{aligned} \lambda(m, l)^2 &= \left(\frac{2\pi}{\beta} \cdot m - \alpha g_0\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{L} \cdot l\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{L} \cdot k\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{L} \cdot r\right)^2 \\ {}^z\lambda(m, l)^2 &= \left(\frac{2\pi}{\beta} \cdot m - \alpha g_0 - \frac{\pi}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{L} \cdot l\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{L} \cdot k\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{L} \cdot r\right)^2. \end{aligned}$$

In vier Dimensionen ist die Kopplungskonstante dimensionslos (vgl. Anhang A.3), deshalb trägt α die Dimension [Länge]⁻¹.

Die gaußsche Summe läßt sich dann als

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= 2 \cdot \vartheta\left(0, i \frac{4\pi}{(L_1\Lambda)^2}\right) \cdot \vartheta\left(0, i \frac{4\pi}{(L_2\Lambda)^2}\right) \cdot \vartheta\left(0, i \frac{4\pi}{(L_3\Lambda)^2}\right) \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta\Lambda}{\sqrt{\pi}} \cdot \exp\left[-(2k+1)^2 \frac{(\beta\Lambda)^2}{4}\right] \cdot 2 \cdot \cos[(2k+1)\alpha g_0\beta]. \end{aligned}$$

schreiben. Es ändert sich im Vergleich zu zwei Dimensionen also formal nur der Vorfaktor aufgrund der zusätzlichen Quantenzahlen k und r .

Die Verallgemeinerung auf d Dimensionen ist offensichtlich.

7.3 Gaußsche Summe in zwei Dimensionen – SU(3)

In diesem Abschnitt ist die Eichgruppe SU(3), es wird wie in Abschnitt 7.1 ein zweidimensionaler Torus betrachtet und periodische Randbedingungen an die Wellenfunktionen gestellt. Die gewählte Eichfeldkonfiguration ist

$$\mathfrak{A}_0 = \alpha_1 \hat{\lambda}_3 + \alpha_2 \sqrt{3} \cdot \hat{\lambda}_8 \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}_1 = 0,$$

wieder verschwindet die Feldstärke. Die verwendeten Konventionen für die Gell-Mann-Matrizen sind in Abschnitt 2.1.1 angegeben. Die getwisteten Konfigurationen sind

$${}^{z_1}\mathfrak{A}_0 = \alpha_1 \hat{\lambda}_3 + \alpha_2 \sqrt{3} \cdot \hat{\lambda}_8 + \frac{2\pi}{\beta g_0 \sqrt{3}} \cdot \hat{\lambda}_8 \quad \text{und} \quad {}^{z_1}\mathfrak{A}_1 = 0,$$

sowie

$${}^{z_2}\mathfrak{A}_0 = \alpha_1 \hat{\lambda}_3 + \alpha_2 \sqrt{3} \cdot \hat{\lambda}_8 + \frac{4\pi}{\beta g_0 \sqrt{3}} \cdot \hat{\lambda}_8 \quad \text{und} \quad {}^{z_2}\mathfrak{A}_1 = 0.$$

Der zugehörige Polyakov-Loop ist

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \text{tr} \mathcal{P} \exp \left[i g_0 \int_0^\beta \mathfrak{A}_0 dx^0 \right] = \text{tr} e^{i \beta g_0 \text{diag}(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_1, -2\alpha_2)} \\ &= 2 \cdot e^{i g_0 \alpha_2 \beta} \cos(\alpha_1 g_0 \beta) + e^{-2i \beta g_0 \alpha_2}. \end{aligned}$$

Mit einer kurzen Rechnung verifiziert man, daß

$${}^{z_j}\mathcal{P} = \text{tr} \mathcal{P} \exp \left[i g_0 \int_0^\beta {}^{z_j}\mathfrak{A}_0 dx^0 \right] = z_j \cdot \mathcal{P} \quad \text{für } j = 1, 2$$

gilt. Da die Eichfeldkonfiguration eine verschwindende Feldstärke hat, kann der Dirac-Operator durch Quadrieren diagonalisiert werden (vgl. Abschnitt 7.1). Die Eigenwerte werden im Anhang C.4 berechnet, man erhält

$$\begin{aligned} \lambda_1(m_1, l_1)^2 &= \left(\frac{2\pi m_1}{\beta} - g_0(\alpha_1 + \alpha_2) \right)^2 + \left(\frac{2\pi l_1}{L} \right)^2, \\ \lambda_2(m_2, l_2)^2 &= \left(\frac{2\pi m_2}{\beta} - g_0(-\alpha_1 + \alpha_2) \right)^2 + \left(\frac{2\pi l_2}{L} \right)^2, \\ \lambda_3(m_3, l_3)^2 &= \left(\frac{2\pi m_3}{\beta} + 2g_0\alpha_2 \right)^2 + \left(\frac{2\pi l_3}{L} \right)^2. \end{aligned}$$

Twisten der Eichfeldkonfiguration mit dem Zentrumselement z_j ($j = 1, 2$) bedeutet, $g_0\alpha_2$ durch $g_0\alpha_2 + 2\pi/3\beta \cdot j$ zu ersetzen. Damit erhält man

$$\begin{aligned} {}^{z_j}\lambda_1(m_1, l_1)^2 &= \left(\frac{2\pi m_1}{\beta} - g_0(\alpha_1 + \alpha_2) - j \cdot \frac{2\pi}{3\beta} \right)^2 + \left(\frac{2\pi l_1}{L} \right)^2, \\ {}^{z_j}\lambda_2(m_2, l_2)^2 &= \left(\frac{2\pi m_2}{\beta} + g_0(\alpha_1 - \alpha_2) - j \cdot \frac{2\pi}{3\beta} \right)^2 + \left(\frac{2\pi l_2}{L} \right)^2, \\ {}^{z_j}\lambda_3(m_3, l_3)^2 &= \left(\frac{2\pi m_3}{\beta} + 2g_0\alpha_2 + j \cdot \frac{4\pi}{3\beta} \right)^2 + \left(\frac{2\pi l_3}{L} \right)^2. \end{aligned}$$

7.3.1 Berechnung der gaußschen Summe

Da die gaußsche Summe absolut konvergent ist, darf in der Reihe umsortiert werden. Um den Polyakov-Loop herauszuprojezieren, werden jeweils die Summanden mit λ_i zusammengefaßt, einzeln betrachtet und anschließend zur vollständigen Summe wieder zusammengefügt. Um die Betrachtungen übersichtlich zu halten, wird auf die reellen Theta-Funktionen aus Abschnitt 7.1.1 zurückgegriffen.

Räumlicher Anteil

Der räumliche, l -abhängige Anteil ist ein globaler Vorfaktor und liefert die gleiche Theta-Funktion wie für die Eichgruppe $SU(2)$:

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{2\pi l}{L\Lambda}\right)^2} = \vartheta\left(0, i\frac{4\pi}{(L\Lambda)^2}\right)$$

Zeitlicher Anteil

Der zeitliche, m -abhängige Anteil der Eigenwerte λ_i^2 bzw. die zugehörigen getwisteten Eigenwerte lassen sich auf die Form

$$\frac{\pi(m_i - x_i)^2}{t} \quad \text{mit} \quad t = \frac{\beta^2 \Lambda^2}{4\pi}$$

bringen. Der Faktor t ist für alle Eigenwerte gleich und wird auch durch den Twist nicht beeinflusst. Die zugehörigen x_i sind

$$z_j x_1 = \frac{g_0 \beta}{2\pi} (\alpha_2 + \alpha_1) + j \cdot \frac{1}{3}, \quad z_j x_2 = \frac{g_0 \beta}{2\pi} (\alpha_2 - \alpha_1) + j \cdot \frac{1}{3}, \quad z_j x_3 = -\frac{g_0 \beta}{\pi} \alpha_2 - j \cdot \frac{2}{3},$$

mit $j = 0, 1, 2$. Mit Hilfe der Beziehung

$$\vartheta(x, it) = 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos(2\pi m x) e^{-\pi m^2 t}$$

läßt sich die gaußsche Summe durch Potenzen des Polyakov-Loops ausdrücken. Diese Rechnung wird in Anhang C.5 ausgeführt, die Reihendarstellung der gaußschen Summe ist

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \frac{3\beta\Lambda}{2\sqrt{\pi}} \cdot \vartheta\left(0, \frac{4i\pi}{(L\Lambda)^2}\right) \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(2e^{i(3n+1)\beta g_0 \alpha_2} \cos[(3n+1)\beta g_0 \alpha_1] + e^{-2i(3n+1)\beta g_0 \alpha_2} \right) e^{-\frac{(3n+1)^2(\Lambda\beta)^2}{4}} \right. \\ &\quad \left. + \left(2e^{-i(3n+2)\beta g_0 \alpha_2} \cos[(3n+2)\beta g_0 \alpha_1] + e^{2i(3n+2)\beta g_0 \alpha_2} \right) e^{-\frac{(3n+2)^2(\Lambda\beta)^2}{4}} \right]. \quad (7.8) \end{aligned}$$

7.3.2 Beitrag des Polyakov-Loops

Mit der Abkürzung

$$\gamma \equiv e^{-\frac{(\Lambda\beta)^2}{4}}$$

sind die führenden Terme in der Reihenentwicklung (7.8)

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \vartheta\left(0, i\frac{4\pi}{(L\Lambda)^2}\right) \cdot \frac{\beta\Lambda}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{3}{2} \left[\mathcal{P} \cdot \gamma + (\mathcal{P}^{*2} - \mathcal{P}) \cdot \gamma^4 \right. \\ &\quad \left. + (\mathcal{P}^4 - 4\mathcal{P}^* \mathcal{P}^2 + 2\mathcal{P}^{*2} + 4\mathcal{P}) \cdot \gamma^{16} + \dots \right]. \quad (7.9) \end{aligned}$$

Die gaußsche Summe ist auch für die Eichgruppe $SU(3)$ proportional zum Polyakov-Loop, wenn $\gamma \gg \gamma^4$ erfüllt ist. Daraus ergibt sich die Bedingung $\Lambda\beta \gg 1/\sqrt{3} \approx 0,5774$.

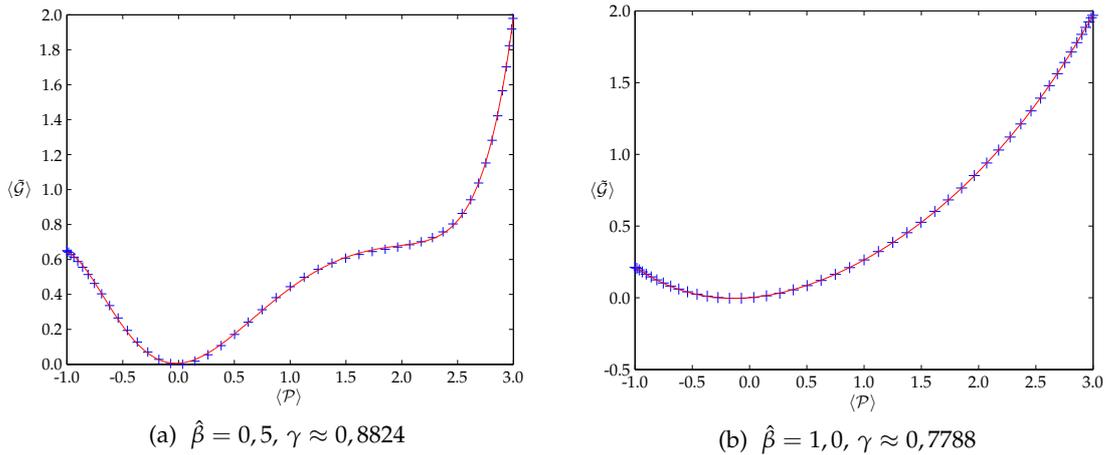


Abbildung 7.4: gaußsche Summe für zwei $\hat{\beta}$ -Werte, gefittet mit (a) Polynom 7. Ordnung und (b) Polynom 4. Ordnung

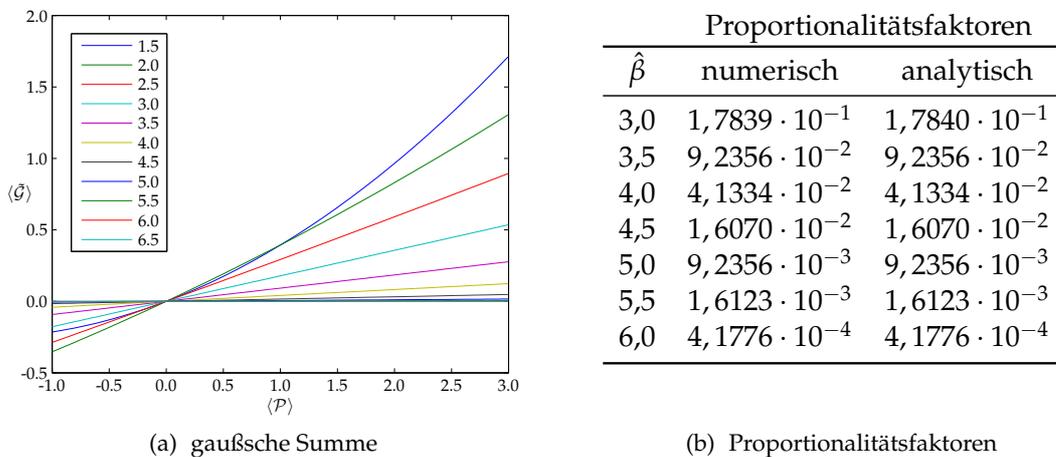


Abbildung 7.5: (a) gaußsche Summe aufgetragen über dem reellen Polyakov-Loop für verschiedene Werte von $\hat{\beta}$ und (b) die zugehörigen Proportionalitätsfaktoren

7.3.3 Numerische Ergebnisse

Für die graphische Darstellung wird

$$\tilde{\mathcal{G}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\vartheta\left(0, i\frac{4\pi}{(L\Lambda)^2}\right)} \cdot \mathcal{G}$$

betrachtet, da die Theta-Funktionen nicht in MATLAB implementiert sind. In den Abbildungen 7.4 und 7.5 (a) ist die gaußsche Summe für den Spezialfall eines reellen Polyakov-Loops ($\alpha_2 = 0$) für verschiedene Werte von $\hat{\beta}$ über dem Polyakov-Loop aufgetragen. Zu jedem $\hat{\beta}$ -Wert wurden 50 Werte von $\hat{\alpha}_1$ zwischen null und $2\pi/\hat{\beta}$ berechnet, es wurden die Summanden bis $n = 100$ berücksichtigt. Aus Abbildung 7.4 ist ersichtlich, daß umso

weniger Glieder in der Reihenentwicklung berücksichtigt werden müssen, je größer $\hat{\beta}$ gewählt wird. Für $\hat{\beta} = 0,5$ wird $\mathcal{G}(\mathcal{P})$ gut durch ein Polynom 7. Ordnung approximiert (s. Abb. 7.4 (a)), während für $\hat{\beta} = 1,0$ ein Polynom 4. Ordnung genügt (s. Abb. 7.4 (b)). Abbildung 7.5 zeigt deutlich, wie sich $\mathcal{G}(\mathcal{P})$ für wachsendes $\hat{\beta}$ einer linearen Relation annähert.

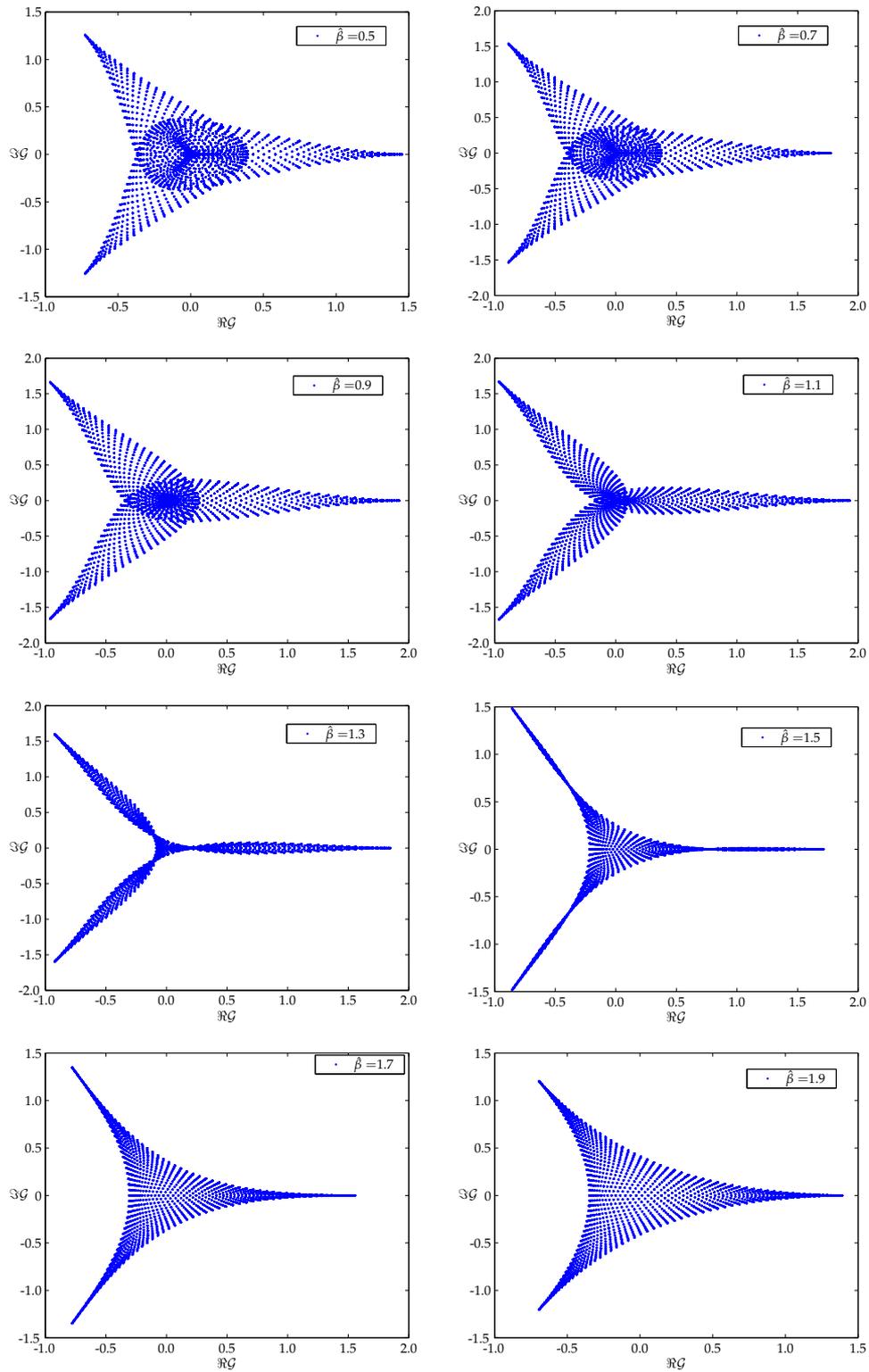
In Tabelle 7.5 (b) sind die Proportionalitätsfaktoren aus Abbildung 7.5 (a) ab $\hat{\beta} = 3,0$ und die Faktoren aus der Reihenentwicklung (7.9) aufgelistet. Die Übereinstimmung zwischen numerischen und analytischen Faktoren ist hervorragend.

In Abbildung 7.6 ist der Wertebereich der gaußschen Summe (7.9) in der komplexen Ebene für verschiedene Werte von $\hat{\beta}$ dargestellt, $\hat{\beta}$ wurde von 0,5 bis 1,9 in Schritten von 0,2 vergrößert. Die gaußsche Summe zeigt wie erwartet ein \mathbb{Z}_3 -symmetrisches Verhalten. Abbildung 7.7 auf Seite 82 stellt die Wertebereiche der gaußschen Summe und des Polyakov-Loops für $\hat{\beta} = 4,5$ gegenüber. Für diese Graphen wurden jeweils 100 Werte von $\hat{\alpha}_1$ und $\hat{\alpha}_2$ zwischen null und $2\pi/\hat{\beta}$ berechnet.

In Abbildung 7.8 (a) auf Seite 82 ist die rotierte gaußsche Summe über dem rotierten Polyakov-Loop aufgetragen. Für die betrachteten Werte von $\hat{\beta}$ ist kein einfacher analytischer Zusammenhang zwischen rotierter gaußscher Summe und rotiertem Polyakov-Loop zu erkennen. Dies ist aber nicht verwunderlich, da die gaußsche Summe nichtlinear von \mathcal{P} und \mathcal{P}^* abhängt und das Rotieren keine lineare Operation ist. Die „Ausläufer“ treten auf, wenn die gaußsche Summe auf der einen Seite der Grenze liegt, ab der in den positiven bzw. negativen Bereich gedreht wird und der zugehörige Polyakov-Loop auf der anderen Seite.

In Abbildung 7.8 (b) auf Seite 82 ist der Betrag der gaußschen Summe über dem Betrag des Polyakov-Loops aufgetragen. Auch hier zeigt sich für die betrachteten Werte von $\hat{\beta}$ erwartungsgemäß kein einfacher Zusammenhang zwischen Polyakov-Loop und dem Betrag der gaußschen Summe.

Abbildung 7.9 auf Seite 83 zeigt die rotierte gaußsche Summe sowie ihren Betrag in der Nähe des Proportionalitätsbereichs. Aus diesen Abbildungen ist ersichtlich, daß der Betrag der gaußschen Summe für diese Werte von $\hat{\beta}$ numerisch stabiler ist als die rotierte gaußsche Summe, und deshalb besser als Ordnungsparameter geeignet ist. Im Proportionalitätsbereich ist aber auch die rotierte gaußsche Summe ein sinnvoller Ordnungsparameter (vgl. Abb. 7.10 auf Seite 83).

Abbildung 7.6: Wertebereich der gaußschen Summe für verschiedene Werte von $\hat{\beta}$

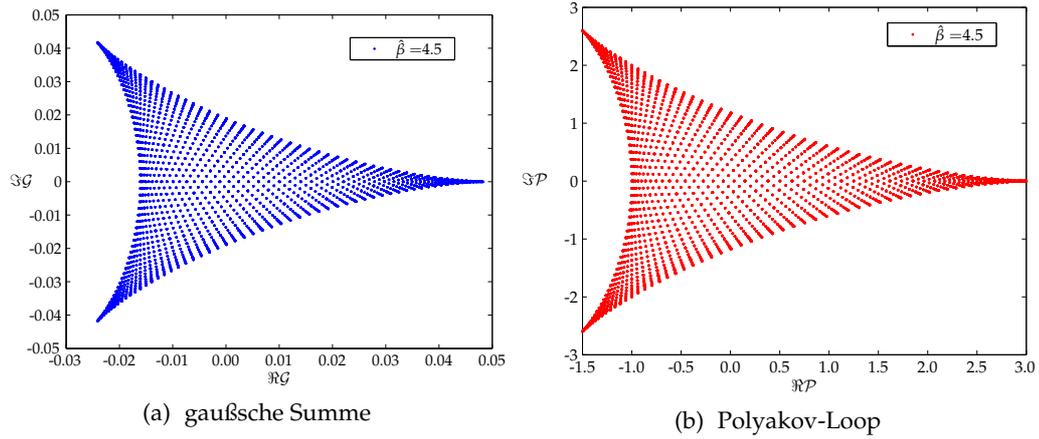


Abbildung 7.7: Wertebereich (a) der gaußschen Summe und (b) des Polyakov-Loops für $\hat{\beta} = 4,5$

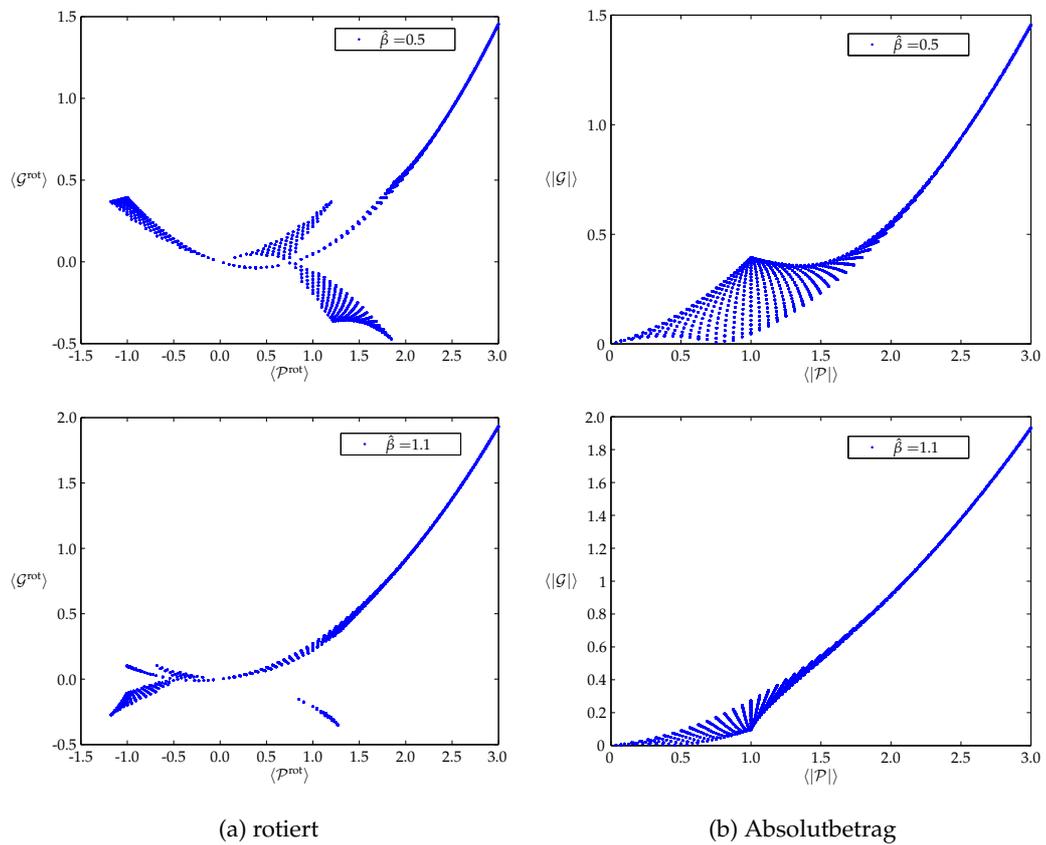


Abbildung 7.8: rotierte gaußsche Summe (a) und Absolutbetrag der gaußschen Summe (b) für verschiedene Werte von $\hat{\beta}$

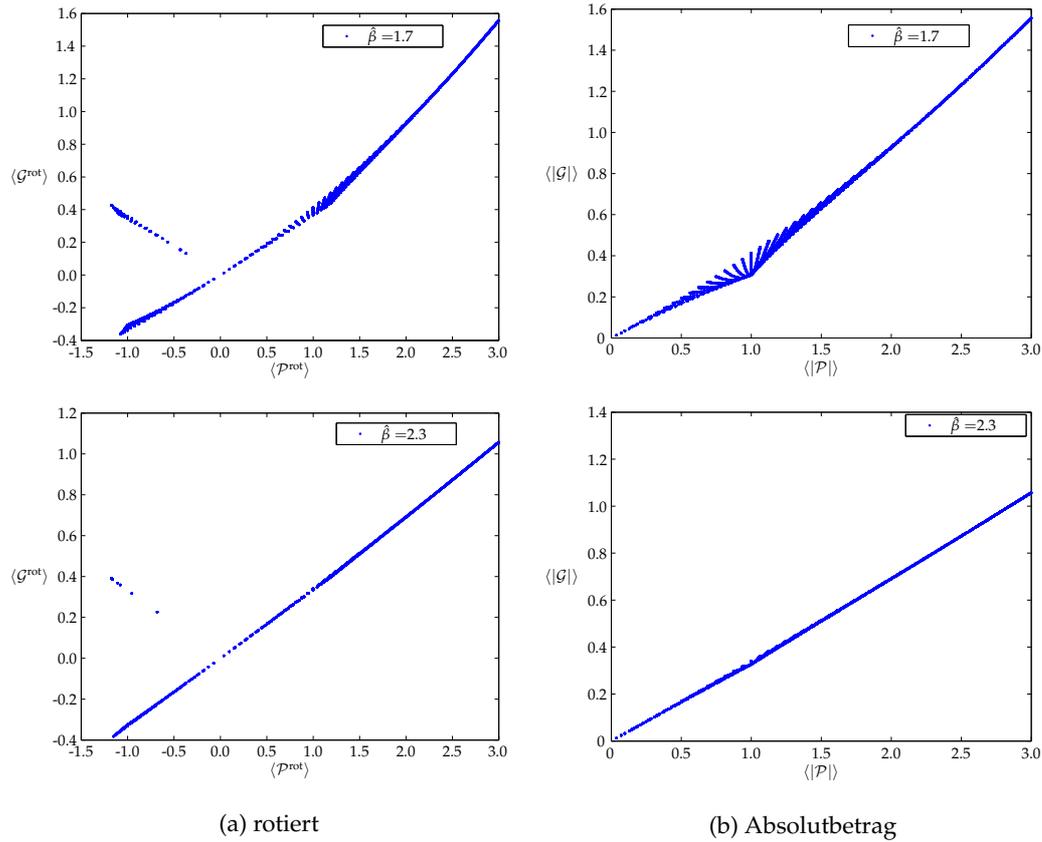


Abbildung 7.9: rotierte gaußsche Summe (a) und Absolutbetrag der gaußschen Summe (b) für verschiedene Werte von $\hat{\beta}$ in der Nähe des Proportionalitätsbereiches

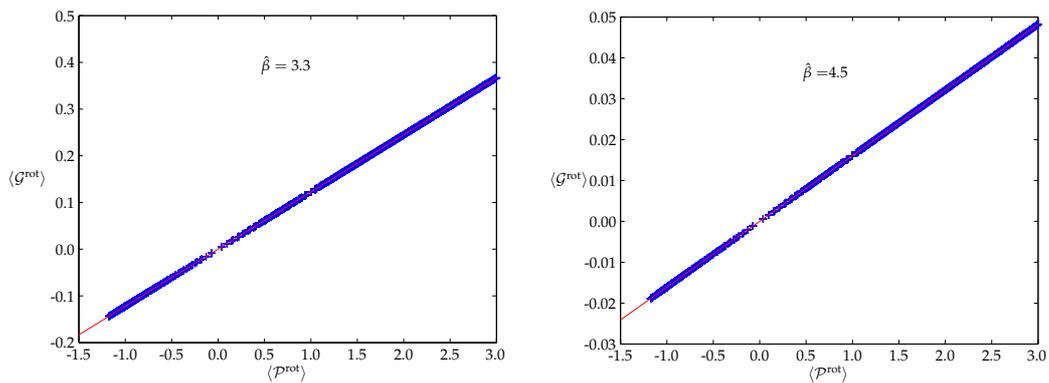


Abbildung 7.10: rotierte gaußsche Summe aufgetragen für verschiedene Werte von $\hat{\beta}$ im Proportionalitätsbereich

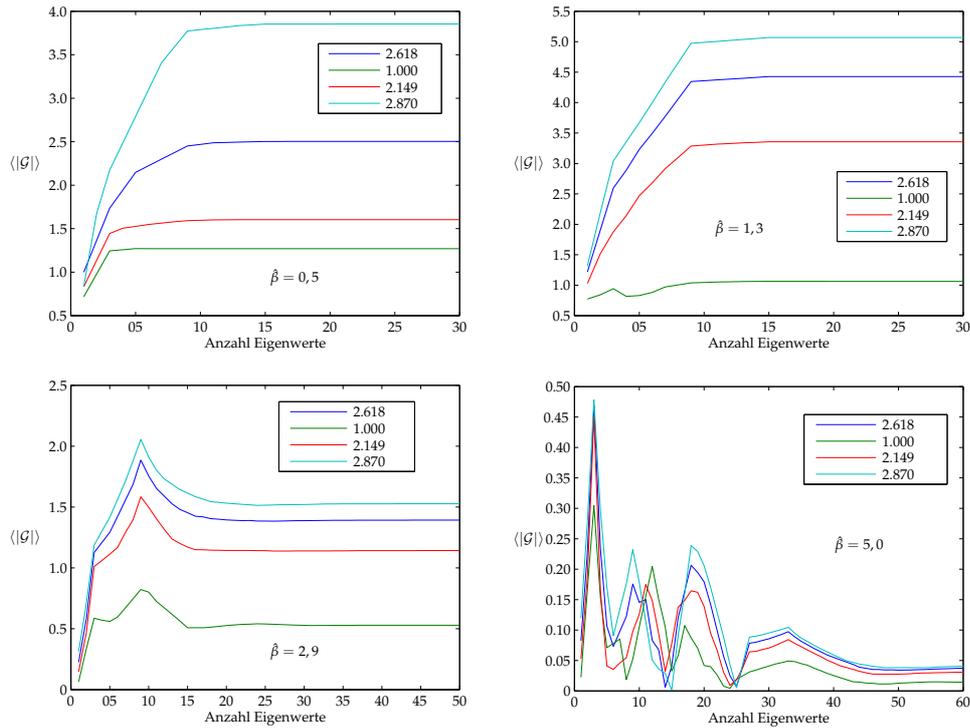


Abbildung 7.11: trunkierte gaußsche Summe für verschiedene Werte von $\hat{\beta}$ und $\hat{L} = 2\pi$

7.3.4 Die trunkierte gaußsche Summe

In Abbildung 7.11 ist der Betrag der trunkierten gaußschen Summe für verschiedene Werte der Kopplungskonstanten dargestellt. Es zeigt sich ein ähnliches Verhalten wie für die Eichgruppe $SU(2)$, d. h. je größer $\hat{\beta}$ ist, desto später erreicht die gaußsche Summe ihren Endwert. Für große $\hat{\beta}$ beginnt sie außerdem zu oszillieren.

7.3.5 Verallgemeinerung auf d Dimensionen

Wie für die Eichgruppe $SU(2)$ ändert sich in d Dimensionen nur der Faktor, der sich aus dem räumlichen Anteil ergibt, zu

$$\vartheta \left(0, \frac{4i\pi}{(L\Lambda)^2} \right) \rightarrow \prod_{k=1}^{d-1} \vartheta \left(0, \frac{4i\pi}{(L_k\Lambda)^2} \right),$$

solange der Twist nur in Zeitrichtung erfolgt (vgl. Abschnitt 7.2).

7.4 Zusammenfassung der Ergebnisse für die gaußsche Summe

Bevor im nächsten Teil dieses Kapitels die Potenzreihen für die Propagatoren – also für die Feynmansumme und die Banks-Casher-Summe – betrachtet werden, sollen in diesem Abschnitt noch einmal die Ergebnisse für die gaußsche Summe zusammengefasst werden.

Für die $SU(2)$ als Eichgruppe ist der Polyakov-Loop für die betrachtete Eichfeldkonfiguration

$$\mathcal{P} = 2 \cos(\alpha\beta g_0).$$

In zwei Dimensionen erhält man die Reihendarstellung

$$\mathcal{G} = 4 \cdot \vartheta \left(0, \frac{4i\pi}{(L\Lambda)^2} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta\Lambda}{\sqrt{\pi}} e^{-(2k+1)^2 \frac{(\beta\Lambda)^2}{4}} \sum_{r=0}^k (-)^r \binom{2k+1}{2r} \left(\frac{\mathcal{P}}{2} \right)^{2k+1-2r} \left(1 - \frac{\mathcal{P}^2}{4} \right)^r.$$

In d Dimensionen wird dies zu

$$\mathcal{G} = 4 \prod_{j=2}^d \vartheta \left(0, \frac{4i\pi}{(L_j\Lambda)^2} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta\Lambda}{\sqrt{\pi}} e^{-(2k+1)^2 \frac{(\beta\Lambda)^2}{4}} \sum_{r=0}^k (-)^r \binom{2k+1}{2r} \left(\frac{\mathcal{P}}{2} \right)^{2k+1-2r} \left(1 - \frac{\mathcal{P}^2}{4} \right)^r.$$

Für die $SU(3)$ als Eichgruppe ist der Polyakov-Loop für die betrachtete Eichfeldkonfiguration

$$\mathcal{P} = 2 e^{i\beta g_0 \alpha_2} \cos(\beta g_0 \alpha_1) + e^{-2i\beta g_0 \alpha_2}$$

und man erhält für die gaußsche Summe in zwei Dimensionen

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \frac{3\beta\Lambda}{2\sqrt{\pi}} \cdot \vartheta \left(0, \frac{4i\pi}{(L\Lambda)^2} \right) \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(2 e^{i(3n+1)\beta g_0 \alpha_2} \cos[(3n+1)\beta g_0 \alpha_1] + e^{-2i(3n+1)\beta g_0 \alpha_2} \right) e^{-\frac{(3n+1)^2 (\Lambda\beta)^2}{4}} \right. \\ &\quad \left. + \left(2 e^{-i(3n+2)\beta g_0 \alpha_2} \cos[(3n+2)\beta g_0 \alpha_1] + e^{2i(3n+2)\beta g_0 \alpha_2} \right) e^{-\frac{(3n+2)^2 (\Lambda\beta)^2}{4}} \right] \end{aligned}$$

und in d Dimensionen

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \frac{3\beta\Lambda}{2\sqrt{\pi}} \cdot \prod_{j=2}^d \vartheta \left(0, \frac{4i\pi}{(L\Lambda)^2} \right) \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(2 e^{i(3n+1)\beta g_0 \alpha_2} \cos[(3n+1)\beta g_0 \alpha_1] + e^{-2i(3n+1)\beta g_0 \alpha_2} \right) e^{-\frac{(3n+1)^2 (\Lambda\beta)^2}{4}} \right. \\ &\quad \left. + \left(2 e^{-i(3n+2)\beta g_0 \alpha_2} \cos[(3n+2)\beta g_0 \alpha_1] + e^{2i(3n+2)\beta g_0 \alpha_2} \right) e^{-\frac{(3n+2)^2 (\Lambda\beta)^2}{4}} \right]. \end{aligned}$$

Damit ist die gaußsche Summe für beide Eichgruppen auf Potenzen des Polyakov-Loops und des komplex konjugierten Loops zurückgeführt.

7.5 Propagatoren in zwei Dimensionen – SU(2)

In diesem Teil dieses Kapitels werden für die spektralen Summen, die aus Propagatoren gebildet werden, die zu Abschnitt 7.1 analogen Rechnungen durchgeführt. Es werden die dort berechneten quadrierten Eigenwerte λ^2 benutzt.

Die chirale Symmetrie $\{\mathfrak{D}, \gamma_*\} = 0$ des betrachteten Dirac-Operators führt dazu, daß mit λ^2 Eigenwert zu \mathfrak{D}^2 die Eigenwerte von \mathfrak{D} in Paaren $\pm |\lambda|$ auftreten [39]. Dies hat aber zur Folge, daß jede spektrale Summe linear in den Eigenwerten, und insbesondere die Feynmansumme, im masselosen Fall verschwindet.

Führt man eine nichtverschwindende Masse ein, ist mit der Konvention (7.1) der Operator

$$\mathfrak{D}_m \equiv im + \mathfrak{D} = im + i\gamma^\mu (\partial_\mu - ig_0 \mathfrak{A}_\mu)$$

zu betrachten. Nach Zusammenfassen von Termen der Form

$$\frac{1}{im + \lambda} + \frac{1}{im - \lambda} = \frac{-2im}{m^2 + \lambda^2}$$

erhält man für die Feynmansumme

$$\begin{aligned} \Sigma^{(-1)} = -4im \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[m^2 + \left(\frac{2\pi}{\beta} \cdot k - \alpha g_0 \right)^2 + \left(\frac{2\pi}{L} \cdot l \right)^2 \right]^{-1} \right. \\ \left. - \left[m^2 + \left(\frac{2\pi}{\beta} \cdot k - \alpha g_0 - \frac{\pi}{\beta} \right)^2 + \left(\frac{2\pi}{L} \cdot l \right)^2 \right]^{-1} \right\}. \quad (7.10) \end{aligned}$$

Der zusätzliche Faktor zwei berücksichtigt die Entartung der Eigenwerte. Für $l = 0$ und $\alpha = 2\pi k / \beta g_0$ bzw. $\alpha = 2\pi k / \beta g_0 + \pi / \beta g_0$ hat der Dirac-Operator Nullmoden und $\Sigma^{(-2)}$ divergiert. Diese Werte von α entsprechen dem maximalen bzw. minimalen Wert des Polyakov-Loops und werden aus dem Definitionsbereich von α herausgenommen.

Um die Notation übersichtlich zu halten, werden die Bezeichnungen

$$a_1 = \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^2, \quad a_2 = \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2, \quad c_1 = -\alpha g_0 \frac{\beta}{2\pi}, \quad c_2 = 0, \quad q = m^2$$

eingeführt. Um die Feynmansumme durch den Polyakov-Loop auszudrücken, benutzt man die Jacobi-Identität für Theta-Funktionen (7.4) und die Mellin-Transformation¹

$$\sum (a(n+c)^2 + q)^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \sum \int_0^\infty dt t^{s-1} e^{-(a(n+c)^2 + q)t}.$$

Außerdem werden die modifizierten Besselfunktionen zweiter Art oder Kelvin-Funktionen (s. Anhang B.1) sowie die riemannsche Zeta-Funktion und die Hurwitz-Funktion bzw. verallgemeinerte riemannsche Zeta-Funktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \quad \text{und} \quad \zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+a)^{-s}$$

¹Siehe z. B. [58, 70], die Konvention für die Wahl des Vorfaktors hält sich an [22].

benötigt. Es gilt $\zeta(s) = \zeta(s, 1)$.

Für den eindimensionalen Fall, auf den im folgendem vieles zurückgeführt wird, ergibt sich unter der Voraussetzung, daß man Summation und Integration vertauschen kann²

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a(n+c)^2 + q)^{-s} &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \frac{\Gamma(s-1/2)}{\Gamma(s)} q^{1/2-s} + \frac{4\pi^s}{\Gamma(s)} a^{-1/4-s/2} q^{1/4-s/2} \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1/2} \cos(2\pi nc) K_{s-1/2} \left(2\pi n \sqrt{\frac{q}{a}} \right). \end{aligned}$$

Für den zweidimensionalen Fall, der in diesem Abschnitt von Interesse ist, ergibt sich mit einer analogen Rechnung, wenn man zusätzlich die Jacobi-Identität (7.4) auf die Summe über n_1 anwendet

$$\begin{aligned} &\sum_{n_1, n_2=-\infty}^{\infty} (a_1(n_1+c_1)^2 + a_2(n_2+c_2)^2 + q)^{-s} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a_1}} \frac{\Gamma(s-1/2)}{\Gamma(s)} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} (a_2(n_2+c_2)^2 + q)^{1/2-s} \\ &\quad + \frac{4\pi^s}{\Gamma(s)} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} a_1^{-1/4-s/2} (a_2(n_2+c_2)^2 + q)^{1/4-s/2} \\ &\quad \times \sum_{n_1=1}^{\infty} n_1^{s-1/2} \cos(2\pi n_1 c_1) \cdot K_{s-1/2} \left(\frac{2\pi n_1}{\sqrt{a_1}} \sqrt{a_2(n_2+c_2)^2 + q} \right). \end{aligned} \quad (7.11)$$

Der erste Summand auf der rechten Seite wird vom Twist nicht beeinflußt und fällt in der Summe über die Zentrumselemente heraus. Die Feynmansumme ($s = 1$) ist damit³

$$\begin{aligned} \Sigma^{(-1)} &= -32i\pi m \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^{-3/2} \left[\left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 n_2^2 + m^2 \right]^{-1/4} \\ &\quad \times \sum_{n_1=1}^{\infty} \sqrt{2n_1+1} \cos[(2n_1+1)\alpha\beta g_0] \\ &\quad \times K_{1/2} \left[2\pi(2n_1+1) \left(\frac{\beta}{2\pi} \right) \sqrt{\left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 n_2^2 + m^2} \right]. \end{aligned}$$

Der Vorfaktor 32 setzt sich zusammen aus dem Faktor vier aus der Jacobi-Identität und dem Umschreiben als Besselfunktion, dem Faktor vier aus Gleichung (7.10) und einem Faktor zwei aus der Summe über die Zentrumselemente. Faßt man alle Faktoren mit

²Nach [22] genügt es, für die Vertauschbarkeit $q > 0$, $a > 0$ und $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0, -1, -2, \dots$ zu fordern.

³Im Vergleich zu Gleichung (7.10) sind die Summationsindizes umbenannt worden, es gilt $n_1 = k$ und $n_2 = l$.

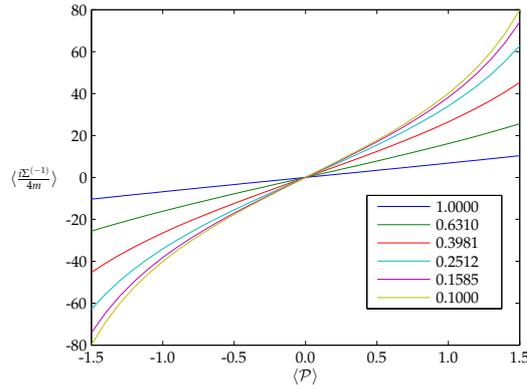


Abbildung 7.12: Die Feynmansumme, aufgetragen über dem Polyakov-Loop, für verschiedene Massen \hat{m} zwischen 0,1 und eins mit $\hat{\beta} = 2$, $\hat{L} = 100$, k und l jeweils von -100 bis 100.

Ausnahme des Kosinus in einem Faktor

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{2n_1+1}(L, \beta, m) \equiv & -32i\pi m \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{-3/2} \left[\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 n_2^2 + m^2 \right]^{-1/4} \sqrt{2n_1+1} \\ & \times K_{1/2} \left[2\pi(2n_1+1) \left(\frac{\beta}{2\pi}\right) \sqrt{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 n_2^2 + m^2} \right] \end{aligned}$$

zusammen und nutzt die trigonometrische Identität (7.7), um die Potenzen des Kosinus mit dem Polyakov-Loop in Beziehung zu setzen, erhält man

$$\Sigma^{(-1)} = \sum_{n_1=1}^{\infty} \mathcal{A}_{2n_1+1}(L, \beta, m) \times \sum_{r=0}^{n_1} (-)^r \binom{2n_1+1}{2r} \left(\frac{\mathcal{P}}{2}\right)^{2n_1+1-2r} \left(1 - \frac{\mathcal{P}^2}{4}\right)^{2r}.$$

In Abbildung 7.12 ist die Feynmansumme (7.10) für verschiedene Massen \hat{m} in Abhängigkeit vom Polyakov-Loop für festes $\hat{\beta}$ und \hat{L} aufgetragen. Es ist zu erkennen, daß für Massen $\hat{m} > 1$ die Feynmansumme in guter Näherung proportional zum Polyakov-Loop ist und sie für die extremalen Werte des Polyakov-Loops nicht divergiert. Erniedrigt man die Masse, ergeben sich zunehmend Abweichungen von der linearen Beziehung und die Summe beginnt, an den Rändern zu divergieren.

Für kleine q existiert eine binomiale Entwicklung [22, S. 83]

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} [a_1(n_1+c)^2 + q]^{-s} = a_1^{-s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k \Gamma(k+s)}{\Gamma(s)k!} \left(\frac{q}{a_1}\right)^k \zeta(2s+2k, c_1),$$

d. h. der Summationsindex in der eindimensionalen Feynmansumme muß in den negativen und den nichtnegativen Anteil aufgespalten werden. Im negativen Anteil wird der Summationsindex zusätzlich um eins verschoben, um beide Summationen bei null begin-

nen zu lassen. Damit erhält man für den eindimensionalen Fall die Entwicklung

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} [a_1(n_1 + c_1)^2 + q]^{-s} = a_1^{-s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k \Gamma(k+s)}{\Gamma(s)k!} \left(\frac{q}{a_1}\right)^k \times [\zeta(2s+2k, c_1) + \zeta(2s+2k, 1-c_1)]. \quad (7.12)$$

Dies wird im nächsten Abschnitt, der den Fall $m \rightarrow 0$ und damit $q = m^2 \rightarrow 0$ betrachtet, benötigt.

7.5.1 Banks-Casher-Summe – masseloser Fall

Der Limes $m \rightarrow 0$ von $\Sigma^{(-1)}/im$ führt auf die Banks-Casher-Summe

$$\Sigma^{(-2)} = 4 \cdot \sum_{l,k=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\left(\frac{2\pi}{\beta} \cdot k - \alpha g_0 \right)^2 + \left(\frac{2\pi}{L} \cdot l \right)^2 \right]^{-1} - \left[\left(\frac{2\pi}{\beta} \cdot k - \alpha g_0 - \frac{\pi}{\beta} \right)^2 + \left(\frac{2\pi}{L} \cdot l \right)^2 \right]^{-1} \right\}. \quad (7.13)$$

Für $l \neq 0$ und nicht zu große L ist die Entwicklung (7.11) anwendbar, wenn man dort $n_2 = 0$ herausnimmt. Die Summe mit $l = 0$ muß gesondert betrachtet werden und führt auf eine eindimensionale Summe. Hierfür wird

$$W_{\text{dim}=2}^{\text{SU}(2)} \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{2\pi}{\beta} \cdot k - \alpha g_0 \right)^{-2} - \left(\frac{2\pi}{\beta} \cdot k - \alpha g_0 - \frac{\pi}{\beta} \right)^{-2} \right]$$

eingeführt. In der binomialen Entwicklung (7.12) bleibt für verschwindende Masse nur⁴

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} [a_1(n_1 + c_1)^2]^{-s} = a_1^{-s} [\zeta(2s, c_1) + \zeta(2s, 1-c_1)]$$

übrig. Die benötigte Relation, um dies weiter zusammenzufassen, findet sich in [2, S.260, Gleichung 6.4.7 zusammen mit Gleichung 6.4.10] bzw. in der verwendeten Form in [17] (gültig für $0 < x < 1$ und $s \geq 1$):

$$\zeta(2s, x) + \zeta(2s, 1-x) = -\frac{\pi}{(2s-1)!} \frac{d^{2s-1}}{dx^{2s-1}} \cot(\pi x)$$

Damit reduziert sich der obige Ausdruck für $s = 1$ und $x = c_1$ auf

$$\zeta(2, c_1) + \zeta(2, 1-c_1) = -\pi \frac{d}{dc_1} \cot(\pi c_1) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi c_1)}. \quad (7.14)$$

⁴Der Summationsindex wird wieder umbenannt, es ist $n_1 = k$ und $n_2 = l$.

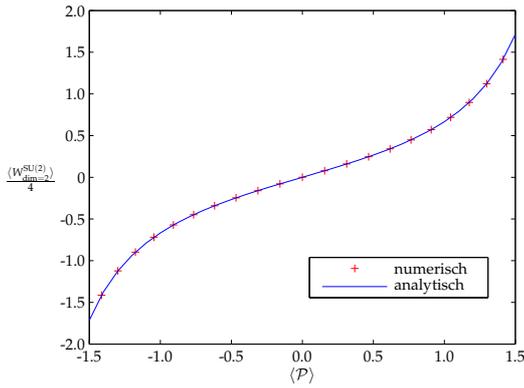


Abbildung 7.13: $\hat{L} = 2\pi, \hat{\beta} = 1, l = 0$, k von -100 bis 100

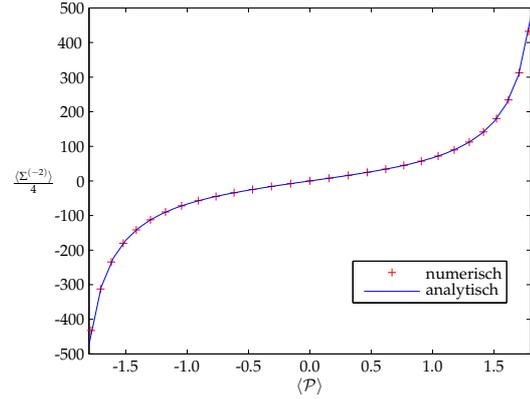


Abbildung 7.14: $\hat{L} = 2\pi, \hat{\beta} = 10$, volle Summe, l und k jeweils von -600 bis 600

Für den $l = 0$ -Anteil der Banks-Casher-Summe ergibt sich

$$W_{\dim=2}^{\text{SU}(2)} = \frac{\pi^2}{a_1^s} \left[\frac{1}{\sin^2(\pi c)} - \frac{1}{\sin^2(\pi c - \frac{\pi}{2})} \right] = \frac{\pi^2}{a_1^s} \frac{4 \cos(2\pi c)}{1 - \cos^2(2\pi c)}. \quad (7.15)$$

Zusammen mit der Beziehung (7.7) ergibt sich für die Banks-Casher-Summe ($s = 2$) durch den Polyakov-Loop ausgedrückt

$$\begin{aligned} \Sigma^{(-2)} &= 64\pi \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{-3/2} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{-1/2} \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2n_1+1}{n_2}} K_{1/2} \left[\frac{2\pi\beta}{L} (2n_1+1)n_2 \right] \\ &\times \sum_{r=0}^{n_1} (-)^r \binom{2n_1+1}{2r} \cdot \left(\frac{\mathcal{P}}{2}\right)^{2n_1+1-2r} \cdot \left(1 - \frac{\mathcal{P}^2}{4}\right)^{2r} + 4 \cdot \beta^2 \frac{\mathcal{P}}{2 - \mathcal{P}^2/2}. \end{aligned}$$

Zusammenfassen des Vorfaktors in $\mathcal{B}_{2n_1+1}(L, \beta)$ liefert

$$\begin{aligned} \Sigma^{(-2)} &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \mathcal{B}_{2n_1+1}(L, \beta) \\ &\times \sum_{r=0}^{n_1} (-)^r \binom{2n_1+1}{2r} \left(\frac{\mathcal{P}}{2}\right)^{2n_1+1-2r} \left(1 - \frac{\mathcal{P}^2}{4}\right)^{2r} + 4 \cdot \beta^2 \frac{\mathcal{P}}{2 - \mathcal{P}^2/2} \quad (7.16) \end{aligned}$$

mit

$$\mathcal{B}_{2n_1+1} \equiv 64\pi \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{-3/2} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{-1/2} \sum_{n_2=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2n_1+1}{n_2}} K_{1/2} \left[\frac{2\pi\beta}{L} (2n_1+1)n_2 \right].$$

In Abbildung 7.13 und 7.14 sind Gleichung (7.13) und Gleichung (7.16) aufgetragen. Die Übereinstimmung zwischen numerischen und analytischen Ergebnissen ist hervorragend.

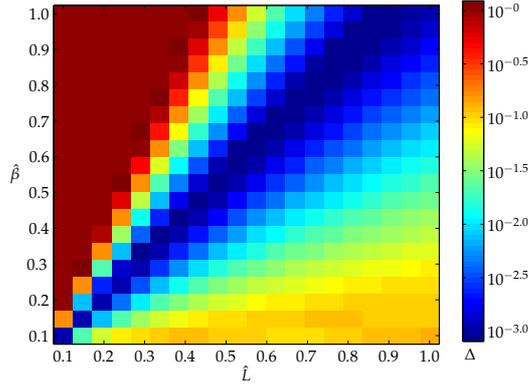


Abbildung 7.15: Gültigkeitsbereich der linearen Approximation im Parameterraum von $\hat{\beta}$ und \hat{L} für m, l von -400 bis 400 (logarithmische Darstellung)

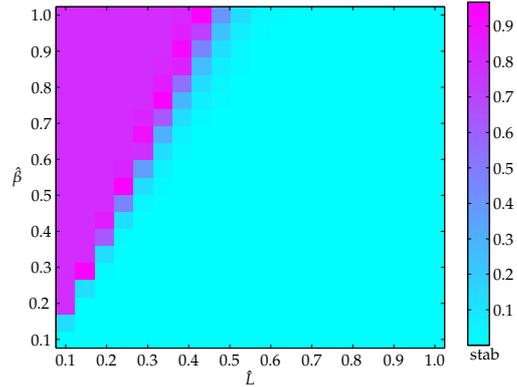


Abbildung 7.16: Stabilitätsbereich im Parameterraum von $\hat{\beta}$ und \hat{L} für m, l von -400 bis 400

Für den masselosen Fall gelangt man auch unter Verwendung von Epstein-Hurwitz-Funktionen mit Hilfe der Arbeiten [21, 22, 49] zum gleichen Ergebnis.

Um zu untersuchen, in welchem Wertebereich von β und L eine lineare Approximation für den ersten Summanden in Gleichung (7.16) gültig ist, wurde in Abbildung 7.15 die Funktion

$$\Delta \equiv \frac{\max \left| \sum_{l,m=-\infty}^{\infty} f(m,l) - \mathcal{B}_1(L,\beta) \cdot \mathcal{P} \right|}{\max \left| \sum_{l,m=-\infty}^{\infty} f(m,l) \right|}$$

in logarithmischer Darstellung aufgetragen. $f(l, m)$ ist die direkte Summe der Eigenwerte (7.13), der Strich am Summenzeichen kennzeichnet, daß die Summanden mit $l = 0$, die zu einem nichtlinearen Anteil führen, ausgelassen werden. Der Faktor

$$\mathcal{B}_1(L, \beta) = 64\pi \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^{-3/2} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^{-1/2} K_{1/2} \left(\frac{2\pi\beta}{L} \right)$$

bezeichnet den Vorfaktor des ersten Summanden in Gleichung (7.16). Es ist zu erkennen, daß für $\beta/L \ll 1$ die lineare Approximation nicht mehr ausreicht, da die Dämpfung durch die Besselfunktion schlechter wird.

Der nichtverschwindende Wert von Δ für kleine Werte von L und große Werte von β ist auf numerische Instabilitäten bei der Berechnung von $\sum_{l,m=-\infty}^{\infty} f(m,l)$ zurückzuführen, dies ist in Abbildung 7.16 zu sehen, in der

$$\text{stab} \equiv \frac{\sum_{l,m=-400}^{400} f(m,l)|_{\mathcal{P}=0}}{\max \left| \sum_{l,m=-400}^{400} f(m,l) \right|}$$

aufgetragen ist. Diese Größe mißt, wie gut die Eigenwertsumme berechnet wird, da sie für $\mathcal{P} = 0$ verschwinden muß, wenn alle Summanden berücksichtigt werden.

7.6 Propagatoren in d Dimensionen – SU(2)

Ausgehend vom vorherigen Abschnitt ist es einfach, die Ausdrücke auf d Dimensionen zu verallgemeinern, solange der Twist nur in einer Dimension (o.B.d.A. die Zeitrichtung) erfolgt. Die Rechnungen erfolgen analog zur Rechnung in zwei Dimensionen. Im massiven Fall ändert sich nur der Vorfaktor vor den Kosinustermen zu

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{2n_1+1}(L, \beta, m) = & -im \sum_{n_2, \dots, n_d = -\infty}^{\infty} 32\pi \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{-3/2} \left[\sum_{j=2}^d \left(\frac{2\pi}{L_j} n_j\right)^2 + m^2 \right]^{-1/4} \\ & \times \sqrt{2n_1+1} \cdot K_{1/2} \left[2\pi(2n_1+1) \left(\frac{\beta}{2\pi}\right) \sqrt{\sum_{j=2}^d \left(\frac{2\pi}{L_j} n_j\right)^2 + m^2} \right] \end{aligned}$$

und es ist über n_1 von null bis ∞ zu summieren.

Im masselosen Fall ist der Anteil $W_{\text{dim}=d}^{\text{SU}(2)}$ mit $n_2, \dots, n_d = 0$ wieder gesondert zu betrachten, dieser Term ändert sich im Vergleich zur Rechnung in zwei Dimensionen aber nicht, d. h. $W_{\text{dim}=d}^{\text{SU}(2)} = W_{\text{dim}=2}^{\text{SU}(2)}$. Der Vorfaktor vor den Kosinustermen ändert sich zu

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{2n_1+1}(L, \beta) = & \sum_{n_2, \dots, n_d = 1}^{\infty} 64\pi \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{-3/2} \sqrt{2n_1+1} \left[\sum_{j=2}^d \left(\frac{2\pi}{L_j} n_j\right)^2 \right]^{-1/4} \\ & \times K_{1/2} \left[2\pi(2n_1+1) \left(\frac{\beta}{2\pi}\right) \sqrt{\sum_{j=2}^d \left(\frac{2\pi}{L_j} n_j\right)^2} \right], \end{aligned}$$

und es ist über n_1 von null bis ∞ zu summieren.

Es ändern sich also im Vergleich zu zwei Dimensionen nur die Vorfaktoren vor den Kosinustermen, solange der Twist nur in einer Richtung erfolgt.

7.7 Propagatoren in d Dimensionen – SU(3)

Der massive Fall läßt sich leicht von der SU(2) auf die SU(3) verallgemeinern, indem man die Rechnung für die gaußsche Summe aus dem Anhang C.5 übernimmt. Mit der gleichen Argumentation wie dort bleiben nur die Werte für $n_1 \neq 3k$ übrig. Explizit ergibt sich

$$\begin{aligned} \Sigma^{(-1)} = & \sum_{n_1=0}^{\infty} \left[\mathcal{A}_{3n_1+1}(L, \beta) \left(2e^{i(3n_1+1)\beta g_0 \alpha_2} \cos[(3n_1+1)\beta g_0 \alpha_1] + e^{-2i(3n_1+1)\beta g_0 \alpha_2} \right) \right. \\ & \left. + \mathcal{A}_{3n_1+2}(L, \beta) \left(2e^{i(3n_1+2)\beta g_0 \alpha_2} \cos[(3n_1+2)\beta g_0 \alpha_1] + e^{-2i(3n_1+2)\beta g_0 \alpha_2} \right) \right] \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_k(L, \beta, m) \equiv & \sum_{n_2, \dots, n_d = -\infty}^{\infty} 16 \cdot \pi \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^{-3/2} \left[\sum_{j=2}^d \left(\frac{2\pi}{L_j} n_j \right)^2 + m^2 \right]^{-1/4} \\ & \times \sqrt{k} \cdot K_{1/2} \left[2\pi k \left(\frac{\beta}{2\pi} \right) \sqrt{\sum_{j=2}^d \left(\frac{2\pi}{L_j} n_j \right)^2 + m^2} \right]. \end{aligned}$$

Die ersten Glieder dieser Reihe sind

$$\begin{aligned} \Sigma^{(-1)} = & \mathcal{A}_1(L, \beta, m) \cdot \mathcal{P} + \mathcal{A}_2(L, \beta, m) \cdot (\mathcal{P}^{*2} - \mathcal{P}) \\ & + \mathcal{A}_4(L, \beta, m) \cdot (\mathcal{P}^4 - 4\mathcal{P}^* \mathcal{P}^2 + 2\mathcal{P}^{*2} + 4\mathcal{P}) + \dots \end{aligned}$$

7.7.1 Banks-Casher-Summe – masseloser Fall

Führt man die entsprechenden Abkürzungen wie im Fall der SU(2) ein, erhält man

$$\begin{aligned} a_1^1 &= \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^2 = a_1^2 = a_1^3 \equiv a_1, & a_2^1 &= \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 = a_2^2 = a_2^3 \equiv a_2, \\ c_1^1 &= -\frac{g_0 \beta}{2\pi} (\alpha_1 + \alpha_2) \equiv c_1, & c_1^2 &= -\frac{g_0 \beta}{2\pi} (-\alpha_1 + \alpha_2) \equiv c_2, & c_1^3 &= \frac{g_0 \beta}{\pi} \alpha_2 \equiv c_3. \end{aligned}$$

Im masselosen Fall ergibt sich wie für die Eichgruppe SU(2) ein Zusatzterm $W_{\dim=d}^{\text{SU}(3)}$ aus der binomialen Entwicklung (7.12), der ebenfalls nicht von der Dimension abhängt, d. h. es gilt $W_{\dim=d}^{\text{SU}(3)} = W_{\dim=2}^{\text{SU}(3)}$. Mit Hilfe der Beziehung (7.14) ergibt sich

$$\begin{aligned} W_{\dim=2}^{\text{SU}(3)} &= a_1^{-1} \left\{ \frac{d}{dc_1} \left[\cot(\pi c_1) + z_1^* \cot\left(\pi c_1 - \frac{\pi}{3}\right) + z_2^* \cot\left(\pi c_1 + \frac{\pi}{3}\right) \right] \right. \\ &+ \frac{d}{dc_2} \left[\cot(\pi c_2) + z_1^* \cot\left(\pi c_2 - \frac{\pi}{3}\right) + z_2^* \cot\left(\pi c_2 + \frac{\pi}{3}\right) \right] \\ &+ \left. \frac{d}{dc_3} \left[\cot(\pi c_3) + z_1^* \cot\left(\pi c_3 + \frac{2\pi}{3}\right) + z_2^* \cot\left(\pi c_3 - \frac{2\pi}{3}\right) \right] \right\} \\ &= 3\pi a_1^{-1} \sum_{i=1}^3 \frac{2e^{-2ic_i\pi} + e^{4ic_i\pi}}{\sin^2(3c_i\pi)}. \end{aligned}$$

Die Rechnung hierzu wird in Anhang C.6 durchgeführt. Mit Hilfe von MAPLE läßt sich dies zu

$$W_{\dim=2}^{\text{SU}(3)} = -3\beta^2 \frac{\mathcal{P} (2\mathcal{P}^{*3} + \mathcal{P}^3) (9 + |\mathcal{P}|^2) - 3\mathcal{P}^{*2} (\mathcal{P}^{*3} + 5\mathcal{P}^3)}{(\mathcal{P}^3 - \mathcal{P}^{*3})^2}$$

umformen. In Abbildung 7.17 sind die numerischen und analytischen Ergebnisse dargestellt, die Übereinstimmung ist hervorragend.

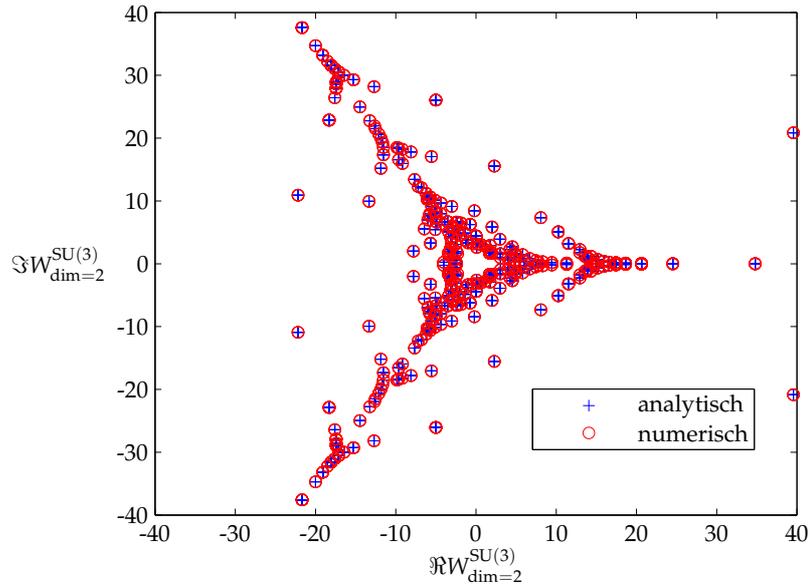


Abbildung 7.17: Vergleich der numerischen und analytischen Ergebnisse, $\beta = 1$, α_1 und α_2 zwischen null und 2π mit 50 Zwischenschritten

Wie für den massiven Fall kann die Rechnung für die Eichgruppe $SU(2)$ mit Hilfe der Rechnung in Anhang C.5 auf die Eichgruppe $SU(3)$ übertragen werden. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \Sigma^{(-2)} = & \sum_{n_1=0}^{\infty} \left[\mathcal{B}_{3n_1+1}(L, \beta) \left(2 e^{i(3n_1+1)\beta g_0 \alpha_2} \cos [(3n_1+1)\beta g_0 \alpha_1] + e^{-2i(3n_1+1)\beta g_0 \alpha_2} \right) \right. \\ & \left. + \mathcal{B}_{3n_1+2}(L, \beta) \left(2 e^{i(3n_1+2)\beta g_0 \alpha_2} \cos [(3n_1+2)\beta g_0 \alpha_1] + e^{-2i(3n_1+2)\beta g_0 \alpha_2} \right) \right] \\ & - 12 \cdot \beta^2 \frac{\mathcal{P} (2\mathcal{P}^*3 + \mathcal{P}^3) (9 + |\mathcal{P}|^2) - 3\mathcal{P}^*2 (\mathcal{P}^*3 + 5\mathcal{P}^3)}{(\mathcal{P}^3 - \mathcal{P}^*3)^2} \end{aligned}$$

mit

$$\mathcal{B}_k(L, \beta) \equiv \sum_{n_2, \dots, n_d = -\infty}^{\infty} 32\pi \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^{-3/2} \left[\sum_{j=2}^d \left(\frac{2\pi}{L_j} n_j \right)^2 \right]^{-1/4} \sqrt{k} \cdot K_{1/2} \left[k\beta \sqrt{\sum_{j=2}^d \left(\frac{2\pi}{L_j} n_j \right)^2} \right].$$

7.8 Zusammenfassung der Ergebnisse für die Propagatoren

Der zweite Teil dieses Kapitels betrachtet spektrale Summen, in die der Feynman-Propagator eingeht bzw. die in enger Verbindung mit der Banks-Casher-Relation stehen. Die abgeleiteten Potenzreihen werden an dieser Stelle für beide Eichgruppen noch einmal zusammengestellt.

Für die Eichgruppe $SU(2)$ ist der Polyakov-Loop der betrachteten Eichkonfiguration

$$\mathcal{P} = 2 \cos(\alpha \beta g_0).$$

Wegen der chiralen Symmetrie des Dirac-Operators muß für die spektralen Summen, die den Feynman-Propagator enthalten, eine nichtverschwindende Masse eingeführt werden. In d Dimensionen ist die Potenzreihe der Feynmansumme

$$\Sigma_{\text{SU}(2)}^{(-1)} = \sum_{n_1=1}^{\infty} \mathcal{A}_{2n_1+1}(L, \beta, m) \times \sum_{r=0}^{n_1} (-)^r \binom{2n_1+1}{2r} \left(\frac{\mathcal{P}}{2}\right)^{2n_1+1-2r} \left(1 - \frac{\mathcal{P}^2}{4}\right)^{2r}$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_k(L, \beta, m) = & -im \sum_{n_2, \dots, n_d = -\infty}^{\infty} 32 \cdot \pi \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{-3/2} \left[\sum_{j=2}^d \left(\frac{2\pi}{L_j} n_j\right)^2 + m^2 \right]^{-1/4} \\ & \times \sqrt{k} \cdot K_{1/2} \left[2\pi k \left(\frac{\beta}{2\pi}\right) \sqrt{\sum_{j=2}^d \left(\frac{2\pi}{L_j} n_j\right)^2 + m^2} \right]. \end{aligned}$$

Für die Eichgruppe SU(3) ist der Polyakov-Loop der betrachteten Eichkonfiguration

$$\mathcal{P} = 2 e^{i\beta g_0 \alpha_2} \cos(\beta g_0 \alpha_1) + e^{-2i\beta g_0 \alpha_2}$$

und die Potenzreihe der Feynmansumme in d Dimensionen

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{SU}(3)}^{(-1)} = & \sum_{n_1=0}^{\infty} \left[\mathcal{A}_{3n_1+1}(L, \beta, m) \left(2 e^{i(3n_1+1)\beta g_0 \alpha_2} \cos[(3n_1+1)\beta g_0 \alpha_1] + e^{-2i(3n_1+1)\beta g_0 \alpha_2} \right) \right. \\ & \left. + \mathcal{A}_{3n_1+2}(L, \beta, m) \left(2 e^{i(3n_1+2)\beta g_0 \alpha_2} \cos[(3n_1+2)\beta g_0 \alpha_1] + e^{-2i(3n_1+2)\beta g_0 \alpha_2} \right) \right] \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_k(L, \beta, m) = & -im \sum_{n_2, \dots, n_d = -\infty}^{\infty} 16 \cdot \pi \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{-3/2} \left[\sum_{j=2}^d \left(\frac{2\pi}{L_j} n_j\right)^2 + m^2 \right]^{-1/4} \\ & \times \sqrt{k} \cdot K_{1/2} \left[2\pi k \left(\frac{\beta}{2\pi}\right) \sqrt{\sum_{j=2}^d \left(\frac{2\pi}{L_j} n_j\right)^2 + m^2} \right]. \end{aligned}$$

Im Limes $m \rightarrow 0$ ergibt sich aus der Feynmansumme die Banks-Casher-Summe:

$$\Sigma^{(-2)} = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{i \cdot \Sigma^{(-1)}}{m}$$

Die Potenzreihe der Banks-Casher-Summe für die Eichgruppe SU(2) ist

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{SU}(2)}^{(-2)} = & \sum_{n_1=0}^{\infty} \mathcal{B}_{2n_1+1}(L, \beta) \\ & \times \sum_{r=0}^{n_1} (-)^r \binom{2n_1+1}{2r} \left(\frac{\mathcal{P}}{2}\right)^{2n_1+1-2r} \left(1 - \frac{\mathcal{P}^2}{4}\right)^{2r} + 4 \cdot \beta^2 \frac{\mathcal{P}}{2 - \mathcal{P}^2/2} \end{aligned}$$

mit

$$\mathcal{B}_k(L, \beta) = \sum_{n_2, \dots, n_d=1}^{\infty} 64\pi \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{-3/2} \sqrt{k} \left[\sum_{j=2}^d \left(\frac{2\pi}{L_j} n_j\right)^2 \right]^{-1/4} \\ \times K_{1/2} \left[k\beta \sqrt{\sum_{j=2}^d \left(\frac{2\pi}{L_j} n_j\right)^2} \right],$$

für die Eichgruppe $SU(3)$ erhält man

$$\Sigma_{SU(3)}^{(-2)} = \sum_{n_1=0}^{\infty} \left[\mathcal{B}_{3n_1+1}(L, \beta) \left(2e^{i(3n_1+1)\beta g_0 \alpha_2} \cos[(3n_1+1)\beta g_0 \alpha_1] + e^{-2i(3n_1+1)\beta g_0 \alpha_2} \right) \right. \\ \left. + \mathcal{B}_{3n_1+2}(L, \beta) \left(2e^{i(3n_1+2)\beta g_0 \alpha_2} \cos[(3n_1+2)\beta g_0 \alpha_1] + e^{-2i(3n_1+2)\beta g_0 \alpha_2} \right) \right] \\ - 12 \cdot \beta^2 \frac{\mathcal{P} (2\mathcal{P}^{*3} + \mathcal{P}^3) (9 + |\mathcal{P}|^2) - 3\mathcal{P}^{*2} (\mathcal{P}^{*3} + 5\mathcal{P}^3)}{(\mathcal{P}^3 - \mathcal{P}^{*3})^2}$$

mit

$$\mathcal{B}_k(L, \beta) = \sum_{n_2, \dots, n_d=-\infty}^{\infty} 32\pi \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{-3/2} \left[\sum_{j=2}^d \left(\frac{2\pi}{L_j} n_j\right)^2 \right]^{-1/4} \sqrt{k} \cdot K_{1/2} \left[k\beta \sqrt{\sum_{j=2}^d \left(\frac{2\pi}{L_j} n_j\right)^2} \right].$$

Vergleich mit der gaußschen Summe

Im Gegensatz zur gaußschen Summe hängen die Entwicklungskoeffizienten \mathcal{A}_k bzw. \mathcal{B}_k nichttrivial von allen Parametern des Torus ab, während für die gaußsche Summe die räumliche Ausdehnung nur als einfacher Faktor eingeht. Da alle betrachteten spektralen Summen das gleiche Transformationsverhalten unter Zentrumssymmetrie haben, unterscheiden sich die einzelnen Potenzreihen nur in den Entwicklungskoeffizienten.

7.9 Instantonen in zwei Dimensionen – $SU(2)$

Als etwas kompliziertere Feldkonfiguration der Eichgruppe $SU(2)$ wird in diesem Abschnitt eine Konfiguration betrachtet, die zu Instantonen⁵ führt. Dieser Abschnitt ist ein kurzer Exkurs und es werden nur die für die spektralen Summen relevanten Aspekte angeführt, für die Details sei auf [73] verwiesen. Als Eichfeld wird

$$\mathfrak{A}_0 = \frac{1}{g_0} \left(-\frac{\Phi}{V} x^1 + \frac{2\pi}{\beta} \eta \right) \cdot \sigma_3 \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}_1 = 0, \quad V = \beta \cdot L, \quad \eta \equiv \text{const.}$$

mit $\Phi \neq 0$ betrachtet, das getwistete Eichfeld ist

$${}^z\mathfrak{A}_0 = \frac{1}{g_0} \left(-\frac{\Phi}{V} x^1 + \frac{2\pi}{\beta} \eta + \frac{\pi}{\beta} \right) \cdot \sigma_3 \quad \text{und} \quad {}^z\mathfrak{A}_1 = 0.$$

⁵Instantonen sind klassische Lösungen der euklidischen Bewegungsgleichungen. Für einen Review über Instantonen in der QCD siehe z. B. [74]

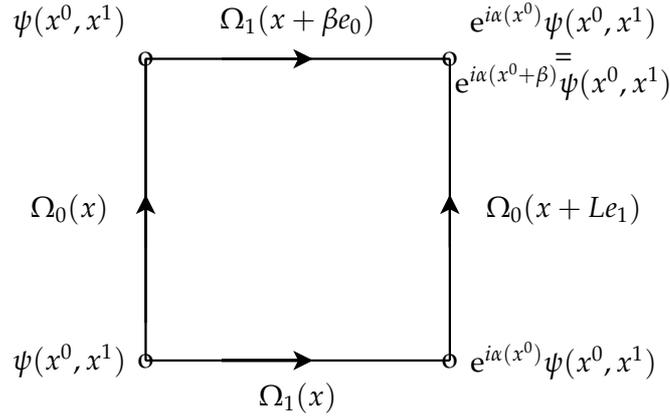


Abbildung 7.18: Übergangsfunktionen für die Wellenfunktionen.

Die an die Wellenfunktionen gestellten Randbedingungen sind

$$\psi(x^0 + \beta, x^1) = \psi(x^0, x^1), \quad \psi(x^0, x^1 + L) = e^{i\alpha(x)} \psi(x^0, x^1),$$

d. h. die Übergangsfunktionen haben die Form

$$\Omega_0(x) = \mathbb{1} \quad \text{und} \quad \Omega_1(x) = e^{i\alpha(x)} \mathbb{1}.$$

Für die Eichfelder gilt

$$\mathfrak{A}_\mu(x^0, x^1 + L) - \mathfrak{A}_\mu(x^0, x^1) = \partial_\mu \alpha(x).$$

Da $\mathfrak{A}_1 \equiv 0$ gewählt wird, ergibt sich daraus für α der Ausdruck

$$\alpha(x) = -\frac{\Phi}{g_0\beta} x^0.$$

Aus der Konsistenzbedingung der Wellenfunktionen auf dem Torus (vgl. Abb. 7.18) folgt die Quantisierungsbedingung

$$\Phi = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

da

$$e^{i\alpha(x^0+\beta)} = e^{i\alpha(x^0)}$$

erfüllt sein muß. Im folgenden wird $n \neq 0$ betrachtet, da $n = 0$ auf den bisher betrachteten Fall konstanter Eichfelder führt.

Der zugehörige Polyakov-Loop ist

$$\mathfrak{L}(x^1) = 2 \cos\left[\left(-\frac{\Phi}{V} x^1 + \frac{2\pi}{\beta} \eta\right) \beta\right]$$

und man bestätigt leicht, daß

$$z\mathfrak{L}(x^1) = -\mathfrak{L}(x^1) = z \cdot \mathfrak{L}(x^1)$$

gilt. Der räumlich gemittelte Polyakov-Loop ist

$$\mathcal{P} = \frac{1}{L} \int dx^1 \mathfrak{L}(x^1) = \frac{2}{L} \int dx^1 \cos\left[-\frac{2\pi n}{V}x^1 + \frac{2\pi}{\beta}\eta\right]\beta = 0 \quad \text{für } n \neq 0,$$

d. h. diese Eichfeldkonfiguration hat einen verschwindenden, mittleren Polyakov-Loop.

In [73] sind die Eigenwerte für diese Konfiguration berechnet worden. Sie hängen für $\Phi \neq 0$ nicht vom harmonischen Anteil η ab, der auch den Twist enthält. Damit verschwinden alle spektralen Summen für diese Eichfeldkonfiguration. Dies ist in Übereinstimmung damit, daß der gemittelte Polyakov-Loop verschwindet.

8 Zusammenfassung und Ausblick

*There is something fascinating about science.
One gets such wholesale returns of conjecture
out of such a trifling investment of fact.*

Mark Twain

Das Thema der vorliegenden Arbeit ist ein möglicher Zusammenhang zwischen Confinement und chiraler Symmetriebrechung. Der Ordnungsparameter für den Phasenübergang zwischen Brechung und Wiederherstellung der chiralen Symmetrie wird durch die Banks-Casher-Relation mit den Nullmoden des Dirac-Operators verknüpft. Im Rahmen dieser Arbeit wird untersucht, wie der Polyakov-Loop – der Ordnungsparameter des Confinement-Deconfinement-Übergang – mit dem Spektrum des Dirac-Operators zusammenhängt.

Ausgangspunkt ist die Beobachtung C. Gattringers, daß sich der Polyakov-Loop auf dem Gitter als Potenzfunktion der Eigenwerte des Dirac-Wilson-Operators ausdrücken läßt [27]. Diese Beziehung wird in dieser Arbeit für beliebige $SU(\mathcal{N})$ -Eichgruppen betrachtet. Mit numerischen Rechnungen wird bestätigt, daß der ultraviolette Spektralanteil des Dirac-Wilson-Operators den wesentlichen Beitrag zum Polyakov-Loop liefert. Im Hinblick auf einen möglichen gemeinsamen Mechanismus für Confinement und chirale Symmetriebrechung ist aber besonders der infrarote Anteil des Spektrums von Interesse. Deshalb werden allgemeine spektrale Summen des Dirac-Wilson-Operators mit Eichgruppe $SU(\mathcal{N})$ betrachtet, die ihre Hauptbeiträge vom infraroten Anteil des Spektrums bekommen. Ein Ergebnis dieser Arbeit ist, daß jede Spektralfunktion der Form

$$\mathcal{S}(f) \propto \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} z_k^* \cdot \text{tr} f(z_k \mathfrak{D})$$

ein Ordnungsparameter für den Confinement-Deconfinement-Übergang ist, weil sie das gleiche Transformationsverhalten unter der Zentrumssymmetrie wie der Polyakov-Loop besitzt. $f(z_k \mathfrak{D})$ ist eine beliebige Funktion des Dirac-Operators, dessen Randbedingungen in Zeitrichtung mit dem Zentrumselement z_k getwistet werden. Der Polyakov-Loop ergibt sich für $f(z_k \mathfrak{D}) = z_k \mathfrak{D}^{N_t}$, wobei N_t die Gittergröße in Zeitrichtung ist.

Von besonderem Interesse für diese Arbeit sind

- die *gaußsche Summe* mit $f(z_k \mathfrak{D}) = \exp(-z_k \mathfrak{D} z_k \mathfrak{D}^\dagger)$, die mit der Heat-Kernel-Regularisierung der Fermiondeterminante im Zusammenhang steht,
- die *Feynmansumme* mit $f(z_k \mathfrak{D}) = z_k \mathfrak{D}^{-1}$, in die der Feynman-Propagator eingeht
- und die *Banks-Casher-Summe* mit $f(z_k \mathfrak{D}) = z_k \mathfrak{D}^{-2}$, die mit der Banks-Casher-Relation in Verbindung steht.

Alle drei Summen sind in guter Näherung proportional zum Polyakov-Loop. Dies wird numerisch mit Monte-Carlo-Simulationen auf einem Gitter der Größe $4^3 \times 3$ gezeigt und analytisch mit einer einfachen Modellkonfiguration, welche die wesentlichen Effekte reproduziert, bestätigt. Außerdem wird gezeigt, daß diese Summen vom Infrarotanteil des Spektrums bestimmt werden. Es genügt ein geringer Anteil der betragsmäßig kleinsten Eigenwerte, um die volle spektrale Summe rekonstruieren zu können. Hierfür ist die gaußsche Summe am besten geeignet, da sie am schnellsten konvergiert. Für einen Zusammenhang zwischen Confinement und chiraler Symmetrie sind aber vermutlich die Feynman-Summe und die Banks-Casher-Summe interessanter. Diese Ergebnisse sind in [84] veröffentlicht.

Offen bleibt, ob die betrachteten spektralen Summen auf dem Gitter einen Kontinuumslimites besitzen. Hierzu ist es interessant zu untersuchen, ob sich das beobachtete Verhalten der spektralen Summen auch für größere Gitter erhält.

Der letzte Teil der Arbeit überträgt die Ergebnisse, die für die obigen spektralen Summen auf dem Gitter gewonnen wurden, auf einige Spezialfälle im Kontinuum. Die zugrundeliegende Raumzeit ist ein zwei- bzw. ein d -dimensionaler, euklidischer Torus, es werden die Eichgruppen $SU(2)$ und $SU(3)$ betrachtet und einfache Eichfeldkonfigurationen ausgewählt, für die es möglich ist, die Eigenwerte des Dirac-Operators analytisch zu berechnen. In allen Fällen ist es gelungen, eine analytische Beziehung zwischen den spektralen Summen und dem Polyakov-Loop herzustellen, indem jeweils eine Potenzreihendarstellung angegeben wird, die den Polyakov-Loop und den komplex konjugierten Loop enthält. Damit ist es insbesondere gelungen, für diese speziellen Eichkonfigurationen einen Zusammenhang zwischen dem Ordnungsparameter des Confinement-Deconfinement-Phasenübergangs und dem Propagator, der in die Banks-Casher-Relation eingeht, herzustellen.

Zum Abschluß der Arbeit wird eine ortsabhängige Instantonkonfiguration des Eichfeldes betrachtet. Diese Eichfeldkonfiguration hat einen verschwindenden gemittelten Polyakov-Loop. Hier wird gezeigt, daß die spezielle Struktur der Eigenwerte dazu führt, daß die obigen spektralen Summen in Übereinstimmung damit verschwinden.

Dies führt zu der Frage, wie sich die spektralen Summen im Kontinuum für kompliziertere Eichfeldkonfigurationen verhalten. Einer analytischen Untersuchung komplizierterer Eichkonfigurationen steht allerdings im Wege, daß sich für diese die Eigenwerte des Dirac-Operators in der Regel nicht mehr berechnen lassen.

Interessant ist auch, die spektralen Summen nicht nur mit dem räumlich gemittelten Polyakov-Loop in Verbindung zu bringen, sondern auch mit dem räumlich aufgelösten. Für die Instantonkonfiguration wird dies zur Zeit untersucht.

Diese Arbeit ist ein Schritt in die Richtung, die Ordnungsparameter für chirale Symmetriebrechung und Confinement zu verbinden. Sie wirft die Frage auf, ob der Polyakov-Loop die richtige Größe ist, um den Zusammenhang zwischen Confinement und chiraler Symmetriebrechung zu untersuchen, oder ob andere Ordnungsparameter wie die Feynmansumme oder die Banks-Casher-Summe, die ihren wesentlichen Beitrag vom Infrarotanteil des Spektrums bekommen, besser geeignet sind.

A Konventionen

Consistency: Every time you release an apple over Sir Isaac Newton, it will drop on his head. That's good.

Jakob Nielsen

In diesem Abschnitt werden die verwendeten Größen und die verwendeten Einheiten noch einmal übersichtlich zusammengestellt.

A.1 Definitionen der Größen

Verwendete Metrik

In dieser Arbeit ist die Konvention für die Minkowski-Metrik bzw. die euklidische Metrik

$$g_{\mu\nu}^M = \eta_{\mu\nu} = (+, -, \dots, -) \quad \text{und} \quad g_{\mu\nu}^E = \delta_{\mu\nu} = (+, \dots, +).$$

Formulierung im Kontinuum

Die kovariante Ableitung ist als

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_0 \mathfrak{A}_\mu^a T_a,$$

definiert und der Feldstärketensor als

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{\mu\nu}^a T_a &\equiv \frac{i}{g_0} [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu \mathfrak{A}_\nu^a T_a - \partial_\nu \mathfrak{A}_\mu^a T_a - ig_0 [\mathfrak{A}_\mu^b T_b, \mathfrak{A}_\nu^c T_c] \\ &= \partial_\mu \mathfrak{A}_\nu^a T_a - \partial_\nu \mathfrak{A}_\mu^a T_a + g_0 f_{bc}^a \mathfrak{A}_\mu^b \mathfrak{A}_\nu^c T_a, \end{aligned}$$

wobei $[T_b, T_c] = if_{bc}^a T_a$ mit den Strukturkonstanten f_{bc}^a benutzt wurde. Die Wirkung hat damit die Form

$$S = \int d^d x \mathcal{L} = \int d^d x \text{tr} \left[-\frac{1}{4} \mathfrak{F}_{\mu\nu}^a \mathfrak{F}_a^{\mu\nu} + \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi \right].$$

Formulierung auf dem Gitter

Für die Gitterformulierung ist es sinnvoll, die Eichfelder und die Feldstärke mit der Kopplungskonstante zu reskalieren:

$$g_0 \mathfrak{A}_\mu \rightarrow \tilde{\mathfrak{A}}_\mu, \quad g_0 \mathfrak{F}_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{\mathfrak{F}}_{\mu\nu}$$

Die Wirkung geht damit über in

$$\tilde{S} = \frac{1}{g_0^2} \int d^d x \mathcal{L} = \frac{1}{g_0} \int d^d x \operatorname{tr} \left[-\frac{1}{4} \tilde{\mathfrak{F}}_{\mu\nu}^a \tilde{\mathfrak{F}}_a^{\mu\nu} + \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \tilde{D}_\mu \psi \right].$$

A.2 Das Einheitensystem

In dieser Arbeit wird mit natürlichen Einheiten gerechnet, in denen

$$\hbar = c = 1$$

ist. Aus den grundlegenden Gleichungen der Physik lassen sich damit die Einheiten der physikalischen Größen ineinander umrechnen. Es gilt

$$[\text{Energie}] = [\text{Masse}] = [\text{Zeit}]^{-1} = [\text{Länge}]^{-1}.$$

In dieser Arbeit werden die physikalischen Größen in Potenzen von eV angegeben.

A.3 Dimensionsbetrachtungen der Felder

Die folgende Ableitung hält sich an [64] und [67]. In natürlichen Einheiten ist die Wirkung dimensionslos, daraus lassen sich die Dimensionen der übrigen Größen ableiten. Es gilt

$$[\text{Differential}] = [\text{Länge}]^d,$$

daraus folgt

$$[\text{Lagrangedichte}] = [\text{Länge}]^{-d}.$$

Betrachtet man den kinetischen Term, folgt damit

$$[\text{Feldstärketensor}] = [\text{Länge}]^{-d/2}.$$

Die Ableitung hat die Dimension

$$[\text{Ableitung}] = [\text{Länge}]^{-1}.$$

Aus der Dimension des Feldstärketensors folgt damit für das Eichfeld

$$[\text{Eichfeld}] = [\text{Länge}]^{-d/2+1}$$

und für die Kopplungskonstante

$$[\text{Kopplungskonstante}] = [\text{Länge}]^{d/2-2}.$$

In zwei Dimensionen ist das Eichfeld damit dimensionslos, die Kopplungskonstante hat die Dimension $[\text{Länge}]^{-1}$, in vier Dimensionen hat das Eichfeld die Dimension $[\text{Länge}]^{-1}$ und die Kopplungskonstante ist dimensionslos.

B Formelsammlung

*Die mathematische Analysis [ist] gewissermaßen
eine einzige Symphonie des Unendlichen.*

David Hilbert

B.1 Spezielle Funktionen

In diesem Abschnitt werden die Definitionen und Eigenschaften der speziellen Funktionen zusammengestellt, die in dieser Arbeit verwendet werden.

Gammafunktion

Die Gammafunktion ist als

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad \Re x > 0$$

definiert [9] und es gilt die Rekursionsrelation $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$. Die Gammafunktion ist eine Verallgemeinerung der Fakultät und es gilt

$$\Gamma(m+1) = m!, \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

Spezielle Funktionswerte sind

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad \text{und} \quad \Gamma(1) = 1.$$

Die Gammafunktion hat Pole bei $x = 0, -1, -2, \dots$

Zeta-Funktionen

Die riemannsche Zeta-Funktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

ist zuerst in der Zahlentheorie aufgetreten, heute sind eine ganze Familie von Zeta-Funktionen bekannt. Es wird in dieser Arbeit neben der riemannschen Zeta-Funktion auch die Hurwitz-Funktion

$$\zeta(s, a) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+a)^{-s}$$

benötigt.

Theta-Funktionen

Die allgemeine Theta-Funktion ist als

$$\vartheta(z, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\pi n^2 \tau + 2\pi i n z}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \tau \in \mathbb{C}, \quad \Im(\tau) > 0$$

definiert [61]. Oft wird in dieser Arbeit die Beziehung

$$\vartheta(x, it) = t^{-1/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi(x-n)^2}{t}} = 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos(2\pi m x) e^{-\pi m^2 t}$$

benötigt [61, S. 33], die für reellwertige Theta-Funktion mit $z = x \in \mathbb{R}$ und $\tau/i = t \in \mathbb{R}^+$ gültig ist. Eine sehr ausführliche Abhandlung zu Theta-Funktionen findet sich auch in [92].

Besselfunktionen

Eine ausführliche Formelsammlungen zu Besselfunktion findet sich in [2] sowie in [91], dem Standardwerk über Besselfunktionen. Die modifizierte Besselfunktion zweiter Art oder Kelvinfunktion $K_\nu(z)$ ist, bis auf die negative reelle Achse, eine reguläre Funktion von z in der z -Ebene.

modifizierte Besselfunktionen 2. Art

Die Integraldarstellung ist gegeben durch

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^\infty dt t^{-\nu-1} e^{-t-z^2/4t}.$$

Für kleine Argumente gilt

$$K_\nu(z) \sim \frac{1}{2} \Gamma(\nu) \left(\frac{1}{2}z\right)^{-\nu}, \quad \Re \nu > 0.$$

Für große Argumente existiert die asymptotische Entwicklung ($\mu = 4\nu^2$)

$$K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left[1 + \frac{\mu-1}{8z} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)}{2!(8z)^2} + \dots \right], \quad |\arg z| < \frac{3}{2}\pi,$$

das heißt, $\lim_{z \rightarrow \infty} K_\nu(z) = 0$.

C Rechnungen zu Kapitel 5 und 7

Zwei Dinge sind zu unserer Arbeit nötig: Unermüdliche Ausdauer und die Bereitschaft, etwas, in das man viel Zeit und Arbeit gesteckt hat, wieder wegzwerfen.

Albert Einstein

In diesem Teil werden die ziemlich langen, aber einfachen Rechnungen, die in Kapitel 5 benötigt werden, um den Polyakov-Loop aus der spektralen Summe herauszuprojezieren und in Kapitel 7 zur Berechnung der spektralen Summen notwendig sind, ausgeführt.

C.1 Beweis der $2d - \lambda$ -Symmetrie

Die Gitterpunkte werden mit $x = (x_1, \dots, x_d)$ bezeichnet, die x_μ laufen jeweils von eins bis N_μ . Man definiert die hermitesche und symmetrische Matrix

$$\Theta(x, y) = (-)^{x_1 + \dots + x_d} \delta_{x, y}.$$

Es gilt $\Theta^2 = 1$ und

$$\sum_{z_1, z_2} \Theta(x, z_1) \delta_{z_1 \pm e_\mu, z_2} \Theta(z_2, y) = (-)^{x_1 + \dots + x_d + y_1 + \dots + y_d} \delta_{x \pm e_\mu, y}.$$

Wegen $\delta_{x \pm e_\mu, y}$ wird y zu $y = (x_1, \dots, x_{\mu-1}, x_\mu \pm 1, x_{\mu+1}, \dots, x_d)$. Damit gilt für obige Transformation, solange man sich nicht am Rand des Gitters befindet

$$\Theta \delta_{x \pm e_\mu, y} \Theta \equiv \sum_{z_1, z_2} \Theta(x, z_1) \delta_{z_1 \pm e_\mu, z_2} \Theta(z_2, y) = -\delta_{x \pm e_\mu, y}.$$

Interessant wird es auf den Randpunkten $x_\mu = N_\mu$ und $y_\mu = 1$ bzw. umgekehrt. Hat das Gitter in μ -Richtung eine gerade Anzahl Gitterpunkte N_μ , ist $x_\mu \pm y_\mu$ ungerade und es gilt wieder $\Theta \delta_{x \pm e_\mu, y} \Theta = -\delta_{x \pm e_\mu, y}$. Für eine ungerade Anzahl ist $x_\mu \pm y_\mu$ gerade und es ergibt sich $\Theta \delta_{x \pm e_\mu, y} \Theta = \delta_{x \pm e_\mu, y}$.

Mit dieser Transformation ergibt sich

$$\begin{aligned}
 2(m+d) - \mathfrak{D} &= m+d + \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^4 [1 - \gamma_{\mu}] \mathfrak{U}_{\mu}(x) \delta_{x+e_{\mu}, y} + \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^4 [1 + \gamma_{\mu}] \mathfrak{U}_{\mu}^{\dagger}(x - e_{\mu}) \delta_{x-e_{\mu}, y} \\
 &= m+d - \Theta \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^4 [1 - \gamma_{\mu}] \mathfrak{U}_{\mu}(x) \delta_{x+e_{\mu}, y} \Theta \\
 &\quad - \Theta \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^4 [1 + \gamma_{\mu}] \mathfrak{U}_{\mu}^{\dagger}(x - e_{\mu}) \delta_{x-e_{\mu}, y} \Theta \\
 &= \Theta \mathfrak{D} \Theta
 \end{aligned}$$

und damit folgt für $\mathfrak{D}|l\rangle = \lambda |l\rangle$, daß $2(m+d) - \lambda$ Eigenwert zu $\Theta |l\rangle$ ist. Das gleiche gilt für die Rechtseigenwerte.

Diese Beweisidee ist [28] entnommen.

C.2 Rechnung zu den Zentrumselementen

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß

$$\sum_{k=1}^{\mathcal{N}} z_k^2 = 0$$

für $\mathcal{N} > 2$ gilt. Dazu werden die folgenden Fälle unterschieden:

- Für *ungerade* \mathcal{N} gilt:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} z_k^2 &= \sum_{k=1}^{\mathcal{N}/2-1/2} \exp\left(\frac{2i\pi}{\mathcal{N}} \cdot 2k\right) + \sum_{\mathcal{N}/2-1/2}^{\mathcal{N}} \exp\left(\frac{2i\pi}{\mathcal{N}} \cdot 2k\right) \\
 &= \sum_{k=1}^{\mathcal{N}/2-1/2} \exp\left(\frac{2i\pi}{\mathcal{N}} \cdot 2k\right) + \sum_{\mathcal{N}/2-1/2}^{\mathcal{N}} \exp\left(\frac{2i\pi}{\mathcal{N}} \cdot (2k - \mathcal{N})\right)
 \end{aligned}$$

Der erste Summand liefert die Zentrumselemente mit geradem Argument, der zweite Summand die mit ungeradem, so daß sich $\sum_{k=1}^{\mathcal{N}} z_k^2$ für ungerade \mathcal{N} auf die Summe über alle Zentrumselemente reduziert und damit verschwindet.

- Für *gerade* \mathcal{N} gilt :

$$\sum_{k=1}^{\mathcal{N}} z_k^2 = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \exp\left(\frac{2\pi i k}{\mathcal{N}}\right)^2 = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \exp\left(\frac{2\pi i k}{\mathcal{N}/2}\right) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{\mathcal{N}/2} z_i,$$

also gerade zweimal die Summe über die Zentrumselemente der $SU(\mathcal{N}/2)$.

C.3 Berechnung der Eigenwerte für die Eichgruppe SU(2)

Explizit ausgeschrieben liefert \mathfrak{D}^2

$$\left(-\partial_0^2 \cdot \mathbb{1} + 2i\alpha g_0 \begin{pmatrix} \partial_0 & 0 \\ 0 & -\partial_0 \end{pmatrix} + (\alpha g_0)^2 \cdot \mathbb{1} - \partial_1^2 \cdot \mathbb{1} \right) \psi = \lambda^2 \psi.$$

Der Lösungsansatz für die Wellenfunktion ist $\psi = \psi_1 + \psi_2$ mit

$$\psi_1 = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^{ik_0 x^0 + ik_1 x^1} \quad \text{und} \quad \psi_2 = a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{iq_0 x^0 + iq_1 x^1},$$

damit erhält man für die Quadrate der Eigenwerte

$$\lambda_1^2 = k_0^2 - 2\alpha g_0 k_0 + (\alpha g_0)^2 + k_1^2 \quad \text{und} \quad \lambda_2^2 = q_0^2 + 2\alpha g_0 q_0 + (\alpha g_0)^2 + q_1^2.$$

Berücksichtigen der Randbedingungen liefert für die erste Basislösung ($a_2 = 0$) die Bedingungen

$$\begin{aligned} \exp \left[ik_0 (x^0 + \beta) + ik_1 x^1 \right] &\stackrel{!}{=} \exp \left[ik_0 x^0 + ik_1 x^1 \right] \\ \exp \left[ik_0 x^0 + i(k_1 x^1 + L) \right] &\stackrel{!}{=} \exp \left[ik_0 x^0 + ik_1 x^1 \right] \end{aligned}$$

und damit für die Werte von k_0 und k_1

$$k_0 = \frac{2\pi}{\beta} \cdot m_1, \quad k_1 = \frac{2\pi}{L} \cdot l_1, \quad l_1, m_1 \in \mathbb{Z}.$$

Analog ergibt sich für die zweite Basislösung ($a_1 = 0$)

$$q_0 = \frac{2\pi}{\beta} \cdot m_2, \quad q_1 = \frac{2\pi}{L} \cdot l_2, \quad l_2, m_2 \in \mathbb{Z}.$$

Die Eigenwerte sind damit zweifach entartet und lauten

$$\lambda(m, l)^2 = \left(\frac{2\pi}{\beta} \cdot m - \alpha g_0 \right)^2 + \left(\frac{2\pi}{L} \cdot l \right)^2, \quad l, m \in \mathbb{Z}.$$

C.4 Berechnung der Eigenwerte für die Eichgruppe SU(3)

Explizit ausgeschrieben lautet das Eigenwertproblem

$$\begin{aligned} &(-\partial_0^2 \cdot \mathbb{1} + 2ig_0 \cdot \text{diag} [\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_1, -2\alpha_2] \\ &+ g_0^2 \cdot \text{diag} [(\alpha_1 + \alpha_2)^2, (\alpha_2 - \alpha_1)^2, 4\alpha_2^2] - \partial_1^2 \cdot \mathbb{1}) \psi = \lambda \psi. \end{aligned}$$

Die Basisfunktionen sind

$$\psi_1 = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^{ik_0 x^0 + ik_1 x^1}, \quad \psi_2 = a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^{iq_0 x^0 + iq_1 x^1}, \quad \psi_3 = a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{ir_0 x^0 + ir_1 x^1}.$$

Damit erhält man die drei Eigenwertgleichungen

$$\begin{aligned}\lambda_1^2 &= (k_0 - g_0(\alpha_1 + \alpha_2))^2 + k_1^2, \\ \lambda_2^2 &= (q_0 - g_0(-\alpha_1 + \alpha_2))^2 + q_1^2, \\ \lambda_3^2 &= (r_0 + 2g_0\alpha_2)^2 + r_1^2.\end{aligned}$$

Die periodischen Randbedingungen erzwingen die Quantisierung in Raumrichtung

$$k_1 = \frac{2\pi l_1}{L}, \quad q_1 = \frac{2\pi l_2}{L}, \quad r_1 = \frac{2\pi l_3}{L}, \quad l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{Z}$$

und in Zeitrichtung

$$k_0 = \frac{2\pi m_1}{\beta}, \quad q_0 = \frac{2\pi m_2}{\beta}, \quad r_0 = \frac{2\pi m_3}{\beta}, \quad m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}.$$

Damit ergibt sich für die Eigenwerte des Dirac-Operators

$$\begin{aligned}\lambda_1(m_1, l_1)^2 &= \left(\frac{2\pi m_1}{\beta} - g_0(\alpha_1 + \alpha_2) \right)^2 + \left(\frac{2\pi l_1}{L} \right)^2 \\ \lambda_2(m_2, l_2)^2 &= \left(\frac{2\pi m_2}{\beta} - g_0(-\alpha_1 + \alpha_2) \right)^2 + \left(\frac{2\pi l_2}{L} \right)^2 \\ \lambda_3(m_3, l_3)^2 &= \left(\frac{2\pi m_3}{\beta} + 2g_0\alpha_2 \right)^2 + \left(\frac{2\pi l_3}{L} \right)^2.\end{aligned}$$

C.5 Ausdrücken der gaußschen Summe durch Potenzen des Polyakov-Loops

Für die Berechnung wird die Beziehung

$$\vartheta(x, it) = 1 + 2 \sum_m \cos(2\pi mx) e^{-\pi m^2 t}$$

mit $t = (\beta\Lambda)^2/4\pi$ und den folgenden x_i benötigt:

$$\begin{array}{lll} x_1 = \frac{g_0\beta}{2\pi}(\alpha_2 + \alpha_1) & x_2 = \frac{g_0\beta}{2\pi}(\alpha_2 - \alpha_1) & x_3 = -\frac{g_0\beta}{\pi}\alpha_2, \\ z_1 x_1 = \frac{g_0\beta}{2\pi}(\alpha_2 + \alpha_1) + \frac{1}{3} & z_1 x_2 = \frac{g_0\beta}{2\pi}(\alpha_2 - \alpha_1) + \frac{1}{3} & z_1 x_3 = -\frac{g_0\beta}{\pi}\alpha_2 - \frac{2}{3} \\ z_2 x_1 = \frac{g_0\beta}{2\pi}(\alpha_2 + \alpha_1) + \frac{2}{3} & z_2 x_2 = \frac{g_0\beta}{2\pi}(\alpha_2 - \alpha_1) + \frac{2}{3} & z_2 x_3 = -\frac{g_0\beta}{\pi}\alpha_2 - \frac{4}{3} \end{array}$$

Beitrag der Summanden mit λ_1^2 : Die entsprechenden Summanden aus der gaußschen Summe zusammengefaßt liefern

$$\sqrt{t} \left[1 + 2 \sum_m \cos(g_0 \beta (\alpha_2 + \alpha_1) m) e^{-\pi m^2 t} \right. \\ \left. + z_1^* \left(1 + 2 \sum_m \cos(g_0 \beta (\alpha_2 + \alpha_1) m + \frac{2m\pi}{3}) e^{-\pi m^2 t} \right) \right. \\ \left. + z_2^* \left(1 + 2 \sum_m \cos(g_0 \beta (\alpha_2 + \alpha_1) m + \frac{4m\pi}{3}) e^{-\pi m^2 t} \right) \right].$$

Die Eins in den drei Summanden hebt sich in der Summe über die Zentrumselemente weg, übrig bleibt

$$\sqrt{t} \left[2 \sum_m \cos(g_0 \beta (\alpha_2 + \alpha_1) m) e^{-\pi m^2 t} + 2z_1^* \sum_m \cos(g_0 \beta (\alpha_2 + \alpha_1) m + \frac{2m\pi}{3}) e^{-\pi m^2 t} \right. \\ \left. + 2z_2^* \sum_m \cos(g_0 \beta (\alpha_2 + \alpha_1) m + \frac{4m\pi}{3}) e^{-\pi m^2 t} \right].$$

Betrachtet man zuerst einen Summanden mit festem m , erhält man

$$\cos(m\beta g_0 (\alpha_2 + \alpha_1)) + z_1^* \cos\left(m\beta g_0 (\alpha_2 + \alpha_1) + \frac{2\pi m}{3}\right) \\ + z_2^* \cos\left(m\beta g_0 (\alpha_2 + \alpha_1) - \frac{2\pi m}{3}\right).$$

Ausschreiben des Zentrumselements in den letzten beiden Summanden ergibt mit Hilfe von Additionstheoremen für den Kosinus

$$2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \cos(m\beta g_0 (\alpha_2 + \alpha_1)) \cos\left(\frac{2\pi m}{3}\right) \\ + 2i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \sin(m\beta g_0 (\alpha_2 + \alpha_1)) \sin\left(\frac{2\pi m}{3}\right).$$

Damit ergibt sich für einen Summanden zu festem m insgesamt

$$\cos(m\beta g_0 (\alpha_2 + \alpha_1)) + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \cos(m\beta g_0 (\alpha_2 + \alpha_1)) \cos\left(\frac{2\pi m}{3}\right) \\ + 2i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \sin(m\beta g_0 (\alpha_2 + \alpha_1)) \sin\left(\frac{2\pi m}{3}\right).$$

Jetzt sind 3 Fälle für die Werte von m zu unterscheiden:

$m = 3n$: Die Summe verschwindet.

$m = 3n + 1$:

$$\begin{aligned} & \cos(m\beta g_0(\alpha_2 + \alpha_1)) + 2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) \cos(m\beta g_0(\alpha_2 + \alpha_1)) \\ & \quad + 2i \sin^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) \sin(m\beta g_0(\alpha_2 + \alpha_1)) \\ & = \frac{3}{2} [\cos(m\beta g_0(\alpha_2 + \alpha_1)) + i \sin(m\beta g_0(\alpha_2 + \alpha_1))] = \frac{3}{2} e^{im\beta g_0(\alpha_2 + \alpha_1)} \end{aligned}$$

$m = 3n + 2$:

$$\begin{aligned} & \cos(m\beta g_0(\alpha_2 + \alpha_1)) + 2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) \cos(m\beta g_0(\alpha_2 + \alpha_1)) \\ & \quad - 2i \sin^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) \sin(m\beta g_0(\alpha_2 + \alpha_1)) \\ & = \frac{3}{2} [\cos(m\beta g_0(\alpha_2 + \alpha_1)) - i \sin(m\beta g_0(\alpha_2 + \alpha_1))] = \frac{3}{2} e^{-im\beta g_0(\alpha_2 + \alpha_1)} \end{aligned}$$

Beitrag der Summanden mit λ_2^2 : Die Rechnung läuft genauso wie oben, für den Summanden zu festem m ergibt sich mit Hilfe von Additionstheoremen

$$\begin{aligned} & \cos(m\beta g_0(\alpha_2 - \alpha_1)) + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \cos(m\beta g_0(\alpha_2 - \alpha_1)) \cos\left(\frac{2\pi m}{3}\right) \\ & \quad + 2i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \sin(m\beta g_0(\alpha_2 - \alpha_1)) \sin\left(\frac{2\pi m}{3}\right). \end{aligned}$$

Für $m = 3n$ verschwindet die Summe, für $m = 3n + 1$ ergibt sich

$$\begin{aligned} & \cos(m\beta g_0(\alpha_2 - \alpha_1)) + 2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) \cos(m\beta g_0(\alpha_2 - \alpha_1)) \\ & \quad + 2i \sin^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) \sin(m\beta g_0(\alpha_2 - \alpha_1)) \\ & = \frac{3}{2} [\cos(m\beta g_0(\alpha_2 - \alpha_1)) + i \sin(m\beta g_0(\alpha_2 - \alpha_1))] = \frac{3}{2} e^{im\beta g_0(\alpha_2 - \alpha_1)}, \end{aligned}$$

und für $m = 3n + 2$ folgt

$$\begin{aligned} & \cos(m\beta g_0(\alpha_2 - \alpha_1)) + 2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) \cos(m\beta g_0(\alpha_2 - \alpha_1)) \\ & \quad - 2i \sin^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) \sin(m\beta g_0(\alpha_2 - \alpha_1)) \\ & = \frac{3}{2} [\cos(m\beta g_0(\alpha_2 - \alpha_1)) - i \sin(m\beta g_0(\alpha_2 - \alpha_1))] = \frac{3}{2} e^{-im\beta g_0(\alpha_2 - \alpha_1)}. \end{aligned}$$

Beitrag der Summanden mit λ_3^2 Einsetzen der Werte für x_3 liefert mit einer analogen Rechnung wie oben, daß die Summanden mit $m = 3n$ ebenfalls verschwinden, für $m = 3n + 1$ ergibt sich

$$\begin{aligned} & \cos(2m\beta g_0 \alpha_2) + z_1^* \cos\left(2m\beta g_0 \alpha_2 - \frac{2\pi m}{3}\right) + z_2^* \cos\left(2m\beta g_0 \alpha_2 + \frac{2\pi m}{3}\right) \\ &= \frac{3}{2} [\cos(2m\beta g_0 \alpha_2) - i \sin(2m\beta g_0 \alpha_2)] = \frac{3}{2} e^{-2im\beta g_0 \alpha_2} \end{aligned}$$

und für $m = 3n + 2$

$$\begin{aligned} & \cos(2m\beta g_0 \alpha_2) + z_1^* \cos\left(2m\beta g_0 \alpha_2 - \frac{2\pi m}{3}\right) + z_2^* \cos\left(2m\beta g_0 \alpha_2 + \frac{2\pi m}{3}\right) \\ &= \frac{3}{2} [\cos(2m\beta g_0 \alpha_2) + i \sin(2m\beta g_0 \alpha_2)] = \frac{3}{2} e^{2im\beta g_0 \alpha_2}. \end{aligned}$$

Zusammenfassen aller Terme und Berücksichtigen aller Vorfaktoren liefert für die gaußsche Summe die Reihendarstellung

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \frac{3\beta\Lambda}{2\sqrt{\pi}} \cdot \vartheta\left(0, \frac{4i\pi}{(L\Lambda)^2}\right) \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(2e^{i(3n+1)\beta g_0 \alpha_2} \cos[(3n+1)\beta g_0 \alpha_1] + e^{-2i(3n+1)\beta g_0 \alpha_2} \right) e^{-\frac{(3n+1)^2(\Lambda\beta)^2}{4}} \right. \\ &\quad \left. + \left(2e^{-i(3n+2)\beta g_0 \alpha_2} \cos[(3n+2)\beta g_0 \alpha_1] + e^{2i(3n+2)\beta g_0 \alpha_2} \right) e^{-\frac{(3n+2)^2(\Lambda\beta)^2}{4}} \right]. \end{aligned}$$

C.6 Banks-Casher, masseloser Fall, SU(3)

Ausgangspunkt der Rechnung ist

$$W_{\dim=d}^{\text{SU}(3)} = a_1^{-1} \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dc_i} \left[\underbrace{\cot(\pi c_i)}_{(1)} + \underbrace{z_1^* \cot\left(\pi c_i - \frac{\pi}{3}\right)}_{(2)} + \underbrace{z_2^* \cot\left(\pi c_i + \frac{\pi}{3}\right)}_{(3)} \right]$$

mit

$$a_1 = \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^2, \quad c_1 = -\frac{g_0\beta}{2\pi}(\alpha_1 + \alpha_2), \quad c_2 = -\frac{g_0\beta}{2\pi}(-\alpha_1 + \alpha_2), \quad c_3 = \frac{g_0\beta}{\pi}\alpha_2.$$

Für den Hauptnenner ergibt sich

$$\sin(c_i\pi) \sin(c_i\pi + \pi/3) \sin(c_i\pi - \pi/3) = \frac{1}{4} \sin(3\pi c_i), \quad i = 1, 2, 3,$$

für die Zähler ergibt sich

$$(1) \quad \cos(\pi c_i) \sin(c_i\pi - \pi/3) \sin(c_i\pi + \pi/3) = \frac{1}{4} [\cos(c_i\pi) - 4 \cos^3(c_i\pi)],$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \cos(c_i\pi - \pi/3) [\cos(2\pi/3) - i \sin(2\pi/3)] \sin(c_i\pi) \sin(c_i\pi + \pi/3) \\
 &= \frac{1}{2} \sin(c_i\pi) [\sin(2c_i\pi) + \sin(2\pi/3)] [\cos(2\pi/3) - i \sin(2\pi/3)], \\
 (3) \quad & \cos(c_i\pi + \pi/3) [\cos(2\pi/3) + i \sin(2\pi/3)] \sin(c_i\pi) \sin(c_i\pi - \pi/3) \\
 &= \frac{1}{2} \sin(c_i\pi) [\sin(2c_i\pi) - \sin(2\pi/3)] [\cos(2\pi/3) + i \sin(2\pi/3)].
 \end{aligned}$$

Zusammenfassen von (2) und (3) liefert

$$\begin{aligned}
 & \sin(c_i\pi) \sin(2c_i\pi) \cos(2\pi/3) - i \sin^2(2\pi/3) \sin(c_i\pi) \\
 &= -\sin^2(c_i\pi) \cos(c_i\pi) - \frac{3}{4} i \sin(c_i\pi).
 \end{aligned}$$

Die Ableitung der Summe $4 \cdot \frac{(1)+(2)+(3)}{\sin(3c_i\pi)}$ ist

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dc_i} \frac{\cos(c_i\pi) - 4 \cos^3(c_i\pi) - 4 \cos(c_i\pi) \sin^2(c_i\pi) - 3i \sin(c_i\pi)}{\sin(3c_i\pi)} \\
 &= \frac{d}{dc_i} \frac{\cos(c_i\pi) - 4 \cos^3(c_i\pi) - 3i \sin(c_i\pi)}{\sin(3c_i\pi)} = -\frac{d}{dc_i} \frac{3 \cos(c_i\pi) + 3i \sin(c_i\pi)}{\sin(3c_i\pi)} \\
 &= -\pi \frac{[-3 \sin(c_i\pi) + 3i \cos(c_i\pi)] \sin(3c_i\pi) - 3 [3 \cos(c_i\pi) + 3i \sin(c_i\pi)] \cos(3c_i\pi)}{\sin^2(3c_i\pi)} \\
 &= -3\pi \frac{[-2 \cos(2c_i\pi) - \cos(4c_i\pi)] + i [2 \sin(2c_i\pi) - \sin(4c_i\pi)]}{\sin^2(3c_i\pi)} = 3\pi \frac{2 e^{-2ic_i\pi} + e^{4ic_i\pi}}{\sin^2(3c_i\pi)}.
 \end{aligned}$$

Die weitere Auswertung von

$$W_{\dim=2}^{\text{SU}(3)} = 3\pi \sum_{i=1}^3 \frac{2 e^{-2ic_i\pi} + e^{4ic_i\pi}}{\sin^2(3c_i\pi)}$$

wird mit Hilfe von MAPLE gemacht. Es läßt sich durch Einsetzen leicht verifizieren, daß gilt

$$W_{\dim=2}^{\text{SU}(3)} = 3\pi \sum_{i=1}^3 \frac{2 e^{-2ic_i\pi} + e^{4ic_i\pi}}{\sin^2(3c_i\pi)} = -3\beta^2 \frac{\mathcal{P} (2\mathcal{P}^{*3} + \mathcal{P}^3) (9 + |\mathcal{P}|^2) - 3\mathcal{P}^{*2} (\mathcal{P}^{*3} + 5\mathcal{P}^3)}{(\mathcal{P}^3 - \mathcal{P}^{*3})^2}.$$

Literaturverzeichnis

- [1] *Die verschiedenen Phasen hadronischer Materie*, Denkschrift zum Jahr der Physik (2000).
- [2] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, Dover Publications, New York, 1972.
- [3] R. Alkofer and J. Greensite, *Quark confinement: The hard problem of hadron physics*, J. Phys. **G34** (2007), S3, hep-ph/0610365.
- [4] Michael Artin, *Algebra*, Birkhäuser Verlag, 1998.
- [5] R. D. Ball, *Chiral Gauge Theory*, Phys. Rept. **182** (1989), 1.
- [6] Myron Bander, *Theories of quark confinement*, Phys. Rept. **75** (1981), 205.
- [7] Tom Banks and A. Casher, *Chiral symmetry breaking in confining theories*, Nucl. Phys. **B169** (1980), 103.
- [8] Peter Braun-Munzinger and Jochen Wambach, *Extreme Materie*, Phys. J. **5** (2006), no. 10, 41.
- [9] I.N. Bronstein and K.A. Semendjajew, *Teubner-Taschenbuch der Mathematik*, Teubner Verlag, 1996.
- [10] Frank R. Brown, Norman H. Christ, Yuefan Deng, Mingshen Gao, and Thomas J. Woch, *Nature of the deconfining phase transition in $su(3)$ lattice gauge theory*, Phys. Rev. Lett. **61** (1988), no. 18, 2058–2061.
- [11] Falk Bruckmann, *Exploring the QCD vacuum - (some) recent developments in confinement and topology*, PoS (LATTICE 2007), arXiv:0710.2788 [hep-lat].
- [12] Falk Bruckmann, Christof Gattringer, and Christian Hagen, *Complete spectra of the Dirac operator and their relation to confinement*, Phys. Lett. **B647** (2007), 56–61, hep-lat/0612020.
- [13] Shailesh Chandrasekharan and Norman H. Christ, *Dirac Spectrum, Axial Anomaly and the QCD Chiral Phase Transition*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **47** (1996), 527–534, hep-lat/9509095.
- [14] Shailesh Chandrasekharan and Su-zhou Huang, *Z_3 Twisted Chiral Condensates in QCD at Finite Temperatures*, Phys. Rev. **D53** (1996), 5100–5104, hep-ph/9512323.
- [15] Claude Chevalley, *The Algebraic Theory of Spinors and Clifford Algebra – Collected Works, Volume 2*, Springer Verlag, 1997.

- [16] Michael Creutz, *Quarks, Gluons and Lattices*, Cambridge University Press, 1983, Cambridge Monographs on Mathematical Physics.
- [17] Djurdje Cvijovic and Jacek Klinowski, *A note on the hurwitz zeta function*, *Matematički Vesnik* **52** (2000), no. 1-2, 47–54, <http://www.emis.de/journals/MV/0012/6.html>.
- [18] M. A. De Andrade and F. Toppan, *Real structures in Clifford algebras and Majorana conditions in any space-time*, *Mod. Phys. Lett.* **A14** (1999), 1797–1814, hep-th/9904134.
- [19] Renée Dillinger, *Starke Kraft zwischen links und recht*, *Forschen in Jülich* **1** (2002), 26, Forschungszentrum Jülich.
- [20] Leander Dittmann, Thomas Heinzl, and Andreas Wipf, *An effective lattice theory for Polyakov loops*, *JHEP* **06** (2004), 005, hep-lat/0306032.
- [21] E. Elizalde, *On the zeta-function regularization of a two-dimensional series of Epstein-Hurwitz type*, *J. Math. Phys.* **31** (1990), 170.
- [22] E. Elizalde, *Ten physical applications of spectral zeta functions*, *Lect. Notes Phys.* **M35** (1995).
- [23] R. P. Feynman, *Space-time approach to nonrelativistic quantum mechanics*, *Rev. Mod. Phys.* **20** (1948), 367–387.
- [24] Thomas Filk, *Einführung in die Gittereichtheorien*, Universität Freiburg, WS 2000/2001, Vorlesungsskript.
- [25] Jürgen Fuchs and Christoph Schweigert, *Symmetries, Lie Algebras and Representations – A graduate course for physicists*, Cambridge University Press, 1997.
- [26] Matthias Gaberdiel, *Konforme Feldtheorie*, ETH Zürich, WS 2003/04, Vorlesungsskript.
- [27] Christof Gattringer, *Linking confinement to spectral properties of the Dirac operator*, *Phys. Rev. Lett.* **97** (2006), 032003, hep-lat/0605018.
- [28] Christof Gattringer and Ivan Hip, *On the spectrum of the Wilson-Dirac lattice operator in topologically non-trivial background configurations*, *Nucl. Phys.* **B536** (1998), 363–380, hep-lat/9712015.
- [29] Christof Gattringer, P. E. L. Rakow, Andreas Schäfer, and Wolfgang Söldner, *Chiral symmetry restoration and the $Z(3)$ sectors of QCD*, *Phys. Rev.* **D66** (2002), 054502, hep-lat/0202009.
- [30] Murray Gell-Mann, *A schematic model of baryons and mesons*, *Phys. Lett.* **8** (1964), 214–215.
- [31] A. Gonzalez-Arroyo, *Yang-Mills fields on the 4-dimensional torus. (Classical theory)*, 1997, hep-th/9807108.
- [32] J. Greensite, *The confinement problem in lattice gauge theory*, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **51** (2003), 1, hep-lat/0301023.

-
- [33] Walter Greiner and Berndt Müller, *Quantenmechanik – Symmetrien*, 4. ed., Verlag Harri Deutsch, 2005.
- [34] Walter Greiner and Andreas Schäfer, *Theoretische Physik Band 10 – Quantenchromodynamik*, Verlag Harri Deutsch, 1989.
- [35] D. J. Gross and Frank Wilczek, *Asymptotically free gauge theories. 1*, Phys. Rev. **D8** (1973), 3633–3652.
- [36] David J. Gross, *The Discovery of Asymptotic Freedom and the Emergence of QCD*, Nobel Lecture, 8. Dezember 2004.
- [37] Rajan Gupta, *Introduction to lattice QCD*, 1997, hep-lat/9807028.
- [38] Christian Hagen, Falk Bruckmann, Erek Bilgici, and Christof Gattringer, *Thin and dressed Polyakov loops from spectral sums of lattice differential operators*, PoS (LATTICE 2007), 289, arXiv:0710.0294 [hep-lat].
- [39] M. A. Halasz and J. J. M. Verbaarschot, *Effective Lagrangians and chiral random matrix theory*, Phys. Rev. **D52** (1995), 2563–2573, hep-th/9502096.
- [40] Brian C. Hall, *An Elementary Introduction to Groups and Representations*, graduate texts in mathematics **222** (2003), math-ph/0005032.
- [41] Thomas Heinzl, *Quantenchromodynamik*, Universität Jena, Wintersemester 2002/2003, Vorlesungsskript.
- [42] Thomas Hempel, *Standardmodell der Elementarteilchenphysik*, 2003, <http://www.uni-magdeburg.de/exph/biologie/Standardmodell.pdf>.
- [43] I. Hip, T. Lippert, H. Neff, K. Schilling, and W. Schroers, *Instanton dominance of topological charge fluctuations in QCD?*, Phys. Rev. **D65** (2002), 014506, hep-lat/0105001.
- [44] Ivan Hip, *Eigenvalue Spectra of Lattice Dirac Operators*, Ph.D. thesis, Karl-Franzens-Universität Graz, 1999.
- [45] Kieran Holland and Uwe-Jens Wiese, *The center symmetry and its spontaneous breakdown at high temperatures*, 2000, hep-ph/0011193.
- [46] R. Jackiw, *Introduction to the Yang-Mills Quantum Theory*, Rev. Mod. Phys. **52** (1980), 661.
- [47] Frithjof Karsch, *Lattice QCD at high temperature and density*, Lect. Notes Phys. **583** (2002), 209–249, hep-lat/0106019.
- [48] Bruria Kaufman and Lars Onsager, *Crystal Statistics. III. Short-Range Order in a Binary Ising Lattice*, Phys. Rev. **76** (1949), 1244–1252.
- [49] K. Kirsten, *Generalized multidimensional Epstein zeta functions*, J. Math. Phys. **35** (1994), 459–470.
- [50] Volker Koch, *Aspects of chiral symmetry*, Int. J. Mod. Phys. **E6** (1997), 203–250, nucl-th/9706075.

- [51] John B. Kogut et al., *Deconfinement and Chiral Symmetry Restoration at Finite Temperatures in SU(2) and SU(3) Gauge Theories*, Phys. Rev. Lett. **50** (1983), 393.
- [52] John B. Kogut, J. Polonyi, H. W. Wyld, J. Shigemitsu, and D. K. Sinclair, *Further evidence for the first order nature of the pure gauge su(3) deconfinement transition*, Nucl. Phys. **B251** (1985), 311.
- [53] John B. Kogut and Leonard Susskind, *Hamiltonian Formulation of Wilson's Lattice Gauge Theories*, Phys. Rev. **D11** (1975), 395.
- [54] Frieder Lenz, Harald Griesshammer, and Dieter Stoll, *Lectures on QCD – Foundation*, Springer, 1997, Lecture Notes in Physics.
- [55] H. Leutwyler and A. Smilga, *Spectrum of Dirac operator and role of winding number in QCD*, Phys. Rev. **D46** (1992), 5607–5632.
- [56] M. Luescher, K. Symanzik, and P. Weisz, *Anomalies of the Free Loop Wave Equation in the WKB Approximation*, Nucl. Phys. **B173** (1980), 365.
- [57] Larry D. McLerran and Benjamin Svetitsky, *Quark Liberation at high Temperature: A Monte Carlo Study of SU(2) Gauge Theory*, Phys. Rev. **D24** (1981), 450.
- [58] Hj. Mellin, *Abriß einer einheitlichen Theorie der Gamma- und der hypergeometrischen Funktionen*, Math. Ann. **68** (1910), 305–337.
- [59] István Montvay and Gernot Münster, *Quantum Fields on a Lattice*, Cambridge University Press, 1994, Cambridge Monographs on Mathematical Physics.
- [60] Ulrich Mosel, *Path Integrals in Field Theory – An Introduction*, Springer-Verlag, 2004.
- [61] David Mumford, *Tata Lectures on Theta I*, Birkhäuser Boston, 1994, Progress in Mathematics – Volume 28.
- [62] Otto Nachtmann, *Elementarteilchenphysik – Phänomene und Konzepte*, Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1986.
- [63] Mikio Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, 2. ed., Institute of Physics Publishing, 2003.
- [64] Herman Nicolai, *Einführung in die Supersymmetrie*, Albert-Einstein-Institut Golm, März 2006, Vorlesungsmitschrift.
- [65] Holger Bech Nielsen and M. Ninomiya, *No go theorem for regularizing chiral fermions*, Phys. Lett. **B105** (1981), 219.
- [66] C.C. Noack, *Grassmann-Algebren*, Universität Bremen, Sommersemester 2005, <http://www.itp.uni-bremen.de/~noack/SS05/grassmann.pdf>.
- [67] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press, 1995.
- [68] H. David Politzer, *Reliable perturbative results for strong interactions?*, Phys. Rev. Lett. **30** (1973), 1346–1349.

-
- [69] Christopher Pope, *Geometry and group theory*, Spring 2005, <http://faculty.physics.tamu.edu/pope/geom-group.pdf>.
- [70] A. Prudnikov, Yu. Brychkov, and O. Marichev, *Evaluation of integrals and the mellin transform*, J. Math. Sci. **54** (1991), 1239–1341.
- [71] P. Z. Quintas et al., *Measurement of Λ_{QCD} from ν_{μ} -Fe nonsinglet structure functions at the Fermilab Tevatron*, Phys. Rev. Lett. **71** (1993), 1307–1310.
- [72] Heinz J Rothe, *Lattice Gauge Theories – An Introduction*, 3. ed., World Scientific, 2005, World Scientific Lecture Notes in Physics – Vol. 74.
- [73] I. Sachs and A. Wipf, *Finite temperature Schwinger model*, Helv. Phys. Acta **65** (1992), 652–678.
- [74] Thomas Schäfer and Edward V. Shuryak, *Instantons in QCD*, Rev. Mod. Phys. **70** (1998), 323–426, hep-ph/9610451.
- [75] R. Scharlau and H.M. Möller, *Mathe II für Informatiker*, Universität Dortmund, Sommersemester 2006, Vorlesungsskript.
- [76] K. Scharnhorst, *Isoclinity in spinor space and Wilson fermions*, Nucl. Phys. **B581** (2000), 718–742, hep-lat/0002022.
- [77] Florian Scheck, *Theoretische Physik 3 – Klassische Feldtheorie*, Springer Verlag, 2004.
- [78] A. V. Smilga, *Aspects of chiral symmetry*, 2000, hep-ph/0010049.
- [79] Jan Smit, *Introduction to Quantum Fields on a Lattice*, Cambridge University Press, 2002, Cambridge Lecture Notes in Physics – Vol. 15.
- [80] M. F. Sohnius, *Introducing supersymmetry*, Phys. Rept. **128** (1985), 39–204.
- [81] Wolfgang Soldner, *The Polyakov Loop and the Eigenvalues of the Dirac Operator*, PoS (LATTICE 2007), arXiv:0710.2707 [hep-lat].
- [82] Misha A. Stephanov, *Chiral symmetry at finite T, the phase of the Polyakov loop and the spectrum of the Dirac operator*, Phys. Lett. **B375** (1996), 249–254, hep-lat/9601001.
- [83] Benjamin Svetitsky and Laurence G. Yaffe, *Critical Behavior at Finite Temperature Confinement Transitions*, Nucl. Phys. **B210** (1982), 423.
- [84] Franziska Synatschke, Andreas Wipf, and Christian Wozar, *Spectral sums of the Dirac-Wilson operator and their relation to the Polyakov loop*, Phys. Rev. **D75** (2007), 114003, hep-lat/0703018.
- [85] Gerard 't Hooft, *A Property of Electric and Magnetic Flux in Nonabelian Gauge Theories*, Nucl. Phys. **B153** (1979), 141.
- [86] Gerard 't Hooft, *Some Twisted Selfdual Solutions for the Yang-Mills Equations on a Hypertorus*, Commun. Math. Phys. **81** (1981), 267–275.
- [87] Gerard 't Hooft, *When was asymptotic freedom discovered? or The rehabilitation of quantum field theory*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **74** (1999), 413–425, hep-th/9808154.

- [88] Pierre van Baal, *Some Results for $SU(N)$ Gauge Fields on the Hypertorus*, Commun. Math. Phys. **85** (1982), 529.
- [89] Pierre van Baal, *$SU(N)$ Yang-Mills Solutions with Constant Field Strength on T^{*4}* , Commun. Math. Phys. **94** (1984), 397.
- [90] J. G. van der Corput, *Zur Methode der stationären Phase. II: Wiederum einfache Integrale*, Compositio math. **3** (1936), 328–372.
- [91] G.N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2 ed., Cambridge University Press, 1952.
- [92] Heinrich Weber, *Lehrbuch der Algebra – Dritter Band, Elliptische Funktionen und Algebraische Zahlen*, Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1908, <http://www-gdz.sub.uni-goettingen.de/cgi-bin/digbib.cgi?PPN234736674>.
- [93] Steven Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Volume II – Modern Application*, Cambridge University Press, 1996.
- [94] Wolfram Weise, *The QCD vacuum and its hadronic excitations*, 2005, nucl-th/0504087.
- [95] Frank A. Wilczek, *Asymptotic Freedom: From Paradox to Paradigm*, Nobel Lecture, 8. Dezember 2004.
- [96] Kenneth G. Wilson, *Confinement of quarks*, Phys. Rev. **D10** (1974), 2445–2459.
- [97] Andreas Wipf, *Introduction to Supersymmetry*, Universität Jena, 2000/2001, Vorlesungsskript.
- [98] Andreas Wipf, *Symmetrien in der Physik*, Universität Jena, Sommersemester 2006, Vorlesungsskript.
- [99] Andreas Wipf, *Path Integrals*, Universität Jena, Wintersemester 2001/02, Vorlesungsskript.
- [100] Andreas Wipf, *Quantenfeldtheorie II*, 2. ed., Universität Jena, Wintersemester 2005/2006, Vorlesungsskript.
- [101] Christian Wozar, *Effektive Theorien der Gluodynamik bei endlichen Temperaturen*, Universität Jena, 2006, Diplomarbeit.
- [102] Christian Wozar, Tobias Kaestner, Andreas Wipf, Thomas Heinzl, and Balazs Pozsgay, *Phase structure of $Z(3)$ Polyakov loop models*, Phys. Rev. **D74** (2006), 114501, hep-lat/0605012.
- [103] L. G. Yaffe and B. Svetitsky, *First Order Phase Transition in the $SU(3)$ Gauge Theory at Finite Temperature*, Phys. Rev. **D26** (1982), 963.
- [104] Chen-Ning Yang and Robert L. Mills, *Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance*, Phys. Rev. **96** (1954), 191–195.
- [105] W.-M. Yao et al., *Review of particle physics*, J. Phys. **G33** (2006), 1–1232.
- [106] G. Zweig, *An $su(3)$ model for strong interaction symmetry and its breaking*, 1964, CERN-TH-401 und 412.

Danksagung

An erster Stelle gilt mein Dank Prof. Dr. Andreas Wipf für die ausgezeichnete Betreuung und die Möglichkeit, dieses interessante Thema zu bearbeiten sowie einen Teil der Ergebnisse in einer Fachzeitschrift zu veröffentlichen. Sein beständiges Interesse an dieser Arbeit, seine Anmerkungen und die fachliche Unterstützung waren mir eine stetige Motivation und haben wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Desweiteren danke ich Christian Wozar für das Bereitstellen der numerischen Daten, das Aushelfen mit einigen Programmen zur Auswertung derselbigen, den kritischen Kontrollblick auf meine eigenen Programme sowie für die ungezählten anregenden und hilfreichen Diskussionen.

Dr. Sebastian Uhlmann bin ich zu Dank verpflichtet für die vielen Anregungen, wenn ich mit einem hartnäckigen mathematischen Problem gekämpft habe, für das geduldige Beantworten meiner Fragen und seine ausführlichen Erklärungen zu den Feinheiten der mathematischen Physik.

Georg Bergner danke ich für die geduldige Beantwortung meiner Fragen zu physikalischen Feinheiten sowie den Einführungen in die höheren Künste der Benutzung von MATHEMATICA.

Allen dreien sei außerdem für das gründliche Korrekturlesen dieser Arbeit und die vielen Verbesserungsvorschläge gedankt.

Der Arbeitsgruppe Quantenfeldtheorie danke ich für die immer freundliche und offene Arbeitsatmosphäre.

Meinem Freund Sven Marten danke ich für seine Geduld, die er während der Zeiten aufgebracht hat, in denen es nicht vorwärts ging und die Kraft, die er mir gegeben hat, um diese Arbeit zu beenden. Auch für das Korrekturlesen dieser Arbeit sei ihm gedankt.

Desweiteren gilt mein Dank den anderen Korrekturlesern Matthias Heinrich, Tobias Kästner, Dr. Jörn Kersten, Matthias Kroll, Thorsten Schult und Helvi Witek, die sich die Zeit genommen haben, um auf Ungenauigkeiten in den Argumentationen hinzuweisen und diese Arbeit von Fehlern zu bereinigen.

Dank geht auch an meinen Onkel Reinhard Grünewald, der mich während meines Studiums immer unterstützt und mir dadurch vieles leichter gemacht hat.

Nicht genug danken kann ich meinen Eltern, daß sie mich meinen eigenen Weg gehen ließen und mich mein Studium hindurch immer mit all ihrer Kraft unterstützt haben. Schade Papa, daß Du dieses Ende nicht mehr erleben durftest.

Erklärung

Ich erkläre, daß ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Jena, den 30. Oktober 2007

Franziska Synatschke

Seitens der Verfasserin bestehen keine Einwände, die vorliegende Diplomarbeit für die öffentliche Nutzung in der Thüringer Universitäts- und Landesbibliothek zur Verfügung zu stellen.

Jena, den 30. Oktober 2007

Franziska Synatschke